АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. Г. В. КАРПЕНКО

МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ и ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ В ЧЕТЫРЕХ ТОМАХ

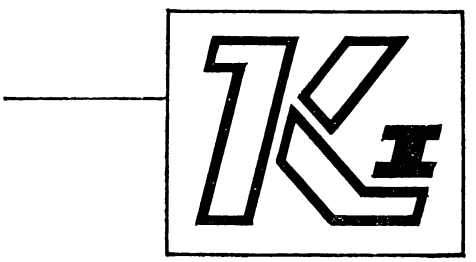
Под общей редакцией
академика АН УССР
В. В. ПАНАСЮКА

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1988

ТОМ 2

М.П.САВРУК

КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕЛАХ С ТРЕЩИНАМИ



КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1988

УДК 539.375

Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под общей редакцией Панасюка В. В.— Киев : Наук. думка, 1988—. — ISBN 5-12-000300-1.

Т. 2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / Саврук М. П.— 1988.— 620 с.— ISBN 5-12-000302-8.

Второй том справочного пособия содержит сведения о коэффициентах интенсивности напряжений у вершин трещин в наиболее характерных элементах конструкций. Рассмотрены упругие изотропные (однородные и неоднородные) тела с трещинами при действии статической нагрузки. Подробно исследованы различные дефекты типа трещин в пластинах, цилиндрических телах при плоской деформации и продольном сдвиге, а также в пространственных телах.

Для специалистов — физиков, механиков, материаловедов, инженеров, работающих в области механики разрушения и прочности материалов, а также для студентов и аспирантов, специализирующихся в этой области науки.

Ил. 713. Табл. 286. Библиогр.: с. 548—613.

Ответственный редактор *В. В. Панасюк*

Печатается по постановлению ученого совета
Физико-механического института АН УССР
и решению редакционной коллегии
справочной литературы АН УССР

Редакция справочной литературы

Заведующий редакцией *В. В. Панюков*

Редактор *Р. И. Гусячая*

М $\frac{2105000000\text{-}453}{\text{М221(04)-88}}$ КУ-3-17-88

ISBN 5-12-000302-8 (Т.2)
ISBN 5-12-000300-1

© Издательство «Наукова думка», 1988

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора 9

Основные обозначения и принятые сокращения 11

Глава 1. **Распределение напряжений около трещин в упругих телах** 13

1.1. Основные типы деформаций при растрескивании 13
1.2. Плоская задача теории упругости 14
1.3. Антиплоская задача теории упругости 18
1.4. Пространственная задача теории упругости 20
1.5. Поля напряжений у вершины трещины в неоднородном теле . . 22
1.6. Связь коэффициентов интенсивности напряжений с коэффициентами концентрации напряжений 26
1.7. Методы определения коэффициентов интенсивности напряжений 29

Глава 2. **Бесконечные пластины с трещинами при плоском напряженном состоянии** 40

2.1. Прямолинейная трещина конечной длины 40
2.2. Прямолинейная полубесконечная трещина 47
2.3. Две полубесконечные коллинеарные трещины 50
2.4. Дугообразная трещина 54
2.5. Гладкие криволинейные трещины 56
2.6. Ломаные трещины 60
2.7. Трещины ветвления 66
2.8. Система радиальных трещин, выходящих из одной точки . . 69
2.9. Система коллинеарных трещин в бесконечной плоскости . . . 74
2.10. Система произвольно ориентированных прямолинейных трещин 81
2.11. Система дугообразных трещин 86
2.12. Система трещин при циклической симметрии 89
2.13. Периодическая система коллинеарных трещин 93
2.14. Периодическая система параллельных трещин 97
2.15. Периодическая система трещин произвольной формы и ориентации 103
2.16. Двоякопериодическая система трещин 108

Глава 3. **Полуограниченные пластины с трещинами при плоском напряженном состоянии** 111

3.1. Полуплоскость с перпендикулярными к ее границе краевыми трещинами 111

3.2. Полуплоскость с краевыми трещинами различной конфигурации . . . 123
3.3. Полуплоскость с перпендикулярными к ее границе внутренними трещинами . . . 128
3.4. Полуплоскость с внутренними трещинами различной конфигурации . . . 135
3.5. Трещины в полуплоскости с краевыми вырезами, отверстиями или выступами . . . 144
3.6. Бесконечная полоса с краевой трещиной . . . 153
3.7. Бесконечная полоса с системой краевых трещин . . . 162
3.8. Бесконечная полоса с центральной поперечной трещиной . . 171
3.9. Бесконечная полоса с трещинами на средней линии . . . 175
3.10. Бесконечная полоса с произвольно размещенными трещинами 183
3.11. Бесконечный клин с трещинами . . . 193
3.12. Криволинейные отверстия с точками возврата на контуре в бесконечной плоскости . . . 203
3.13. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и краевой трещиной . . . 210
3.14. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и системой краевых трещин . . . 234
3.15. Бесконечная плоскость с некруговым отверстием и краевыми трещинами . . . 240
3.16. Бесконечная плоскость с криволинейным отверстием и внутренними трещинами . . . 246
3.17. Бесконечная плоскость с системой отверстий и трещин . . . 253

Глава 4. **Конечные пластины с трещинами при плоском напряженном состоянии** . . . 268

4.1. Круговой диск с центральной прямолинейной трещиной . . . 268
4.2. Круговой диск с произвольно размещенными внутренними трещинами . . . 277
4.3. Круговой диск с краевыми трещинами . . . 289
4.4. Круговое кольцо с внутренней краевой радиальной трещиной 297
4.5. Круговое кольцо с системой внутренних краевых радиальных трещин . . . 305
4.6. Круговое кольцо с наружной краевой радиальной трещиной 315
4.7. Круговое кольцо с системой наружных краевых радиальных трещин . . . 321
4.8. Круговое кольцо с внутренними трещинами . . . 328
4.9. Криволинейный диск с трещинами . . . 331
4.10. Эллиптическая пластина с круговым отверстием и краевыми трещинами . . . 338
4.11. Прямоугольная пластина с центральной продольной трещиной . . . 339
4.12. Прямоугольная пластина с произвольно размещенными внутренними трещинами . . . 349
4.13. Прямоугольная пластина с краевой трещиной . . . 356
4.14. Прямоугольная пластина с системой краевых трещин . . . 366
4.15. Прямоугольная пластина с вырезами и трещинами . . . 370
4.16. Многоугольная пластина с трещинами . . . 374

Глава 5. **Антиплоская деформация тел с трещинами** . . . 380

5.1. Бесконечное тело с прямолинейной трещиной . . . 380
5.2. Бесконечное тело с криволинейной трещиной . . . 383
5.3. Бесконечное тело с трещиной ветвления . . . 385

5.4. Бесконечное тело с системой коллинеарных трещин 390
5.5. Бесконечное тело с системой произвольно ориентированных прямолинейных трещин 392
5.6. Бесконечное тело с периодической системой криволинейных трещин 394
5.7. Бесконечное тело с периодической системой прямолинейных трещин 397
5.8. Полубесконечное пространство с трещинами 399
5.9. Бесконечный слой с трещинами 403
5.10. Бесконечный клин с трещинами 406
5.11. Бесконечное тело с полостями и краевыми трещинами . . . 408
5.12. Бесконечное тело с полостями и внутренними трещинами . . 410
5.13. Бесконечный цилиндр с трещинами 413
5.14. Прямоугольные балки с трещинами 416
5.15. Кручение стержней с трещинами 418
5.16. Изгиб стержней с трещинами 422

Глава 6. Пространственные тела с трещинами 426

6.1. Бесконечное тело с плоской круговой трещиной 426
6.2. Бесконечное тело с плоской эллиптической трещиной 432
6.3. Бесконечное тело с плоскими внутренними трещинами различной формы 435
6.4. Бесконечное тело с плоской полубесконечной трещиной . . . 438
6.5. Бесконечное тело с внешней круговой трещиной 442
6.6. Бесконечное тело с внешними плоскими трещинами различной формы 445
6.7. Бесконечное тело с системой плоских трещин 448
6.8. Полубесконечное пространство с трещинами 452
6.9. Бесконечный слой с трещинами 457
6.10. Толстая пластина с отверстием и трещинами 468
6.11. Бесконечное тело с полостями и трещинами 471
6.12. Бесконечный круговой цилиндр с трещинами 477
6.13. Бесконечный полый круговой цилиндр с трещинами 482
6.14. Призматические брусья с трещинами 485
6.15. Ограниченные тела с трещинами 487

Глава 7. Неоднородные тела с трещинами 492

7.1. Две спаянные полубесконечные пластины с трещинами на линии раздела сред 492
7.2. Две спаянные полубесконечные пластины с трещинами, перпендикулярными линии раздела сред 495
7.3. Две спаянные полубесконечные пластины с трещинами различной ориентации 499
7.4. Бесконечная пластина с эллиптическими (круговыми) включениями и трещинами 502
7.5. Бесконечная пластина с тонкими упругими (жесткими) включениями и трещинами 507
7.6. Слоистый композит с трещинами 511
7.7. Составная полубесконечная пластина с трещинами 515
7.8. Слоистая полоса с трещинами 520
7.9. Ограниченные кусочно-однородные пластины с трещинами . . 524
7.10. Два спаянных разнородных полупространства с туннельными трещинами при продольном сдвиге 526
7.11. Бесконечное пространство с цилиндрическими включениями и туннельными трещинами при продольном сдвиге 529

7.12. Слоистые композиты с туннельными трещинами при продольном сдвиге 533
7.13. Слоистая среда с круговыми трещинами 537
7.14. Пространственные тела с включениями и трещинами . . . 540
7.15. Неоднородная упругая среда с трещинами 543

Список литературы 548

Предметный указатель 614

ОТ АВТОРА

В механике разрушения коэффициенты интенсивности напряжений являются одними из наиболее важных параметров, характеризующих распределение напряжений около трещин в упругих телах. Они лежат в основе применения принципов линейной механики разрушения при расчетах на прочность и долговечность элементов конструкций. Для их определения предложены различные подходы и методы. Однако полученные результаты рассеяны в многочисленных, часто труднодоступных изданиях. Поэтому назрела необходимость систематизации их в книге справочного характера.

Настоящее пособие содержит сведения о коэффициентах интенсивности напряжений у вершин трещин в наиболее характерных элементах конструкций. Дана сводка основных результатов для коэффициентов интенсивности напряжений в изотропных (однородных и неоднородных) телах с трещинами. Кроме публикаций, из которых заимствованы приводимые сведения, указаны также работы, содержащие аналогичные данные, полученные другими методами или при других значениях силовых и геометрических параметров. Отмечаются также соответствующие исследования, выполненные для анизотропных сред с трещинами. Приведенный литературный обзор позволит при необходимости получить более полную информацию о коэффициентах интенсивности напряжений.

В первой главе изучается распределение напряжений и перемещений в окрестности вершины трещины и дается определение коэффициентов интенсивности напряжений. Рассматриваются как однородная, так и кусочно-однородная среды, когда трещина выходит на линию раздела материалов или расположена вдоль нее. Приводятся краткие сведения об основных методах определения коэффициентов интенсивности напряжений.

Вторая, третья и четвертая главы содержат данные о коэффициентах интенсивности напряжений для наиболее полно изученного случая однородных тел с трещинами при условиях плоской задачи теории упругости (тонкие пластины при обобщенном плоском напряженном состоянии или цилиндрические тела при плоской деформации). Здесь же описываются различные экспериментальные образцы с трещинами, использующиеся при исследовании трещиностойкости материалов.

Пятая глава посвящена продольному сдвигу тел с туннельными трещинами. Рассмотрено также кручение и изгиб стержней с продольными трещинами.

В шестой главе приведены коэффициенты интенсивности напряжений для пространственных тел с трещинами. Рассмотрены случаи внутренних и поверхностных плоских трещин различной конфигурации в бесконечном и полубесконечном пространствах, в слое и цилиндре, а также в некоторых ограниченных телах.

Седьмая глава посвящена рассмотрению неоднородных тел с трещинами. Основное внимание обращено на случай кусочно-однородной среды, когда трещины находятся вблизи поверхности раздела материалов, выходят на нее или пересекают ее. Исследовано также распределение напряжений около трещины в неоднородном теле, упругие характеристики которого являются непрерывными функциями пространственных координат.

Автор выражает глубокую признательность академику АН УССР В. В. Панасюку за постоянный интерес и внимание к работе, рецензентам Б. С. Касаткину и Г. С. Киту за высказанные критические замечания, а также О. Г. Хариной за помощь при подготовке рукописи к изданию.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

$\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$ — обратные тригонометрические функции

$\operatorname{arth} z$ — обратная гиперболическая функция

$\operatorname{cn}(v, k)$, $\operatorname{dn}(v, k)$, $\operatorname{sn}(v, k)$ — эллиптические функции Якоби

G, G_1, G_2 — модули сдвига

$G(x, y)$ — модуль сдвига, зависящий от координат x, y

E, E_1, E_2 — модули упругости

$E(e)$ — полный эллиптический интеграл второго рода

$E(\theta, k)$ — эллиптический интеграл второго рода

$\exp z = e^z$ — показательная функция

F — сосредоточенная сила

F_{I}, F_{II}, F_{III} — относительные КИН K_{I}, K_{II}, K_{III}

$F_{\mathrm{I}}^{\pm}$, $F_{\mathrm{II}}^{\pm}$, $F_{\mathrm{III}}^{\pm}$ — относительные КИН $K_{\mathrm{I}}^{\pm}$, $K_{\mathrm{II}}^{\pm}$, $K_{\mathrm{III}}^{\pm}$

$F_{\mathrm{I}}(a)$, $F_{\mathrm{II}}(a)$, $F_{\mathrm{III}}(a)$ — относительные КИН $K_{\mathrm{I}}(a)$, $K_{\mathrm{II}}(a)$, $K_{\mathrm{III}}(a)$

$F_{\mathrm{I}}(A)$, $F_{\mathrm{II}}(A)$, $F_{\mathrm{III}}(A)$ — относительные КИН $K_{\mathrm{I}}(A)$, $K_{\mathrm{II}}(A)$, $K_{\mathrm{III}}(A)$

$F^{\pm}(t)$ — предельное значение функции $F(z)$ на контуре L (на берегах трещины) при $z \to t$ слева (+) или справа (—) по отношению к выбранному положительному направлению

$F(\theta, k)$ — эллиптический интеграл первого рода

$\operatorname{Im} f(z)$ — мнимая часть $f(z)$

$J_{\nu}(z)$ — функция Бесселя первого рода

K_{I}, K_{II}, K_{III} — коэффициенты интенсивности нормальных напряжений и напряжений поперечного и продольного сдвига

K_{I}^{-}, K_{II}^{-}, K_{III}^{-} — КИН в левой вершине (начале) трещины

K_{I}^{+}, K_{II}^{+}, K_{III}^{+} — КИН в правой вершине (конце) трещины

$K_{\mathrm{I}}(a)$, $K_{\mathrm{II}}(a)$, $K_{\mathrm{III}}(a)$ — КИН в вершине трещины с абсциссой $x = a$

$K_{\mathrm{I}}(A)$, $K_{\mathrm{II}}(A)$, $K_{\mathrm{III}}(A)$ — КИН в вершине трещины A

$K_{\mathrm{I}}(\theta)$, $K_{\mathrm{II}}(\theta)$, $K_{\mathrm{III}}(\theta)$ — КИН в точке фронта трещины с угловой координатой θ

$K(e)$ — полный эллиптический интеграл первого рода

l, l_1, l_2 — длины краевых или полудлины внутренних прямолинейных трещин

$\ln z$ — натуральный логарифм

M, M_x, M_y, M_z — изгибающие (крутящие) моменты

p, p_1, p_2 — нормальные напряжения

P, P_1, P_2 — сосредоточенные силы

$p(x)$, $p(t)$, $p(x, y)$ — нагрузка на берегах трещины
q — нормальное (касательное) напряжение
Q, Q_1, Q_2 — сосредоточенные силы
$q(x)$, $q(t)$, $q(r, \theta)$ — нагрузка на берегах трещины
$\operatorname{Re} f(z)$ — действительная часть $f(z)$
$\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$, $\operatorname{sch} z$, $\operatorname{csch} z$ — гиперболические функции
$\operatorname{sign}(x)$ — функция сигнум
$\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\sec z$ — тригонометрические функции
T, T_1, T_2 — сосредоточенные силы
u, v_x — компоненты вектора смещений по направлению оси x
$U(x, y)$ — функция напряжений Эри
v, v_y — компоненты вектора смещений по направлению оси y
v_r, v_θ — компоненты вектора смещений в полярной системе координат r, θ
w — компонента вектора смещений по направлению оси z
X, Y — сосредоточенные силы
Y_1 — относительный КИН K_1
$Z_I(z)$, $Z_{II}(z)$ — функции Вестергарда
$\Gamma(m)$ — гамма-функция
$\delta(x)$ — дельта-функция
$\eta(x)$ — функция Хевисайда
$\varkappa = 3 - 4\mu$ — для плоской деформации и $\varkappa = (3 - \mu)/(1 + \mu)$ — для обобщенного плоского напряженного состояния
$\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — упругие постоянные $\varkappa$ при $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$
μ, μ_1, μ_2 — коэффициенты Пуассона
$\mu(t)$ — нагрузка на берегах трещины
$\Pi(m, n)$ — полный эллиптический интеграл третьего рода
σ, σ_1, σ_2 — нормальные напряжения
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ — компоненты тензора напряжений в прямоугольных координатах
$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$ — компоненты тензора напряжений в цилиндрических координатах
σ_{max} — максимальное нормальное напряжение
$\sigma(x)$ — нормальная нагрузка на берегах трещины
τ — касательное напряжение
τ_{max} — максимальное касательное напряжение
$\tau(x)$, $\tau(r, \theta)$ — сдвигающая нагрузка на берегах трещины
$\varphi(z)$, $\varphi'(z) = \Phi(z)$, $\chi(z)$, $\psi(z)$, $\psi'(z) = \Psi(z)$, $\Omega(z)$ — комплексные потенциалы напряжений
ГИУ — граничное интегральное уравнение
КИН — коэффициент интенсивности напряжений
МГЭ — метод граничных элементов
МКЭ — метод конечных элементов
СИУ — сингулярное интегральное уравнение

ГЛАВА 1

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ТРЕЩИН В УПРУГИХ ТЕЛАХ

1.1. Основные типы деформаций при растрескивании

В механике разрушения трещины в твердых телах рассматриваются как поверхности разрыва вектора смещений. Трещину можно трактовать также как предельный случай узкой полости — щели, когда расстояние между ее противоположными поверхностями стремится к нулю. При нагружении тела поверхности (берега) трещины смещаются по отношению друг к другу. Можно выделить три основных типа перемещений поверхностей трещины [1]. Эти типы деформаций для трещины, занимающей полуплоскость $x \leqslant 0$, $y = 0$ в декартовой системе координат (x, y, z), к которой отнесено тело, представлены на рис. 1.1.

Нормальный отрыв (I). На поверхности трещины терпят разрыв нормальные смещения v, а остальные смещения u и w непрерывны. При отрыве деформирование происходит таким образом, что поверхности трещины отдаляются друг от друга при сохранении симметричности относительно плоскостей xy и xz (рис. 1.1, *а*).

Поперечный сдвиг (II). Трещина представляет собой поверхность разрыва касательного смещения u; смещения v и w непрерывны. При таком деформировании поверхности трещины скользят одна по другой в направлении, перпендикулярном краю (фронту) трещины (симметрично относительно плоскости xy и кососимметрично относительно плоскости xz (рис. 1.1, *б*).

Продольный сдвиг (III). На поверхности трещины терпит разрыв касательное смещение w, а смещения u и v непрерывны. В этом случае происходит взаимное скольжение поверхностей трещины параллельно ее краю (кососимметрично относительно плоскостей xy и xz) (рис. 1.1, *в*).

С помощью наложения этих трех типов смещений можно описать любую локальную деформацию у края трещины произвольной конфигурации.

Каждому из трех перемещений поверхностей трещины, изображенных на рис. 1.1, соответствует свое поле напряжений в окрестности края трещины. Три компоненты напряжений σ_y, τ_{xy} и τ_{yz} в точках, расположенных на продолжении трещины (в плоскости xz) вблизи ее края, можно представить в виде [1]

$$\sigma_y = K_I/\sqrt{2\pi x} + O(x^0), \quad \tau_{xy} = K_{II}/\sqrt{2\pi x} + O(x^0),$$

$$\tau_{yz} = K_{III}/\sqrt{2\pi x} + O(x^0), \tag{1.1}$$

где опускаются члены более высокого порядка относительно переменной x. Параметры K_I, K_{II} и K_{III} называются коэффициентами интенсивности нормальных напряжений и напряжений поперечного и продольного сдвигов у вершины трещины или просто коэффициентами интенсивности напряжений (КИН). При приближении к вершине трещины ($x \to 0$) напряжения неограниченно возрастают (1.1). Интенсивность локальных

напряжений у края трещины характеризуется коэффициентами K_{I}, K_{II} и K_{III}. КИН зависит от внешней нагрузки, геометрии тела, включая и конфигурацию трещины, и упругих постоянных материала. Они имеют размерность силы, деленной на длину в степени три вторых. С физической точки зрения КИН можно рассматривать как параметры, которые отражают перераспределение напряжений в теле вследствие образования трещины. Распределение напряжений в малой области, окружающей вершину трещины, известно, если только определены значения КИН. Распределение напряжений типа (1.1) имеет место не только для трещин, но и для

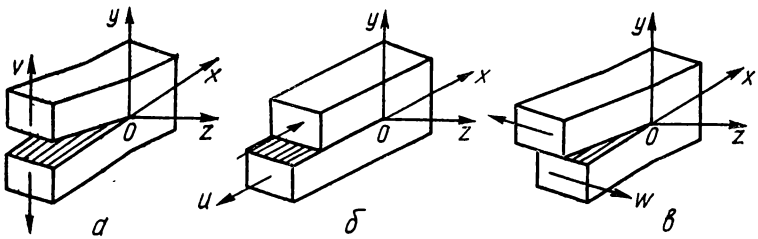


Рис. 1.1. Основные типы перемещений поверхностей трещины:
а — тип I (нормальный отрыв), *б* — тип II (поперечный сдвиг), *в* —тип III (продольный сдвиг).

остроугольных отверстий с точками возврата на граничном контуре (дефекты типа трещин).

Коэффициенты интенсивности напряжений играют существенную роль в оценке прочности при хрупком разрушении твердых тел с трещинами. Определение КИН является задачей математической теории упругости.

1.2. Плоская задача теории упругости

Основные соотношения. Упругое равновесие твердых тел описывается уравнениями плоской задачи теории упругости в случае плоской деформации цилиндрических тел постоянного поперечного сечения, когда на тело действуют внешние силы, нормальные к его оси и одинаковые для всех поперечных сечений указанного тела, либо в случае обобщенного плоского напряженного состояния, т. е. при деформации тонкой пластины силами, действующими в ее плоскости. При этом для определения напряженно-деформированного состояния в произвольной точке деформируемого упругого изотропного тела необходимо найти три компоненты тензора напряжений — σ_x, σ_y, τ_{xy} и две составляющие вектора перемещений — u, v. Если система декартовых координат выбрана так, что плоскость xy совпадает или с поперечным сечением стержня (плоская деформация), или со срединной плоскостью пластины (плоское напряженное состояние), указанные компоненты являются функциями двух переменных x и y.

Введем функцию напряжений Эри $U(x, y)$ по формулам

$$\sigma_x = \partial^2 U/\partial y^2, \quad \sigma_y = \partial^2 U/\partial x^2, \quad \tau_{xy} = -\partial^2 U/(\partial x \partial y).$$

Тогда решение плоской задачи теории упругости в случае отсутствия объемных сил сводится к интегрированию бигармонического уравнения

$$\partial^4 U/\partial x^4 + 2\partial^4 U/(\partial x^2 \partial y^2) + \partial^4 U/\partial y^4 = 0 \qquad (1.2)$$

при определенных граничных условиях.

Общее решение уравнения (1.2) можно представить через две аналитические функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ от одного комплексного аргумента $z = x + iy$ по формуле Гурса

$$U(x, y) = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)], \quad \bar{z} = x - iy. \tag{1.3}$$

Компоненты напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} и смещений u, v выражаются через комплексные потенциалы Колосова — Мусхелишвили $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ по формулам [2, 3]

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \\ &\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \\ &2G(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)}, \\ &\Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z), \quad \psi(z) = \chi'(z). \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Здесь u и v — компоненты вектора смещений соответственно в направлении осей x и y; $G = E/(2(1 + \mu))$ — модуль сдвига; E — модуль Юнга; μ — коэффициент Пуассона; $\varkappa = 3 - 4\mu$ — для плоской деформации и $\varkappa = (3 - \mu)/(1 + \mu)$ — для обобщенного плоского напряженного состояния.

Компоненты σ_r, σ_θ и $\tau_{r\theta}$ тензора напряжений и составляющие v_r и v_θ вектора смещений в полярной системе координат r, θ с полюсом в начале декартовой системы координат x, y ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) связаны с соответствующими компонентами напряжений и смещений в декартовых координатах соотношениями

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y, \\ &\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = e^{2i\theta}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}), \\ &v_r + iv_\theta = e^{-i\theta}(u + iv). \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Решение плоской задачи теории упругости сводится к определению двух аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в области S, занятой упругим телом, при использовании предельных значений этих функций на границе тела L, на которой могут быть заданы внешние напряжения (первая основная задача) или смещения (вторая основная задача), а также на части границы — напряжения, а на остальной части — смещения (смешанная задача).

Поля напряжений и смещений у вершины трещины. Рассмотрим бесконечную плоскость с полубесконечной прямолинейной трещиной вдоль отрицательной полуоси x (рис. 1.2). Пусть на берегах трещины отсутствуют напряжения

$$\sigma_\theta^{\pm} + i\tau_{r\theta}^{\pm} = 0 \quad (\theta = \pm\pi), \tag{1.6}$$

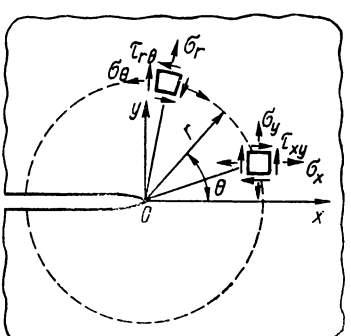


Рис. 1.2. Компоненты напряжений вблизи вершины трещины в декартовой и полярной системах координат.

где индексы «+» и «—» указывают на предельные значения соответствующих величин на верхнем и нижнем берегах трещины. Будем искать общее

решение задачи в виде [4]

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{\lambda_n}, \quad \chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^{\lambda_n+1}. \tag{1.7}$$

Подставив функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ (1.7) в граничные условия (1.6), придем к характеристическому уравнению

$$\sin 2\pi\lambda_n = 0,$$

решение которого дает собственные значения

$$\lambda_n = n/2, \quad n = 0, 1, \ldots$$

При этом условия (1.6) удовлетворяются, если коэффициенты A_n и B_n связаны между собой соотношениями

$$\lambda_n A_n + (-1)^n \bar{A}_n + (\lambda_n + 1) B_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Воспользовавшись равенствами (1.3) и (1.7), легко построить представление общего решения задачи с помощью функции Эри [5].

Собственное значение $\lambda_1 = 1/2$ соответствует особенности напряжений в вершине трещины типа $1/\sqrt{r}$. Поэтому вблизи вершины трещины достаточно взять функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ в виде

$$\varphi(z) = A_1 z^{1/2} + \cdots, \quad \chi(z) = B_1 z^{3/2} + \cdots, \tag{1.8}$$

где $3B_1 = 2\bar{A}_1 - A_1$. Подставив потенциалы (1.8) в соотношения (1.4) и (1.5), получим распределение напряжений и смещений вблизи вершины трещины. Для компонент напряжений и смещений в полярной системе координат с началом в вершине трещины (см. рис. 1.2) имеем [4, 5]

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_r = (K_I/\sqrt{2\pi r}) \cos(\theta/2)\,[2 - \cos^2(\theta/2)] + \\
&+ (K_{II}/\sqrt{2\pi r}) \sin(\theta/2)\,[1 - 3\sin^2(\theta/2)] + O(r^0), \\
&\sigma_\theta = (K_I/\sqrt{2\pi r}) \cos^3(\theta/2) - \\
&- (K_{II}/\sqrt{2\pi r})\, 3 \sin(\theta/2) \cos^2(\theta/2) + O(r^0), \\
&\tau_{r\theta} = (K_I/\sqrt{2\pi r}) \sin(\theta/2) \cos^2(\theta/2) + \\
&+ (K_{II}/\sqrt{2\pi r}) \cos(\theta/2)\,[1 - 3\sin^2(\theta/2)] + O(r^0), \\
&8Gv_r = K_I \sqrt{2r/\pi}\,[(2\varkappa - 1)\cos(\theta/2) - \cos(3\theta/2)] + \\
&+ K_{II} \sqrt{2r/\pi}\,[(1 - 2\varkappa)\sin(\theta/2) + 3\sin(3\theta/2)] + O(r), \\
&8Gv_\theta = K_I \sqrt{2r/\pi}\,[-(2\varkappa + 1)\sin(\theta/2) + \sin(3\theta/2)] + \\
&+ K_{II} \sqrt{2r/\pi}\,[-(2\varkappa + 1)\cos(\theta/2) + 3\cos(3\theta/2)] + O(r).
\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Асимптотические представления компонент напряжений и смещений в декартовой системе координат в окрестности вершины трещины (см.

рис. 1.2) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x = (K_{\mathrm{I}}/\sqrt{2\pi r})\cos(\theta/2)\,[1-\sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)]- \\
&-(K_{\mathrm{II}}/\sqrt{2\pi r})\sin(\theta/2)\,[2+\cos(\theta/2)\cos(3\theta/2)]+O(r^0), \\
&\sigma_y = (K_{\mathrm{I}}/\sqrt{2\pi r})\cos(\theta/2)\,[1+\sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)]+ \\
&+(K_{\mathrm{II}}/\sqrt{2\pi r})\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\cos(3\theta/2)+O(r^0), \\
&\tau_{xy} = (K_{\mathrm{I}}/\sqrt{2\pi r})\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\cos(3\theta/2)+ \\
&+(K_{\mathrm{II}}/\sqrt{2\pi r})\cos(\theta/2)\,[1-\sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)]+O(r^0), \\
&\sigma_z = \begin{cases} 0 \text{ — для обобщенного плоского напряженного состояния,} \\ \mu(\sigma_x+\sigma_y) \text{ — для плоской деформации,} \end{cases} \\
&8Gu = K_{\mathrm{I}}\sqrt{2r/\pi}\,[(2\varkappa-1)\cos(\theta/2)-\cos(3\theta/2)]+ \\
&+K_{\mathrm{II}}\sqrt{2r/\pi}\,[(2\varkappa+3)\sin(\theta/2)+\sin(3\theta/2)]+O(r), \\
&8Gv = K_{\mathrm{I}}\sqrt{2r/\pi}\,[(2\varkappa+1)\sin(\theta/2)-\sin(3\theta/2)]- \\
&-K_{\mathrm{II}}\sqrt{2r/\pi}\,[(2\varkappa-3)\cos(\theta/2)+\cos(3\theta/2)]+O(r), \\
&w = \begin{cases} 0 \text{ — для плоской деформации,} \\ -(2\mu/E)\,z/\sqrt{2\pi r}\,[K_{\mathrm{I}}\cos(\theta/2)-K_{\mathrm{II}}\sin(\theta/2)]+O(r^0) \text{ — для обобщенного плоского напряженного состояния.} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Здесь z — декартова координата по толщине пластины; КИН K_{I} и K_{II} связаны с постоянной A_1 в формуле (1.8) соотношением

$$A_1 = (K_{\mathrm{I}} - iK_{\mathrm{II}})/\sqrt{\pi}. \tag{1.11}$$

Асимптотические представления полей напряжений и смещений (1.9) и (1.10) справедливы для трещины любой формы, если ввести декартову (x, y) и полярную (r, θ) системы координат с началом (полюсом) в вершине трещины и осью x (полярной осью), направленной по касательной к контуру трещины в ее вершине. Существенно, что распределение напряжений и смещений вблизи вершины трещины всегда имеет одну и ту же функциональную зависимость в полярных координатах (r, θ) для произвольных конфигурации тела, формы трещины и внешней нагрузки.

Из равенств (1.3) — (1.11) следует ряд формул, которые могут быть использованы при определении КИН. Будем считать, что правая вершина трещины находится в точке $x = a$ на оси x, которая направлена по касательной к контуру трещины в этой точке. Тогда выполняются соотношения

$$
\begin{aligned}
&K_{\mathrm{I}} - iK_{\mathrm{II}} = \lim_{x\to a+0}\sqrt{2\pi(x-a)}\,[\sigma_y(x,0)-i\tau_{xy}(x,0)], \\
&K_{\mathrm{I}} - iK_{\mathrm{II}} = 2G\sqrt{\pi}/(1+\varkappa)\lim_{x\to a-0}\{[v(x,+0)-v(x,-0)]- \\
&-i\,[u(x,+0)-u(x,-0)]\}/\sqrt{2(a-x)}, \\
&K_{\mathrm{I}} - iK_{\mathrm{II}} = 2G/(1+\varkappa)\lim_{x\to a-0}\sqrt{2\pi(a-x)}\,(\partial/\partial x)\{[v(x,+0)-
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

$$-v(x, -0)] - i[u(x, +0) - u(x, -0)]\},$$

$$K_1 - iK_{II} = 2\lim_{z\to a}\sqrt{2\pi(z-a)}\,\Phi(z).$$

Данные по КИН для упругих однородных изотропных тел с трещинами, находящихся в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния, приведены в гл. 2—4.

1.3. Антиплоская задача теории упругости

Основные соотношения. Под продольным сдвигом или антиплоской деформацией понимают напряженное состояние в цилиндрическом теле, вызванное нагрузками, направленными по образующим цилиндра и постоянными вдоль них. Если ось деформации направлена по оси z декартовой системы координат (x, y, z), компоненты вектора упругих смещений u, v и w могут быть представлены в виде $u = v = 0$, $w = w(x, y)$.

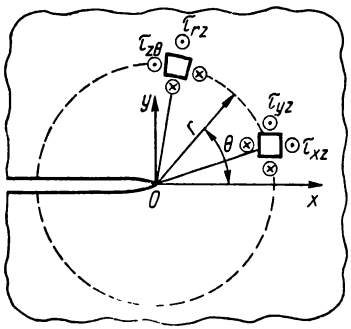


Рис. 1.3. Компоненты напряжений продольного сдвига вблизи вершины трещины в декартовой и цилиндрической системах координат.

Из закона Гука следует, что ненулевые компоненты тензора напряжений τ_{xz} и τ_{yz} являются функциями двух переменных x и y и выражаются через смещение $w(x, y)$:

$$\tau_{xz} = G\partial w/\partial x, \quad \tau_{yz} = G\partial w/\partial y. \tag{1.13}$$

Система уравнений равновесия сводится к одному уравнению, которое при отсутствии массовых сил принимает вид

$$\partial^2 w/\partial x^2 + \partial^2 w/\partial y^2 = 0.$$

При этом единственное уравнение совместности деформаций удовлетворяется тождественно.

Поскольку $Gw(x, y)$ — гармоническая функция, ее можно представить в виде вещественной части некоторой аналитической функции $f(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$ *:

$$Gw(x, y) = \operatorname{Re} f(z). \tag{1.14}$$

Из уравнений (1.13) следует, что

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = f'(z) = F(z), \tag{1.15}$$

где $F(z)$ — аналитическая функция в области, занимаемой телом. В цилиндрической системе координат (r, θ, z) компоненты тензора напряжений τ_{rz} и $\tau_{\theta z}$ связаны с компонентами напряжений τ_{xz} и τ_{yz} в декартовой системе координат (x, y, z) $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$ соотношением

$$\tau_{rz} - i\tau_{\theta z} = e^{i\theta}(\tau_{xz} - i\tau_{yz}). \tag{1.16}$$

Решение антиплоской задачи теории упругости сводится к определению аналитической функции $f(z)$ в области S, занятой упругим телом,

*Комплексную переменную z не следует смешивать с декартовой координатой z.

при использовании предельного значения этой функции на границе тела L, на которой могут быть заданы внешние напряжения (первая основная задача) или смещения (вторая основная задача), а также на части границы — напряжения, а на остальной части — смещения (смешанная задача).

Поля напряжений и смещений у вершины трещины. Рассмотрим бесконечную плоскость с полубесконечной прямолинейной трещиной вдоль отрицательной полуоси x (рис. 1.3). Пусть на берегах трещины отсутствуют напряжения:

$$\tau_{\theta z}^{\pm} = 0 \quad (\theta = \pm \pi). \tag{1.17}$$

Будем искать общее решение задачи в виде [4, 6]

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{\lambda_n}. \tag{1.18}$$

Подставив функцию $f(z)$ (1.18) в граничные условия (1.17), придем к характеристическому уравнению $\sin 2\pi\lambda_n = 0$, решение которого дает собственные значения $\lambda_n = n/2$, $n = 0, 1, \ldots$ При этом условия (1.17) удовлетворяются, если для коэффициентов C_n выполняется равенство $(-1)^n C_n - \bar{C}_n = 0$.

Собственное значение $\lambda_1 = {}^1/_2$ соответствует особенности напряжений в вершине трещины типа $1/\sqrt{r}$. Поэтому вблизи вершины трещины достаточно взять функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = C_1 z^{1/2} + \cdots \quad (\mathrm{Re}\, C_1 = 0). \tag{1.19}$$

Подставив потенциал $f(z)$ (1.19) в соотношения (1.14) — (1.16), получим распределение напряжений и смещений вблизи вершины трещины. Для компонент напряжений в полярной системе координат с началом в вершине трещины (см. рис. 1.3) имеем [4]

$$\left.\begin{aligned} \tau_{rz} &= (K_{\mathrm{III}}/\sqrt{2\pi r}) \sin(\theta/2) + O(r^0), \\ \tau_{\theta z} &= (K_{\mathrm{III}}/\sqrt{2\pi r}) \cos(\theta/2) + O(r^0). \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

Асимптотические представления компонент напряжений и смещения в декартовой системе координат в окрестности вершины трещины имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xz} &= -(K_{\mathrm{III}}/\sqrt{2\pi r}) \sin(\theta/2) + O(r^0), \\ \tau_{yz} &= (K_{\mathrm{III}}/\sqrt{2\pi r}) \cos(\theta/2) + O(r^0), \\ w &= (K_{\mathrm{III}}\sqrt{2r/\pi}/G) \sin(\theta/2) + O(r). \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

Коэффициент интенсивности напряжений продольного сдвига K_{III} связан с постоянной C_1 в формуле (1.19) соотношением

$$K_{\mathrm{III}} = -\sqrt{\pi/2}\, \mathrm{Im}\, C_1. \tag{1.22}$$

Из равенств (1.14) — (1.22) следует ряд формул, которые могут быть использованы при определении КИН K_{III}. Будем считать, что правая вершина трещины находится в точке $x = a$ на оси x, которая направлена по касательной к контуру трещины в ее вершине. Тогда выполняются

соотношения

$$
\left.
\begin{aligned}
K_{\mathrm{III}} &= \lim_{x \to a+0} \sqrt{2\pi (x-a)}\, \tau_{yz}(x, 0), \\
K_{\mathrm{III}} &= G \lim_{x \to a-0} [w(x, +0) - w(x, -0)] / \sqrt{2(a-x)/\pi}, \\
K_{\mathrm{III}} &= G \lim_{x \to a-0} \sqrt{2\pi (a-x)}\, (\partial/\partial x) [w(x, +0) - w(x, -0)], \\
K_{\mathrm{III}} &= i \lim_{z \to a} \sqrt{2\pi (z-a)}\, F(z).
\end{aligned}
\right\} \qquad (1.23)
$$

Условия антиплоской деформации реализуются также при кручении и изгибе цилиндрических стержней с продольными трещинами. Данные по КИН при продольном сдвиге упругих однородных изотропных тел с трещинами, а также при кручении и изгибе однородных изотропных цилиндрических брусьев с трещинами приведены в гл. 5.

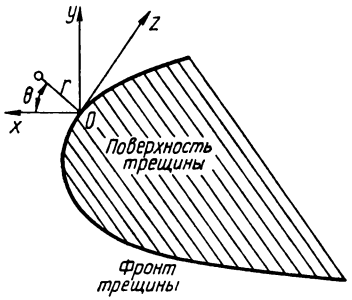
1.4. Пространственная задача теории упругости

Поля напряжений и смещений у края трещины. Напряженно-деформированное состояние вблизи края произвольной трещины в упругом пространстве разделяется на плоскую деформацию и продольный сдвиг. Введем декартову (x, y, z) и цилиндрическую (r, θ, z) системы координат таким образом, чтобы плоскость xz совпала с касательной плоскостью к поверхности трещины в точке O, лежащей на ее крае, а ось z была направлена вдоль касательной к фронту трещины (рис. 1.4). Тогда на основании формул (1.10) и (1.21) можно записать асимптотическое представление напряжений и смещений у края трещины по произвольной поверхности в упругом теле:

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_x &= (K_{\mathrm{I}}/\sqrt{2\pi r}) \cos(\theta/2) [2 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)] - \\
&- (K_{\mathrm{II}}/\sqrt{2\pi r}) \sin(\theta/2) [1 + \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2)] + O(r^0), \\
\sigma_y &= (K_{\mathrm{I}}/\sqrt{2\pi r}) \cos(\theta/2) [1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)] + \\
&+ (K_{\mathrm{II}}/\sqrt{2\pi r}) \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2) + O(r^0), \\
\sigma_z &= 2\mu (K_{\mathrm{I}}/\sqrt{2\pi r}) \cos(\theta/2) - 2\mu (K_{\mathrm{II}}/\sqrt{2\pi r}) \sin(\theta/2) + O(r^0), \\
\tau_{xy} &= (K_{\mathrm{I}}/\sqrt{2\pi r}) \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2) + \\
&+ (K_{\mathrm{II}}/\sqrt{2\pi r}) \cos(\theta/2) [1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)] + O(r^0)], \\
\tau_{xz} &= -(K_{\mathrm{III}}/\sqrt{2\pi r}) \sin(\theta/2) + O(r^0), \\
\tau_{yz} &= (K_{\mathrm{III}}/\sqrt{2\pi r}) \cos(\theta/2) + O(r^0), \\
u &= (K_{\mathrm{I}} \sqrt{2r/\pi}/8G) [(5 - 8\mu) \cos(\theta/2) - \cos(3\theta/2)] + \\
&+ (K_{\mathrm{II}} \sqrt{2r/\pi}/8G) [(9 - 8\mu) \sin(\theta/2) + \sin(3\theta/2)] + O(r), \\
v &= (K_{\mathrm{I}} \sqrt{2r/\pi}/8G) [(7 - 8\mu) \sin(\theta/2) - \sin(3\theta/2)] - \\
&- (K_{\mathrm{II}} \sqrt{2r/\pi}/8G) [(3 - 8\mu) \cos(\theta/2) + \cos(3\theta/2)] + O(r), \\
w &= (K_{\mathrm{III}} \sqrt{2r/\pi}/G) \sin(\theta/2) + O(r).
\end{aligned}
\right\} \qquad (1.24)
$$

Функциональная зависимость напряжений и смещений (1.24) от локальных координат r и θ одна и та же в любой точке фронта трещины, однако коэффициенты интенсивности напряжений K_{I}, K_{II} и K_{III}, вообще говоря, меняются вдоль края трещины.

Поверхностная трещина. Если трещины выходят на границу упругого тела, распределение напряжений и смещений во внутренних точках фронта трещины, не лежащих на границе тела, описывается соотношениями (1.24). Однако в окрестности точки пересечения фронта трещины с границей тела поведение напряжений и смещений, вообще говоря, может быть другим. При исследовании этого случая достаточно рассмотреть



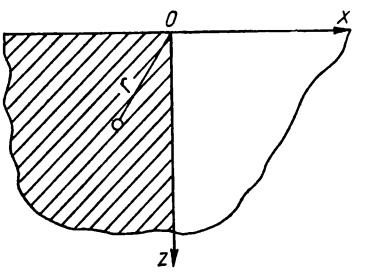


Рис. 1.4. Декартова и цилиндрическая системы координат у края трещины по произвольной поверхности.

Рис. 1.5. Сечение полупространства с плоской поверхностной трещиной в виде четверти плоскости вдоль плоскости трещины.

распределение напряжений в полупространстве с плоской поверхностной трещиной в форме бесконечного клина.

Пусть в однородном изотропном полупространстве $z > 0$ имеется ортогональная границе плоская трещина, занимающая четверть плоскости xz ($x > 0$, $z > 0$). Напряжения на границе полупространства и на поверхностях трещины равны нулю (рис. 1.5). В работах [7, 8] строится асимптотика поля напряжений вблизи точки пересечения фронта трещины с границей полупространства (точка O) в виде $\sigma = r^{\lambda} f(\lambda, \theta, \varphi)$, где под σ понимается любая из компонент тензора напряжений, а r, θ, φ — сферические координаты, причем r — расстояние от точки 0. При симметричном распределении напряжений относительно плоскости трещины (нормальный отрыв) для показателя λ получены следующие значения [7]:

μ	0	0,15	0,3	0,4	0,5
λ	—0,5	—0,4836	—0,4523	—0,4132	—0,3318

Ниже приведены аналогичные результаты для трещины поперечного сдвига [8]:

μ	0	0,15	0,3	0,4	0,5
λ	—0,5	—0,5668	—0,6073	—0,6286	—0,6462

Следовательно, только при коэффициенте Пуассона $\mu = 0$ сингулярность напряжений в точке O такая же, как и во внутренних точках фронта трещины. При $0 < \mu \leqslant 0{,}5$ для трещин нормального отрыва $\lambda > -0{,}5$,

а в случае трещин поперечного сдвига $\lambda < -0{,}5$. Отсюда следует, что КИН $K_I \to 0$, а $K_{II} \to \infty$ для точек края трещины, приближающихся к границе тела.

Порядок сингулярности напряжений для трещин, наклонно выходящих на свободную границу полупространства, исследован в работе [9].

Данные по КИН для трещин в пространственных телах приведены в гл. 6.

В случае поверхностных трещин нормального отрыва при удалении вдоль фронта трещины от границы тела K_I сначала очень сильно возрастает от нуля до некоторой величины, а затем уже медленно меняется вдоль гладкого края трещины. Поэтому при приближенном решении задачи (например, методом конечных элементов) такие резкие изменения не улавливаются и для точки выхода трещины на границу тела приводятся некоторые конечные значения K_I.

1.5. Поля напряжений у вершины трещины в неоднородном теле

В упругом неоднородном изотропном теле, в котором модуль сдвига G и коэффициент Пуассона μ представляют собой дифференцируемые функции пространственных координат, распределение напряжений и смещений у вершины трещины такое же, как и в однородном теле [10]. Некоторые задачи о трещинах в неоднородной среде, в которой модуль сдвига является непрерывной, но недифференцируемой функцией координат, будут рассмотрены в дальнейшем (см. п. 7.15). Ниже остановимся на двух случаях трещин в кусочно-однородной плоскости, когда трещина расположена вдоль линии раздела сред или выходит на эту линию.

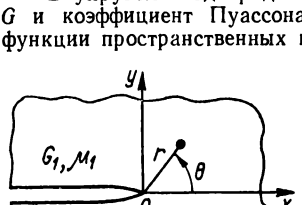


Рис. 1.6. Декартова и полярная системы координат в кусочно-однородной плоскости с полубесконечной трещиной на линии раздела сред.

Трещина на линии раздела сред. Рассмотрим полубесконечную трещину на линии соединения двух разнородных полуплоскостей с упругими постоянными G_1, μ_1 (верхняя полуплоскость) и G_2, μ_2 (нижняя полуплоскость). Величины с индексами 1 или 2 относятся соответственно к верхней или нижней полуплоскости.

Пусть на берегах трещины (рис. 1.6) отсутствуют напряжения:

$$(\sigma_\theta)_1 + i\,(\tau_{r\theta})_1 = 0 \quad (\theta = \pi), \quad (\sigma_\theta)_2 + i\,(\tau_{r\theta})_2 = 0 \quad (\theta = -\pi). \quad (1.25)$$

Будем искать общее представление функции Эри в виде [11]

$$U_j(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda_j^{(n)}+1} F_j[\lambda_j^{(n)}, \theta], \quad (1.26)$$

где $F_j[\lambda_j^{(n)}, \theta] = A_j^{(n)} \sin[\lambda_j^{(n)} + 1]\theta + B_j^{(n)} \cos[\lambda_j^{(n)} + 1]\theta + C_j^{(n)} \sin[\lambda_j^{(n)} - 1]\theta + D_j^{(n)} \cos[\lambda_j^{(n)} - 1]\theta$.

При удовлетворении граничных условий (1.25), а также условий сопряжения полуплоскостей

$$(\sigma_\theta)_1 + i\,(\tau_{r\theta})_1 = (\sigma_\theta)_2 + i\,(\tau_{r\theta})_2 \quad (\theta = 0),$$
$$(v_r)_1 + i\,(v_\theta)_1 = (v_r)_2 + i(v_\theta)_2 \quad (\theta = 0)$$

придем к однородной системе восьми линейных алгебраических уравнений. Ненулевое решение этой системы существует, если ее определитель равен нулю. Из последнего условия приходим к характеристическому уравнению для определения параметров $\lambda^{(n)} = \lambda_1^{(n)} = \lambda_2^{(n)}$ [11, 12]

$$\operatorname{ctg}^2 \pi\lambda^{(n)} + [(G_1/G_2)(1+\varkappa_2) - (1+\varkappa_1) - 2(G_1/G_2 - 1)]^2/[(G_1/G_2)(1+\varkappa_2) + (1+\varkappa_1)]^2 = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$\lambda^{(n)} = (n - 1/2) + i\varepsilon, \quad \varepsilon = (1/2\pi) \ln [(G_2\varkappa_1 + G_1)/(G_1\varkappa_2 + G_2)]. \qquad (1.27)$$

С помощью представления общего решения (1.26) с учетом равенства (1.27) можно построить асимптотические распределения напряжений и смещений в окрестности вершины трещины. Такое распределение поля напряжений в верхней полуплоскости имеет вид [11]

$$\left.\begin{aligned}
&(\sigma_r)_1 = (K_1/2\sqrt{2\pi r})\{\exp[-\varepsilon(\pi-\theta)][3\cos(\theta/2+\varepsilon\ln r) + \\
&+ 2\varepsilon\sin\theta\cos(\theta/2-\varepsilon\ln r) - \sin\theta\sin(\theta/2-\varepsilon\ln r)] - \\
&- \exp[\varepsilon(\pi-\theta)]\cos(3\theta/2+\varepsilon\ln r)\} - \\
&- (K_{II}/2\sqrt{2\pi r})\{\exp[-\varepsilon(\pi-\theta)][3\sin(\theta/2+\varepsilon\ln r) - \\
&- \sin\theta\cos(\theta/2-\varepsilon\ln r) - 2\varepsilon\sin\theta\sin(\theta/2-\varepsilon\ln r)] - \\
&- \exp[\varepsilon(\pi-\theta)]\sin(3\theta/2+\varepsilon\ln r)\} + O(r^0), \\
&(\sigma_\theta)_1 = (K_1/2\sqrt{2\pi r})\{\exp[-\varepsilon(\pi-\theta)][\cos(\theta/2+\varepsilon\ln r) - \\
&- 2\varepsilon\sin\theta\cos(\theta/2-\varepsilon\ln r) + \sin\theta\sin(\theta/2-\varepsilon\ln r)] + \\
&+ \exp[\varepsilon(\pi-\theta)]\cos(3\theta/2+\varepsilon\ln r)\} - \\
&- (K_{II}/2\sqrt{2\pi r})\{\exp[-\varepsilon(\pi-\theta)][\sin(\theta/2+\varepsilon\ln r) + \\
&+ \sin\theta\cos(\theta/2-\varepsilon\ln r) + 2\varepsilon\sin\theta\sin(\theta/2-\varepsilon\ln r)] + \\
&+ \exp[\varepsilon(\pi-\theta)]\sin(3\theta/2+\varepsilon\ln r)\} + O(r^0), \\
&(\tau_{r\theta})_1 = (K_I/2\sqrt{2\pi r})\{\exp[-\varepsilon(\pi-\theta)][\sin(\theta/2+\varepsilon\ln r) - \\
&- \sin\theta\cos(\theta/2-\varepsilon\ln r) - 2\varepsilon\sin\theta\sin(\theta/2-\varepsilon\ln r)] + \\
&+ \exp[\varepsilon(\pi-\theta)]\sin(3\theta/2+\varepsilon\ln r)\} - \\
&- (K_{II}/2\sqrt{2\pi r})\{\exp[-\varepsilon(\pi-\theta)][-\cos(\theta/2+\varepsilon\ln r) - \\
&- 2\varepsilon\sin\theta\cos(\theta/2-\varepsilon\ln r) + \sin\theta\sin(\theta/2-\varepsilon\ln r) - \\
&- \exp[\varepsilon(\pi-\theta)]\cos(3\theta/2+\varepsilon\ln r)\} + O(r^0).
\end{aligned}\right\} \qquad (1.28)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений K_I и K_{II} находятся через комплексный потенциал $\Phi_1(z)$ по формуле [13]

$$K_I - iK_{II} = 2\sqrt{2\pi}\exp(\pi\varepsilon)\lim_{z\to a}(z-a)^{1/2+i\varepsilon}\Phi_1(z),$$

когда точка $z = a$ лежит на действительной оси и в ней находится вершина трещины.

Как видно из распределения (1.28), КИН K_I и K_{II} в отличие от случая однородной среды, уже нельзя рассматривать как КИН для симметричного и кососимметричного полей напряжений. Поскольку параметры

$\lambda^{(n)}$ комплексны, напряжения при приближении к вершине трещины меняют знак бесконечное число раз. Кроме того, вблизи вершины трещины существуют участки, на которых противоположные берега трещины «взаимно проникают» один в другой, что невозможно. Поэтому решение поставленной задачи, строго говоря, не существует. Однако при некоторых ограничениях на комплексность собственных чисел $\lambda^{(n)}$ математическому решению можно придать определенный физический смысл [10]. Предложено несколько обобщенных моделей межфазных трещин, в которых сделаны попытки избежать указанных трудностей (см. гл. 7). В работе [14] исследовано напряженно-деформированное состояние у вершины межфазной трещины в кусочно-однородной плоскости, составленной из двух разнородных клиньев, соединенных между собой только вдоль одной грани.

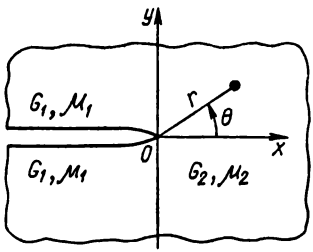


Рис. 1.7. Декартова и полярная системы координат в кусочно-однородной плоскости с полубесконечной трещиной, выходящей под прямым углом на линию раздела сред.

При продольном сдвиге кусочно-однородного тела с трещиной вдоль плоскости раздела сред распределение напряжений и смещений вблизи вершины трещины такое же, как и в случае однородной среды [11]. Однако это не так, если вершина межфазной трещины продольного сдвига находится в угловой точке линии раздела сред [15].

Трещина, перпендикулярная границе раздела различных упругих сред. Пусть на линию соединения двух различных сред под прямым углом выходит трещина нормального отрыва (рис. 1.7). Компоненты напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} вблизи вершины трещины можно представить в виде

$$\sigma = [K_I/(\sqrt{2\pi}\, r^{\lambda})]\, f(\lambda, \theta),$$

где λ — единственный действительный корень характеристического уравнения

$$2\cos\pi\lambda + 4\gamma_2(\lambda - 1)^2 - (\gamma_1 + \gamma_2) = 0, \qquad (1.29)$$

лежащий в интервале (0,1). Здесь $\gamma_1 = (\varkappa_1 G_2 - \varkappa_2 G_1)/(G_2 + \varkappa_2 G_1)$, $\gamma_2 = (G_2 - G_1)/(G_1 + \varkappa_1 G_2)$. Уравнение (1.29) впервые получено методом собственных функций в работе [16]. Эта же задача решалась также другими методами [10, 17—21]. Случай трещины, выходящей под произвольным углом на линию раздела сред, рассмотрен в работах [22, 23].

КИН K_I можно определить по формуле

$$K_I = \lim_{x \to 0} \sqrt{2\pi}\, x^{\lambda} \sigma_y(x, 0) \quad (x > 0).$$

Значения параметра λ приведены в табл. 1.1 и 1.2.

В случае трещины продольного сдвига, выходящей под прямым углом на линию раздела сред (см. рис. 1.7), асимптотические представления напряжений и смещений вблизи вершины трещины имеют вид [10]

$$\tau_{xz} + i\tau_{yz} = \begin{cases} i\,(K_{III}/\sqrt{2\pi})\, r^{-\delta} e^{\delta i\theta} & \text{при } |\theta| < \pi/2, \\ -(K_{III}\sqrt{G_1}/\sqrt{2\pi G_2})\, r^{-\delta} e^{-i\delta(\pi-\theta)} & \text{при } \pi/2 < |\theta| < \pi, \end{cases} \qquad (1.30)$$

$$w = \begin{cases} (K_{III}/(\sqrt{2\pi G_2})) r^{1-\delta} \sin[(1-\delta)\theta]/(1-\delta) \\ \qquad\qquad \text{при} \quad |\theta| < \pi/2, \\ -(K_{III}/\sqrt{2\pi G_1 G_2})\, r^{1-\delta} \cos[(1-\delta)\theta + \pi\delta]/(1-\delta) \\ \qquad\qquad \text{при} \quad \pi/2 < |\theta| < \pi, \end{cases}$$

где $\delta = (2/\pi) \operatorname{arctg} \sqrt{G_1/G_2}$.

Из формул (1.30) следует, что

$$K_{III} = \lim_{x \to 0} \sqrt{2\pi}\, x^{\delta} \tau_{yz}(x, 0) \quad (x > 0).$$

Случай трещины продольного сдвига, выходящей под произвольным углом на линию раздела сред, рассматривался в работах [15, 24].

Таблица 1.1. **Значения λ — корня характеристического уравнения (1.29) для соединений материалов [18]**

Соединение	$\frac{G_2}{G_1}$	Значение λ при	
		плоской деформации	плоском напряженном состоянии
Алюминий — жесткий материал	∞	0,2888	0,2417
Эпоксид — жесткий материал	∞	0,3203	0,2616
Эпоксид — бор	138,46	0,3234	0,2666
Эпоксид — алюминий	23,08	0,3381	0,2890
Алюминий — сталь	3,00	0,4007	0,3892
Алюминий — алюминий	1,00	0,5000	0,5000
Сталь — алюминий	0,333	0,6205	0,6210
Алюминий — эпоксид	0,043	0,8248	0,8242
Бор — эпоксид	0,0072	0,9258	0,9251

Таблица 1.2. **Значения λ — корня характеристического уравнения (1.29) для различных отношений G_2/G_1 при $\mu_2 = 0{,}3$ и $\mu_1 = 0{,}3$ или $\mu_1 = 0{,}35$ [18]**

$\frac{G_2}{G_1}$	Значение λ при			
	плоской деформации		плоском напряженном состоянии	
	$\mu_1 = 0{,}3$	$\mu_1 = 0{,}35$	$\mu_1 = 0{,}3$	$\mu_1 = 0{,}35$
1000	0,2893	0,3207	0,2424	0,2623
100	0,2939	0,3246	0,2249	0,2684
44,44	0,2999	0,3295	0,2578	0,2759
22,22	0,3013	0,3381	0,2724	0,2890
10	0,3328	0,3583	0,3033	0,3186
1,02	0,4980	0,5094	0,4979	0,5038
1,0	0,5000	0,5114	0,5000	0,5059
0,98	0,5021	0,5134	0,5022	0,5080
0,10	0,7536	0,7608	0,7513	0,7548
0,045	0,8258	0,8344	0,8230	0,8289
0,01	0,9148	0,9178	0,9130	0,9146
0,001	0,9728	0,9738	0,9722	0,9727

1.6. Связь коэффициентов интенсивности напряжений с коэффициентами концентрации напряжений

Концентрация напряжений около эллиптического отверстия. Пусть в пластине, находящейся на бесконечности под действием растягивающих и сдвигающих усилий, имеется эллиптическое отверстие со свободным от нагрузки краем (рис. 1.8). Известно точное решение задачи [3]. При двухосном растяжении пластины ($q = 0$) коэффициент концентрации напря-

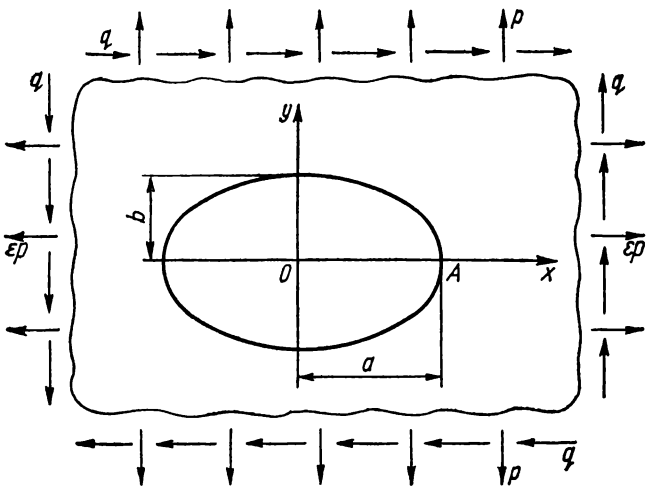


Рис. 1.8. Бесконечная плоскость с эллиптическим отверстием при действии растягивающих и сдвигающих усилий на бесконечности.

жений k на контуре отверстия в вершине большой оси эллипса (точка A) определяется по формуле

$$k(A) = \sigma_y(A)/p = 1 - \varepsilon + 2a/b. \tag{1.31}$$

Если учесть, что в точке A радиус кривизны эллипса $\rho = b^2/a$, формулу (1.31) можно записать в виде

$$k(A) = 1 - \varepsilon + 2\sqrt{a/\rho}. \tag{1.32}$$

В случае чистого сдвига пластины ($p = 0$) максимальные касательные напряжения

$$\left.\begin{aligned} &\tau_{\max} = q\,(2\eta^4 + 2m\eta^2 + \eta^6 - 3m\eta^4 - 3\eta^2 + m)\,/\,(\eta^2 - m)^3, \\ &\eta = \sqrt{[3m^2 - 4m + 3 + \sqrt{3\,(3m^2 - 2m + 3)\,(m^2 - 2m + 1)}]/2}, \\ &m = (1 - \sqrt{\rho/a})/(1 + \sqrt{\rho/a}) \end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

достигаются на оси x во внутренней точке пластины с абсциссой $x = a\,(1 + \sqrt{\rho/a})\,(\eta + m/\eta)/2$, а нормальные напряжения получают мак-

симальное значение [4]

$$\sigma_{\max} = q\sqrt{a/\rho}\,(1+\sqrt{\rho/a})^2 \tag{1.34}$$

на контуре отверстия в точке с абсциссой $x = a\sqrt{1+\rho/a}$.

При продольном сдвиге бесконечного пространства с эллиптической полостью (рис. 1.9) касательные напряжения на контуре отверстия в вершине большой оси эллипса [4]

$$\tau_{yz}(A) = \tau(1+\sqrt{a/\rho}). \tag{1.35}$$

Концентрация напряжений около узкого выреза. В случае узкого выреза (рис. 1.10) распределение напряжений около вершины выреза

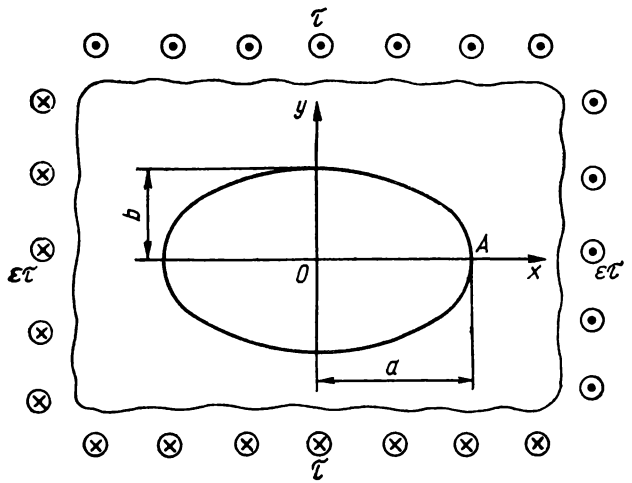


Рис. 1.9. Продольный сдвиг бесконечного тела с эллиптической полостью.

A можно выразить через коэффициенты интенсивности напряжений для трещины, в которую переходит вырез при $\rho \to 0$ [25]. При симметричном распределении напряжений относительно оси выреза имеем

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -(K_{\mathrm{I}}/\sqrt{2\pi r})\{[\rho/(2r)]\cos(3\theta/2) - \\
&- \cos(\theta/2)[1 - \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)]\} + \cdots, \\
\sigma_y &= (K_{\mathrm{I}}/\sqrt{2\pi r})\{[\rho/(2r)]\cos(3\theta/2) + \\
&+ \cos(\theta/2)[1 + \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)]\} + \cdots, \\
\tau_{xy} &= -(K_{\mathrm{I}}/\sqrt{2\pi r})\{[\rho/(2r)]\sin(3\theta/2) - \\
&- \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\cos(3\theta/2)\} + \cdots
\end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

При антисимметричном распределении напряжения около вершины выреза определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= (K_{\mathrm{II}}/\sqrt{2\pi r})\{[\rho/(2r)]\sin(3\theta/2) - \\
&- \sin(\theta/2)[2 + \cos(\theta/2)\cos(3\theta/2)]\} + \cdots,
\end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y &= -(K_{II}/\sqrt{2\pi r})\,\{[\rho/(2r)]\sin(3\theta/2) - \\ &- \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\cos(3\theta/2)\} + \cdots, \\ \tau_{xy} &= -(K_{II}/\sqrt{2\pi r})\,\{[\rho/(2r)]\cos(3\theta/2) - \\ &- \cos(\theta/2)\,[1 - \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)]\} + \cdots\end{aligned}\right\} \quad (1.37)$$

При продольном сдвиге будет

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xz} &= -(K_{III}/\sqrt{2\pi r})\sin(\theta/2) + \cdots, \\ \tau_{yz} &= (K_{III}/\sqrt{2\pi r})\cos(\theta/2) + \cdots\end{aligned}\right\} \quad (1.38)$$

В соотношениях (1.36) — (1.38) расстояние r мало по сравнению с длиной выреза и удалением его вершины от границы тела.

Из равенств (1.36) следует, что в симметричном случае максимальные нормальные напряжения достигаются в вершине выреза

$$\sigma_{max} = \sigma_y(A) \approx 2K_I/\sqrt{\pi\rho}. \quad (1.39)$$

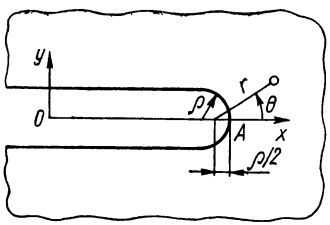


Рис. 1.10. Декартова и полярная системы координат в вершине узкого выреза.

При двухосном растяжении пластин с прямолинейной трещиной (см. рис. 1.8; $b = 0$, $q = 0$) КИН

$$K_I = p\sqrt{\pi a}. \quad (1.40)$$

Поэтому формула (1.39) дает

$$\sigma_{max} \approx 2p\sqrt{a/\rho}. \quad (1.41)$$

Сравнивая этот результат с решением (1.32), видим, что формула (1.41) является точной при двухосном растяжении пластины усилиями p ($\varepsilon = 1$), а в других случаях она дает приближенное значение σ_{max}, стремящееся к точному результату при $\rho \to 0$.

При антисимметричном распределении напряжений, как следует из соотношений (1.37), максимальные касательные напряжения

$$\tau_{max} \approx (^2/_3)\,K_{II}/\sqrt{3\pi\rho} \quad (1.42)$$

достигаются на оси выреза ($\theta = 0$) во внутренней точке пластины при $r = 3\rho/2$.

В случае чистого сдвига пластины с прямолинейной трещиной (см. рис. 1.8; $b = 0$, $p = 0$) будем иметь

$$K_{II} = q\sqrt{\pi a}. \quad (1.43)$$

Тогда из соотношения (1.42) найдем

$$\tau_{max} \approx (^2/_3)\,q\sqrt{a/(3\rho)}. \quad (1.44)$$

При малых значениях ρ равенство (1.33) принимает простую форму:

$$\tau_{max} = (^2/_3)\,q\sqrt{a/(3\rho)} + O((\rho/a)^0), \quad (1.45)$$

причем максимальные значения τ_{xy} достигаются в точке с абсциссой $x = a[1 + \rho/a + O((\rho/a)^{1/2})]$, т. е. формулы (1.44) и (1.45) имеют одинаковую асимптотическую точность при малых значениях параметра ρ/a.

Из равенств (1.38) следует, что при продольном сдвиге максимальные касательные напряжения достигаются в вершине выреза

$$\tau_{\max} = \tau_{yz}(A) \approx K_{III}/\sqrt{\pi\rho}. \tag{1.46}$$

В случае продольного сдвига бесконечного пространства с туннельной трещиной (см. рис. 1.9; $b = 0$) имеем

$$K_{III} = \tau\sqrt{\pi a}. \tag{1.47}$$

На основании формул (1.46) и (1.47) получим

$$\tau_{\max} \approx \tau\sqrt{a/\rho}.$$

Сравнивая этот результат с точным решением (1.35), видим, что при малых значениях параметра ρ/a они имеют одинаковую асимптотическую точность.

Отметим, что формулы (1.36) — (1.38), (1.39), (1.42) и (1.46) могут быть использованы при оценке напряженного состояния около вершины узкого выреза, если при аналогичном нагружении известны значения КИН для соответствующей этому вырезу трещины. Эффективность такой оценки определяется также тем, что численное решение задачи значительно проще в случае трещины, чем в случае узкого выреза. При этом, чем более узкий вырез, тем труднее получить численное решение задачи и тем точнее оценки концентрации напряжений при использовании КИН.

Формулы для определения коэффициентов интенсивности напряжений по концентрации напряжений. Из приближенных соотношений (1.39), (1.42) и (1.46) при стремлении радиуса вершины надреза к нулю получим точные равенства

$$K_I = \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{\pi\rho}\,\sigma_{\max}/2), \tag{1.48}$$

$$K_{II} = \lim_{\rho\to 0}(3\sqrt{3\pi\rho}\,\tau_{\max}/2), \tag{1.49}$$

$$K_{III} = \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{\pi\rho}\,\tau_{\max}). \tag{1.50}$$

Если учесть результат (1.43), из точного решения задачи для эллиптического отверстия (1.34) найдем [4, 26]

$$K_{II} = \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{\pi\rho}\,\sigma_{\max}). \tag{1.51}$$

Таким же путем в работах [1, 4, 26] получены формулы (1.48) и (1.50) на основе равенств (1.34), (1.40) и (1.35), (1.47).

Зависимости (1.48) — (1.51) можно использовать при определении КИН для различных конфигураций тел с трещинами с помощью известных аналитических результатов, полученных для коэффициентов концентрации напряжений.

1.7. Методы определения коэффициентов интенсивности напряжений

Обзор методов решения задач теории упругости для тел с трещинами приведен в работах [26—32]. Кратко остановимся на характеристике этих методов.

Комплексные потенциалы. В двухмерных задачах теории упругости широко используются различные представления общего решения в виде

некоторых функций комплексной переменной (комплексных потенциалов). В плоской задаче такими являются комплексные потенциалы Колосова — Мусхелишвили (см. п. 1.2). Рассмотрим с их помощью первую основную задачу для бесконечной плоскости, ослабленной прямолинейной трещиной конечной длины (рис. 1.11). Пусть на берегах трещины задана самоуравновешенная нагрузка

$$\sigma_y^{\pm} - i\tau_{xy}^{\pm} = p(x) \quad (|x| \leqslant l), \tag{1.52}$$

а на бесконечности напряжения отсутствуют. Условия (1.52) можно записать также в виде

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})^+ - (\sigma_y - i\tau_{xy})^- = 0 \quad (|x| \leqslant l), \tag{1.53}$$

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})^+ + (\sigma_y - i\tau_{xy})^- = 2p(x) \quad (|x| \leqslant l). \tag{1.54}$$

Из соотношений (1.4) для компонент напряжений σ_y и τ_{xy} получим

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}), \tag{1.55}$$

где $\Omega(z) = \overline{\Phi}(z) + \overline{\Psi}(z) + (z - \bar{z})\,\overline{\Phi}'(z)$.

При удовлетворении равенства (1.53) с учетом условий на бесконечности найдем $\Phi(z) = \Omega(z)$. Тогда из граничного условия (1.54) придем к задаче линейного сопряжения (задача Римана — Гильберта)

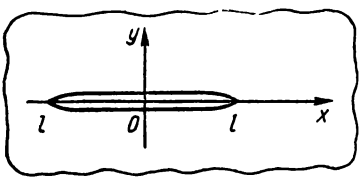


Рис. 1.11. Система декартовых координат в бесконечной плоскости с прямолинейной трещиной.

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = p(x) \quad (|x| \leqslant l) \tag{1.56}$$

для определения аналитической функции $\Phi(z)$. Введем функцию $X(z) = \sqrt{z^2 - l^2}$. Подразумевая под $X(z)$ однозначную на разрезанной вдоль отрезка $|x| \leqslant l$, $y = 0$ плоскости ветвь ($X(z)/z \to 1$ при $|z| \to \infty$), получим $X^+(x) = -X^-(x) = i\sqrt{l^2 - x^2}$ ($|x| \leqslant l$). Тогда уравнение (1.56) можно записать в виде $F^+(x) - F^-(x) = f(x)$ ($|x| \leqslant l$), где введены обозначения $F(z) = \Phi(z)\,X(z)$, $f(x) = p(x)\,X(x)$. Решение этой простейшей задачи линейного сопряжения (определение кусочно-голоморфной функции по заданному ее скачку) дается интегралом типа Коши [3]

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^{l} \frac{f(t)\,dt}{t - z} \tag{1.57}$$

при условии, что функция $F(z)$ исчезает на бесконечности. Отсюда находим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{z^2 - l^2}} \int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{l^2 - t^2}\,p(t)\,dt}{t - z}. \tag{1.58}$$

Теперь по формуле (1.12) получим КИН

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = -\frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^{l} \sqrt{\frac{l \pm t}{l \mp t}}\,p(t)\,dt, \tag{1.59}$$

где K_I^+ и K_{II}^+ относятся к правой вершине трещины ($z = l$), а K_I^- и K_{II}^- — к левой ($z = -l$).

Метод задачи линейного сопряжения применяется [3] для получения точных замкнутых решений в случае системы трещин, расположенных вдоль одной и той же прямой или вдоль одной и той же окружности.

При решении задач для коллинеарных трещин в бесконечной плоскости часто используется функция Вестергарда $Z_I(z)$, введенная в работе [33]. При этом функция напряжений Эри $U(x, y)$ ищется в виде

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \overline{Z_I(z)} + y \operatorname{Im} \overline{Z_I(z)}. \tag{1.60}$$

Тогда компоненты напряжений выражаются через $Z_I(z)$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} Z_I(z) - y \operatorname{Im} Z_I'(z), \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} Z_I(z) + y \operatorname{Im} Z_I'(z), \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z_I'(z). \end{aligned}\right\} \tag{1.61}$$

Отсюда следует, что решения, полученные с помощью функции Вестергарда $Z_I(z)$, должны удовлетворять условиям

$$\sigma_x = \sigma_y, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$

которые сильно ограничивают область применимости представлений (1.60) и (1.61).

Отметим, что функция Вестергарда является частным случаем комплексных потенциалов Колосова — Мусхелишвили: к соотношениям (1.61) можно прийти из представления (1.4), если положить

$$\Psi(z) = -z\Phi'(z), \quad \Phi(z) = (1/2) Z_I(z). \tag{1.62}$$

На основании формул (1.12) и (1.62) найдем

$$K_I = \lim_{z \to a} \sqrt{2\pi (z - a)}\, Z_I(z),$$

где точка $z = a$ является вершиной трещины.

К определению одной аналитической функции $Z_{II}(z)$ можно прийти также при антисимметричном распределении напряжений относительно оси x. Если положить в соотношениях (1.4)

$$\left.\begin{aligned} \Psi(z) &= -2\Phi(z) - z\Phi'(z), \\ \Phi(z) &= -(i/2) Z_{II}(z), \end{aligned}\right\} \tag{1.63}$$

найдем

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2\operatorname{Im} Z_{II}(z) + y \operatorname{Re} Z_{II}'(z), \\ \sigma_y &= -y \operatorname{Re} Z_{II}'(z), \\ \tau_{xy} &= \operatorname{Re} Z_{II}(z) - y \operatorname{Im} Z_{II}'(z). \end{aligned}\right\} \tag{1.64}$$

Отсюда следует, что представление (1.64) можно использовать при условии $\sigma_y = 0$ при $y = 0$. При этом для КИН K_{II} из равенств (1.13) и (1.63) следует формула

$$K_{II} = \lim_{z \to a} \sqrt{2\pi (z - a)}\, Z_{II}(z).$$

Таким образом, плоская задача теории упругости в случае коллинеарных трещин в бесконечной плоскости при симметричном и антисимметричном распределении напряжений относительно линии трещин распадается на две задачи, аналогичные задаче продольного сдвига пространства с коллинеарными трещинами.

Граничные коллокации. При решении плоских задач теории упругости для ограниченной области с прямолинейной краевой или внутренней трещиной одним из наиболее простых и эффективных методов является так называемый метод граничных коллокаций. Сущность метода заключается в определении неизвестных параметров, входящих в функцию напряжений Эри или в комплексные потенциалы, при удовлетворении граничных условий только в отдельных точках (точках коллокации). При наличии в теле трещины функцию напряжений необходимо искать в таком виде, чтобы граничные условия на берегах трещины точно удовлетворялись.

В случае свободной от нагрузки краевой трещины можно взять комплексные потенциалы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в виде (1.7), обеспечивающие выполнение граничных условий на берегах трещины, или же использовать соответствующее выражение функции напряжений Эри, данное Уильямсом [5]. При этом функцию Эри удобно представить в виде суммы $U = U_0 + U_1$, где слагаемые U_0 и U_1, соответствующие симметричному и антисимметричному распределению напряжений относительно линии трещины, имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
U_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \{(-1)^{n-1} A_{2n-1} r^{n+1/2} [-\cos(n-3/2)\theta + \\
&+ ((2n-3)/(2n+1))\cos(n+1/2)\theta] + \\
&+ (-1)^n A_{2n} r^{n+1} [-\cos(n-1)\theta + \cos(n+1)\theta]\}, \\
U_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \{(-1)^{n-1} B_{2n-1} r^{n+1/2} [\sin(n-3/2)\theta - \sin(n+1/2)\theta] + \\
&+ (-1)^n B_{2n} r^{n+1} [-\sin(n-1)\theta + \\
&+ ((n-1)/(n+1))\sin(n+1)\theta].
\end{aligned}\right\} \quad (1.65)$$

Здесь r и θ — полярные координаты с полюсом в вершине трещины. В рядах (1.65) берется конечное число членов с таким расчетом, чтобы при удовлетворении граничных условий в выбранных точках коллокаций получить замкнутую систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов A_n и B_n. После ее решения КИН находятся по формулам $K_I = -A_1\sqrt{2\pi}$, $K_{II} = B_1\sqrt{2\pi}$. Такой подход был впервые использован в работах [34—36] при определении КИН для различных образцов с краевой трещиной.

В случае внутренней прямолинейной трещины, расположенной на отрезке $|x| \leqslant l$ действительной оси, комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ можно взять в виде

$$\left.\begin{aligned}
\Phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{z^2-l^2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} D_n z^n, \\
\Omega(z) &= \frac{1}{\sqrt{z^2-l^2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} D_n z^n.
\end{aligned}\right\} \quad (1.66)$$

Как видно из равенства (1.55), представление решения задачи в виде (1.66) обеспечивает отсутствие напряжений на берегах трещины. Ограничиваясь в рядах (1.66) конечным числом членов, необходимо взять на внешней границе столько точек коллокации, чтобы получить замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов C_n и D_n при удовлетворении граничных условий в этих точках, а также условия однозначности смещений при обходе трещины

$$\varkappa \int_{\Gamma} \Phi(z)\, dz - \int_{\Gamma} \Omega(\bar{z})\, d\bar{z} = 0,$$

где Γ — любой замкнутый контур в области тела, охватывающий трещину. Если же в теле кроме трещины имеются еще другие внутренние границы (отверстия, жесткие включения), необходимо прибавить также аналогичные условия однозначности смещений (в случае отверстий) или условия равновесия (в случае жестких включений). Изложенный подход к определению КИН для внутренней трещины в ограниченной области впервые применен в работах [37—39].

Конформные отображения. Решения двухмерных задач теории упругости для ограниченной односвязной области с краевыми трещинами, а также для бесконечной плоскости, ослабленной криволинейным отверстием с краевыми трещинами или остроконечным отверстием, могут быть получены методом конформных отображений области тела S на некоторую каноническую область Σ (полуплоскость, единичный круг, бесконечная плоскость с круговым отверстием единичного радиуса). Пусть такое отображение дается однозначной функцией

$$z = \omega(\zeta) \tag{1.67}$$

комплексной переменной $\zeta = \xi + i\eta$, реализующей преобразование области Σ в плоскости ζ на область S в плоскости $z = x + iy$. Если равенство (1.67) определяет взаимно однозначное соответствие между точками областей Σ и S, то преобразование (1.67) называется конформным отображением области S на область Σ (и обратно). Формулы (1.4) в этом случае преобразуются к виду [3]

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\,[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}],$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\,\{\overline{\omega(\zeta)}\,\Phi'(\zeta)/\omega'(\zeta) + \Psi(\zeta)\},$$

$$2G(u + iv) = \varkappa\varphi(\zeta) - \omega(\zeta)\,\overline{\Phi(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)},$$

где $\Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta)$, $\Psi(\zeta) = \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta)$, $\varphi(\zeta) = \varphi[\omega(\zeta)]$, $\psi(\zeta) = \psi[\omega(\zeta)]$.

Пусть вершина трещины (или точка возврата на контуре отверстия) находится в точке $z = z_0$ области S и ей соответствует согласно отображению (1.67) точка $\zeta = \zeta_0$ области Σ. Тогда КИН определяются по формуле [29]

$$K_I - iK_{II} = 2\sqrt{2\pi} \lim_{\zeta \to \zeta_0} \sqrt{\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)}\, \varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta) =$$

$$= 2\sqrt{\pi}\, \varphi'(\zeta_0)/\sqrt{\omega''(\zeta_0)}.$$

Подробный обзор применений метода конформных отображений при определении КИН можно найти в работах [40—42].

Конформные отображения используются также как составная часть других методов решения задач теории трещин. Одним из них является модифицированный метод конформных отображений — коллокаций [41], который позволяет рассматривать многосвязные области. Проиллюстри-

руем сущность этого подхода на примере внутренней прямолинейной трещины в конечной пластине с гладкой внешней границей. Конформно отобразим внешность трещины в плоскости z на внешность единичного круга в плоскости ζ. При этом внешняя граница пластины перейдет в некоторый гладкий контур в области ζ. В результате придем к решению краевой задачи в плоскости ζ для конечной криволинейной области Σ, содержащей круговое отверстие. Последняя задача уже может быть решена методом граничной коллокации. При этом удобно для комплексных потенциалов $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ использовать такие представления, чтобы граничные условия на единичной окружности удовлетворялись тождественно, а неизвестные параметры в функциях $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ находились при удовлетворении граничных условий в точках коллокаций на внешнем контуре области Σ.

Конформные отображения применяются также в так называемом методе рядов Лорана [43]. Этот метод разработан для решения задач концентрации напряжений около эллиптических отверстий, которые в предельном случае переходят в трещины. В случае одного отверстия его внешность отображается на внешность единичного круга в плоскости ζ и комплексные потенциалы $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ ищутся в виде рядов Лорана по степеням ζ. После выполнения этих разложений переходят к представлениям функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в виде рядов Лорана по степеням z. Коэффициенты этих рядов находятся из граничных условий. В случае нескольких отверстий (трещин) комплексные потенциалы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ ищутся в виде рядов по степеням малого безразмерного параметра λ, характеризующего относительное расстояние между отверстиями, что позволяет при определении неизвестных коэффициентов этих разложений использовать решение задачи для одиночного отверстия в бесконечной плоскости. Выражения КИН также имеют вид асимптотических разложений по степеням параметра λ. С помощью этого метода решены различные плоские и антиплоские задачи о взаимодействии прямолинейных трещин в бесконечной плоскости, а также о взаимодействии прямолинейной трещины с внешней границей тела.

Интегральные преобразования. Интегральные преобразования часто используются при решении различных граничных задач теории упругости. В случае смешанных задач применение интегральных преобразований приводит к дуальным интегральным уравнениям. Поскольку некоторые задачи теории трещин можно сформулировать как смешанные, то указанный подход применим и к ним. В задачах для областей с трещинами используются интегральные преобразования Фурье, Меллина (плоские и антиплоские задачи), Ханкеля (пространственные осесимметричные задачи), Мелера — Фока (пространственные задачи с круговой линией раздела краевых условий), Конторовича — Лебедева (бесконечное пространство с трещиной в виде полуплоскости). Обзор работ по применению интегральных преобразований в задачах теории трещин имеется в работах [44—47]. Проиллюстрируем применение интегрального преобразования Фурье при решении задачи для прямолинейной трещины в бесконечной плоскости (см. рис. 1.11). Пусть на берегах трещины заданы усилия

$$\sigma_y^{\pm} = p(x) = p(-x), \quad \tau_{xy}^{\pm} = 0 \quad (|x| \leqslant l), \tag{1.68}$$

а на бесконечности напряжений нет. Учитывая симметричность задачи, из условий (1.68) придем к смешанной задаче для полуплоскости ($y \leqslant 0$)

$$\sigma_y = p(x) \quad (|x| < l); \quad v = 0 \quad (|x| \geqslant l); \quad \tau_{xy} = 0 \quad (-\infty < x < \infty). \tag{1.69}$$

Воспользуемся построенным с помощью интегрального преобразования Фурье решением первой основной задачи для полуплоскости, на крае

которой $\tau_{xy} = 0$, а $\sigma_y = \sigma(x) = \sigma(-x)$:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{\sigma}(s)\,(1 - |s|y)\,e^{|s|y}\cos(sx)\,ds, \\ v &= \frac{2}{\pi E}\int_0^\infty \tilde{\sigma}(s)\,[2 - (1+\mu)|s|y]\,e^{|s|y}\cos(sx)\,\frac{ds}{s}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.70)$$

где $\tilde{\sigma}(s) = \int_0^\infty \sigma(x)\cos(sx)\,dx$.

При удовлетворении граничных условий (1.69) с помощью представления (1.70) придем к дуальным интегральным уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{\sigma}(s)\cos(sx)\,ds = p(x) \quad (0 < x < l), \\ &\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{\sigma}(s)\cos(sx)\,\frac{ds}{s} = 0 \quad (l < x < \infty). \end{aligned}\right\} \qquad (1.71)$$

Сделав замену

$$\frac{2}{\pi}\frac{\tilde{\sigma}(s)}{s} = \int_0^l f(t)\,J_0(ts)\,dt,$$

где $J_0(ts)$ — функция Бесселя первого рода, приведем дуальные интегральные уравнения (1.71) к интегральному уравнению Абеля $\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = p(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$, решением которого является функция $f(x) = \frac{2x}{\pi} \times$

$$\times \int_0^x \frac{p(u)\,du}{\sqrt{x^2 - u^2}}.$$

Для КИН получаем выражение

$$K_I = -\sqrt{\pi/l}\,f(l) = -2\sqrt{\frac{l}{\pi}}\int_0^l \frac{p(x)\,dx}{\sqrt{l^2 - x^2}},$$

которое согласуется с решением (1.59), если учесть, что $p(x)$ — четная функция.

В некоторых задачах вместо представления решения в форме интегралов Фурье вида (1.70) используются решения в рядах Фурье. Тогда при удовлетворении смешанных граничных условий получаются дуальные уравнения — ряды. Возможны также обобщения этих уравнений — дуальные интегральные уравнения — ряды.

Сингулярные интегральные уравнения (СИУ). Дуальные интегральные уравнения могут быть сведены к СИУ. Однако краевые задачи теории упругости для тел с трещинами прямо приводятся к СИУ при использовании функций Грина, дислокаций или фундаментальных решений. Таким образом могут рассматриваться как двухмерные, так и пространствен-

ные задачи в общем случае конфигураций трещин и формы тела. Преимущества метода СИУ состоят также в относительной простоте численного решения последних. Решим краевую задачу (1.52) для прямолинейной трещины в бесконечной плоскости методом СИУ.

Рассмотрим вспомогательную задачу, когда на разрезе заданы скачки напряжений и смещений

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})^+ - (\sigma_y - i\tau_{xy})^- = 0 \quad (|x| \leqslant l), \tag{1.72}$$

$$(\partial/\partial x)\,[(u + iv)^+ - (u + iv)^-] = i(\varkappa + 1)\,g'(x)/(2G) \quad (|x| \leqslant l), \tag{1.73}$$

а на бесконечности напряжения отсутствуют. Условия (1.72) при использовании соотношения (1.55) приводят к равенству $\Phi(z) = \Omega(z)$, а из условия (1.73) при учете формулы

$$2G\,(\partial/\partial x)\,(u + iv) = \varkappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\,\overline{\Phi'(z)}$$

придем к задаче сопряжения

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = ig'(x) \quad (|x| \leqslant l), \tag{1.74}$$

решение которой, следуя соотношению (1.57), запишем в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} \frac{g'(t)\,dt}{t - z}\,. \tag{1.75}$$

Это значение $\Phi(z)$ можно рассматривать как интегральное представление решения задачи через производную скачка вектора перемещений на контуре трещины и использовать его при решении исходной задачи.

Удовлетворяя граничное условие (1.54) с помощью представления (1.75), придем к СИУ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} \frac{g'(t)\,dt}{t - x} = p(x) \quad (|x| \leqslant l) \tag{1.76}$$

относительно функции $g'(t)$. Единственное решение этого уравнения в классе функций, имеющих интегрируемые особенности на концах интервала, существует при условии

$$\int_{-l}^{l} g'(t)\,dt = 0, \tag{1.77}$$

которое обеспечивает однозначность смещений при обходе контура трещины. Уравнение (1.76) можно также записать в виде задачи сопряжения (1.56), решение которой дается соотношением (1.58). В более общем случае это решение имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{z^2 - l^2}}\int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{l^2 - t^2}\,p(t)\,dt}{t - z} + \frac{C_1}{\sqrt{z^2 - l^2}}\,,$$

где C_1 — произвольная комплексная постоянная. Функция $g'(x)$ теперь находится из равенства (1.74)

$$g'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{l^2 - x^2}}\left[-\int_{-l}^{l}\frac{p(t)\sqrt{l^2 - t^2}}{t - x}\,dt + C\right]. \qquad (1.78)$$

При удовлетворении условия (1.77) определяется постоянная $C = 0$.

КИН выражается непосредственно через функцию $g'(x)$ по формуле

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = \mp \lim_{x \to \pm l} \sqrt{\pi (l^2 - x^2)/l}\, g'(x). \qquad (1.79)$$

Подставив в равенство (1.79) решение (1.78), придем к результату (1.59).

Последовательное применение метода СИУ в задачах теории трещин реализовано в работах [48—52]. В задачах теории трещин находят применение также интегральные уравнения Фредгольма второго рода. К ним сводятся дуальные интегральные уравнения, а также СИУ после их регуляризации. В некоторых частных случаях регулярные интегральные уравнения можно получить непосредственно из краевой задачи (см., например, [53]).

Метод Винера — Хопфа. В некоторых случаях задачи теории трещин (полубесконечная прямолинейная трещина в полосе, краевая трещина в бесконечном клине или полуплоскости) приводятся к интегральному уравнению на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. Такие уравнения принято называть уравнениями Винера — Хопфа. С помощью интегрального преобразования Фурье они приводятся к функциональному уравнению

$$A(\alpha)\,\Phi_+(\alpha) + B(\alpha)\,\Phi_-(\alpha) + C(\alpha) = 0, \qquad (1.80)$$

где $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ и $C(\alpha)$ — заданные функции комплексного аргумента $\alpha = \beta + i\gamma$, аналитические в полосе $\gamma_- < \gamma < \gamma_+$. Неизвестные функции $\Phi_+(\alpha)$ и $\Phi_-(\alpha)$ аналитичны в полуплоскостях $\gamma > \gamma_-$ и $\gamma < \gamma_+$ соответственно. К уравнению (1.80) можно прийти также непосредственно от краевой задачи с помощью интегральных преобразований. Его решение находится в квадратурах методом факторизации [54]. Метод Винера — Хопфа в задачах теории трещин впервые использован в работах [55—58].

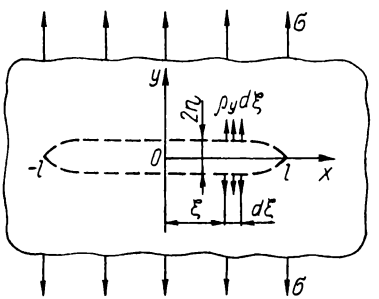


Рис. 1.12. Схема решения задачи о трещине методом объемных сил.

Метод объемных (массовых) сил. Задачи теории упругости для тела с трещинами можно решать также, полагая, что в сплошном теле без трещин действуют на берегах воображаемых трещин пары объемных сил, распределенных по некоторому закону. Задача состоит в нахождении такого распределения объемных сил, чтобы напряженно-деформированное состояние в сплошном теле было таким же, как в теле с трещинами. Метод объемных сил [59] используется как в плоских, так и в пространственных задачах. Рассмотрим его применение на примере бесконечной плоскости с прямолинейной трещиной. Будем считать, что в растягиваемой на бесконечности сплошной плоскости имеется некоторая вообра-

жаемая трещина, на берегах которой при $x = \xi$ действует пара объемных сил (рис. 1.12), причем их распределение вдоль трещины дается зависимостью

$$\rho_y 2\eta = 4\sigma \sqrt{l^2 - \xi^2} \quad (|\xi| \leqslant l).$$

Тогда напряжения σ_y вдоль оси x определяются по формуле

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{l^2 - \xi^2}\, d\xi}{(\xi - x)^2} + \sigma.$$

После интегрирования получаем

$$\sigma_y(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant l, \\ \sigma |x| / \sqrt{x^2 - l^2} & \text{при } x > l, \end{cases}$$

т. е. распределение напряжений σ_y вдоль оси x точно такое же, как и в растягиваемой на бесконечности плоскости со свободной от нагрузки трещиной. В более общем случае распределение объемных сил ищут в виде

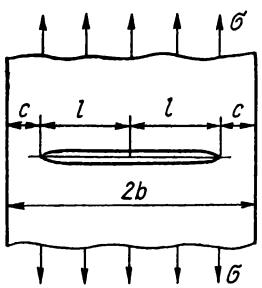


Рис. 1.13. Схема растяжения бесконечной полосы с центральной поперечной трещиной.

$$\rho_y 2\eta = 4f(\xi) \sqrt{l^2 - \xi^2},$$

где неизвестную весовую функцию $f(\xi)$ необходимо определить таким образом, чтобы возникающие напряжения удовлетворяли граничным условиям на берегах трещины.

Альтернативный метод. Этот метод также называют алгоритмом Шварца или методом последовательных приближений. Он применяется в случае областей, ограниченных несколькими контурами (например, трещина и внешняя граница). Задача решается поэтапно, причем на каждом этапе поочередно рассматриваются области, ограниченные только одним контуром. Альтернативный метод используется в самых различных задачах теории трещин. С его помощью часто легко получить приближенные оценки для КИН, если ограничиться только одним или несколькими приближениями.

Асимптотическая аппроксимация. Во многих задачах можно построить асимптотические разложения для КИН при малых значениях некоторых безразмерных параметров. На основе этих решений иногда удается получить замкнутые приближенные формулы для КИН, которые можно использовать при любых значениях параметров задачи. Проиллюстрируем этот подход на примере растяжения бесконечной полосы с центральной поперечной трещиной (рис. 1.13). Запишем КИН в виде

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \sqrt{b/c}\, f(l/b).$$

Известны асимптотические разложения функции $f(l/b)$:

$$f(l/b) = 1 - (1/2)(a/b) + O(a/b)^2 \quad \text{при} \quad a/b \to 0,$$

$$f(l/b) = 0{,}826 \quad \text{при} \quad c/b \to 0 \quad (\text{или } l/b \to 1).$$

Тогда замкнутое приближенное выражение для функции $f(l/b)$ можно взять в форме [60]

$$f(l/b) = 1 - (1/2)(a/b) + 0{,}326\,(a/b)^2.$$

Применению асимптотических аппроксимаций к различным задачам теории трещин посвящена работа [60]. Отметим, что к этому методу близок так называемый метод граничной интерполяции [50].

Метод конечных элементов (МКЭ). Одним из наиболее общих методов решения краевых задач механики сплошной среды является метод конечных элементов. Он основан на разбиении тела на малые, но конечные элементы, которые соединены между собой только в узловых точках. Перемещения внутри каждого элемента аппроксимируются простой функцией координат таким образом, чтобы они выражались через перемещения узловых точек. Через узловые перемещения можно также выразить силы взаимодействия между элементами. В результате краевая задача сводится к определению неизвестных перемещений узлов из системы линейных алгебраических уравнений. Существуют различные варианты МКЭ. Эти методы эффективны при решении задач для областей с достаточно гладкой границей, а также при определении различных интегральных характеристик. Однако в задачах теории трещин границы не являются всюду гладкими. Поэтому метод конечных элементов необходимо модифицировать с тем, чтобы учесть особенность решения в вершине трещины. Это приводит к его существенному усложнению. Подробное изложение методов конечных элементов в задачах теории трещин дано в [32, 61].

ГЛАВА 2

БЕСКОНЕЧНЫЕ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНАМИ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

2.1. Прямолинейная трещина конечной длины

Произвольная несамоуравновешенная нагрузка на берегах трещины. Бесконечная пластина ослаблена прямолинейной трещиной длины $2l$, занимающей отрезок $|x| \leqslant l$, $y = 0$ оси x. Напряжения на бесконечности отсутствуют, а на берегах трещины заданы компоненты напряжений $\sigma_y^+(x, 0)$, $\tau_{xy}^+(x, 0)$, $\sigma_y^-(x, 0)$ и $\tau_{xy}^-(x, 0)$ (рис. 2.1). КИН у вершин трещины определяются по формуле [1—3]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \left[\int_{-l}^{l} \sqrt{\frac{l \pm x}{l \mp x}}\, p(x)\, dx \pm i \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \int_{-l}^{l} q(x)\, dx \right], \quad (2.1)$$

где

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= (1/2)\,[\sigma_y^+(x, 0) + \sigma_y^-(x, 0)] - \\ &- (i/2)\,[\tau_{xy}^+(x, 0) + \tau_{xy}^-(x, 0)], \\ q(x) &= (1/2)\,[\sigma_y^+(x, 0) - \sigma_y^-(x, 0)] - \\ &- (i/2)\,[\tau_{xy}^+(x, 0) - \tau_{xy}^-(x, 0)]. \end{aligned}\right\} \quad (2.2)$$

Здесь и в дальнейшем величины $K_{\mathrm{I}}^{\pm}$ и $K_{\mathrm{II}}^{\pm}$ с нижним знаком относятся к левой вершине трещины ($x = -l$), а с верхним — к правой ($x = l$). С помощью формулы (2.1) находятся коэффициенты интенсивности при любой нагрузке, действующей как на берегах трещины, так и во внутренних точках пластины или на бесконечности.

Если нагрузка приложена только к верхнему берегу трещины ($\sigma_y^-(x, 0) = \tau_{xy}^-(x, 0) = 0$), имеем [4]

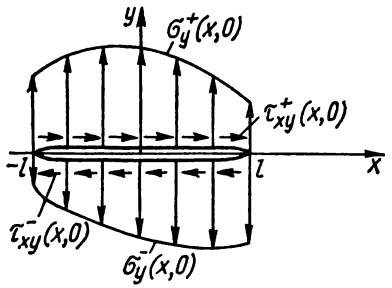
$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}}^{\pm} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi l}} \left[\int_{-l}^{l} \sqrt{\frac{l \pm x}{l \mp x}}\, \sigma_y^+(x, 0)\, dx \pm \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \int_{-l}^{l} \tau_{xy}^+(x, 0)\, dx \right], \\ K_{\mathrm{II}}^{\pm} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi l}} \left[\int_{-l}^{l} \sqrt{\frac{l \pm x}{l \mp x}}\, \tau_{xy}^+(x, 0)\, dx \mp \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \int_{-l}^{l} \sigma_y^+(x, 0)\, dx \right]. \end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

В случае самоуравновешенной нагрузки коэффициенты интенсивности определяются по формуле (2.1), в которой отсутствует второе сла-

гаемое. В частности, если трещина находится под действием симметричной нормальной ($\sigma_y^+(x, 0) = \sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y(x, 0)$) и антисимметричной сдвигающей ($\tau_{xy}^+(x, 0) = \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}(x, 0)$) нагрузок, то

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^{l} [\sigma_y(x, 0) - i\tau_{xy}(x, 0)] \sqrt{\frac{l \pm x}{l \mp x}}\, dx. \quad (2.4)$$

Постоянная нагрузка на внутреинем участке верхнего берега трещины. Когда на верхнем берегу трещины на участке $b \leqslant x \leqslant c$ приложены по-



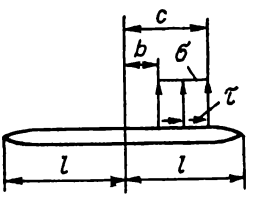


Рис. 2.1. Действие произвольной нагрузки на берегах трещины.

Рис. 2.2. Действие постоянной нагрузки на внутреннем участке верхнего берега трещины.

стоянные нормальные (σ) и сдвигающие (τ) усилия (рис. 2.2), то КИН равны [5]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = (1/2)(\sigma - i\tau)\sqrt{l/\pi}\,[\arcsin(c/l) - \arcsin(b/l) \mp$$

$$\mp \sqrt{1 - (c/l)^2} \pm \sqrt{1 - (b/l)^2} \pm (i/l)(c - b)(\varkappa - 1)/(\varkappa + 1)].$$

Симметричное нагружение концевых участков трещины постоянными нормальными усилиями. При действии на трещине постоянной нормальной нагрузки интенсивностью σ на участках, примыкающих к вершинам трещины (рис. 2.3), КИН K_{I} ($K_{\mathrm{II}} = 0$) определяется по формуле [6]

$$K_{\mathrm{I}} = \sigma\sqrt{\pi l}\,[1 - (2/\pi)\arcsin(a/l)].$$

Симметричное нагружение трещины линейной нормальной нагрузкой. Пусть берега трещины находятся под действием симметричной нормальной нагрузки, линейно распределенной по длине трещины (рис. 2.4). Тогда на правом конце [7] $K_{\mathrm{I}}^{+} = (3/4)\sigma\sqrt{\pi l}$, $K_{\mathrm{II}}^{+} = 0$, на левом конце $K_{\mathrm{I}}^{-} = (1/4)\sigma\sqrt{\pi l}$, $K_{\mathrm{II}}^{-} = 0$.

Постояиная иагрузка на берегах трещиины. При действии на берегах трещины постоянной нормальной (σ) и сдвигающей (τ) нагрузки (рис. 2.5) имеем [7, 8] $K_{\mathrm{I}} = \sigma\sqrt{\pi l}$, $K_{\mathrm{II}} = \tau\sqrt{\pi l}$.

Нагружение берегов трещины сосредоточенными силами и моментами. Когда на верхнем берегу трещины в точке, удаленной от центра трещины

на расстояние b, приложены сосредоточенные нормальная P и сдвигающая Q силы, а также момент M (рис. 2.6), то [2, 4, 9]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = (1/(2\sqrt{\pi l}))\{(P - iQ)[\sqrt{(l \pm b)/(l \mp b)} \pm$$

$$\pm i(\varkappa - 1)/(\varkappa + 1)] \pm Ml/((l \mp b)\sqrt{l^2 - b^2})\}. \qquad (2.5)$$

Если, кроме того, на нижнем берегу трещины в симметричной точке приложены такие же по величине силы P, Q и момент M, но противо-

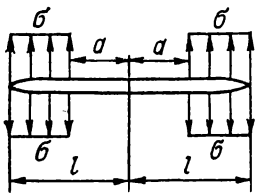


Рис. 2.3. Действие постоянных нормальных усилий на симметричных концевых участках трещины.

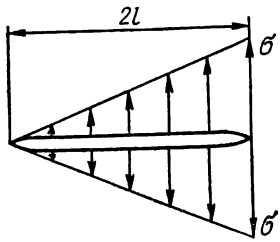


Рис. 2.4. Действие линейной нормальной нагрузки на берегах трещины.

положные по направлению (штриховые линии), КИН равны [7, 10]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = (1/\sqrt{\pi l})[(P - iQ)\sqrt{(l \pm b)/(l \mp b)} \pm Ml/((l \mp b)\sqrt{l^2 - b^2})]. \qquad (2.6)$$

Пусть на верхнем берегу трещины в точках, удаленных от центра трещины на расстояние b, действуют две равные нормальные сосредоточенные силы P (рис. 2.7). Тогда [6]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} = P\sqrt{l}/\sqrt{\pi(l^2 - b^2)}, \quad K_{\mathrm{II}}^{\pm} = \pm (P/\sqrt{\pi l})(\varkappa - 1)/(\varkappa + 1).$$

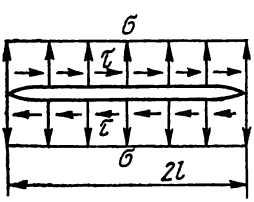


Рис. 2.5. Действие постоянной нагрузки на берегах трещины.

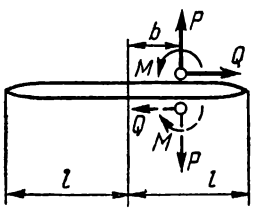


Рис. 2.6. Действие на берегах трещины сосредоточенных сил и моментов.

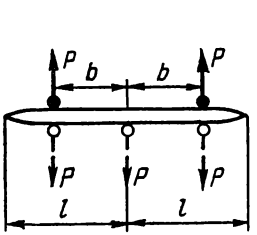
Если, кроме того, на нижнем берегу трещины в двух симметричных точках приложены такие же по величине силы P, но противоположные по направлению (штриховые линии), КИН K_{I} ($K_{\mathrm{II}} = 0$) определяется по формуле [10]

$$K_{\mathrm{I}} = 2P\sqrt{l}/\sqrt{\pi(l^2 - b^2)}.$$

При действии на верхнем берегу трещины двух сил P, а на нижнем трех сил P (см. рис. 2.7), имеем [6]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} = (P/(2\sqrt{\pi l}))\,(1 + 2l/\sqrt{l^2 - b^2}),\quad K_{\mathrm{II}}^{\pm} = \pm\,(P/(2\sqrt{\pi l}))\,(\varkappa - 1)\,(\varkappa + 1).$$

Действие сосредоточенной нагрузки во внутренних точках пластины с трещиной. Пусть в произвольной точке (x_0, y_0) пластины действуют



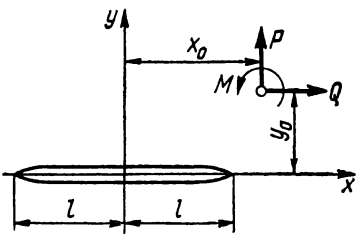


Рис. 2.7 Действие на берегах трещины нескольких нормальных сосредоточенных сил.

Рис. 2.8. Действие сосредоточенных сил и момента в произвольной точке пластины с трещиной.

сосредоточенные силы P, Q и сосредоточенный момент M (рис. 2.8). Тогда [11]

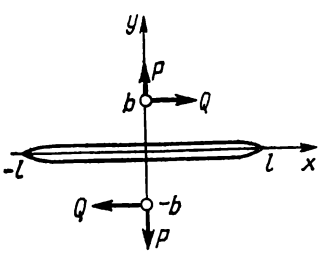
$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = (1/(2\,(1+\varkappa)\sqrt{\pi l}))\,\{(Q + iP)\,[(l \pm z_0)/\sqrt{z_0^2 - l^2} -$$

$$- \varkappa\,(l \pm \bar{z}_0)/\sqrt{\bar{z}_0^2 - l^2} \mp (1 - \varkappa)] + [l\,(Q - iP)\,(\bar{z}_0 - z_0) +$$

$$+ il\,(\varkappa + 1)\,M]/[(\bar{z}_0 \mp l)\sqrt{\bar{z}_0^2 - l^2}]\}, \qquad (2.7)$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$, $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$; под функцией $\sqrt{z^2 - l^2}$ подразумевается та ветвь, которая удовлетворяет при $z \to \infty$ условию $\sqrt{z^2 - l^2}/z \to$ $\to 1$. Соотношение (2.7) проиллюстрировано многочисленными графиками в работе [12].

С помощью выражений (2.1) — (2.7) можно определить коэффициенты интенсивности напряжений для бесконечной



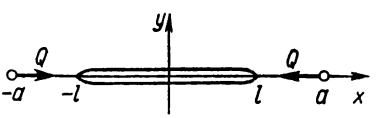


Рис. 2.9. Действие противоположно направленных растягивающих и сдвигающих сосредоточенных сил в двух симметричных точках.

Рис. 2.10. Сжатие пластины с трещиной двумя сосредоточенными силами.

пластины с одной прямолинейной трещиной при любом распределении объемных и поверхностных нагрузок (включая распределенные моментные нагрузки). В частности, если в точках $(0, b)$ и $(0, -b)$ действуют противоположно направленные сосредоточенные силы P и Q (рис. 2.9), из

формулы (2.7) найдем [2, 13]

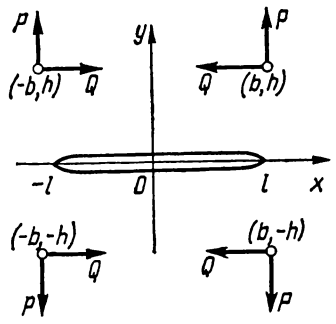
$$K_I = P\sqrt{l}\,[1 + \varkappa + 2b^2/(l^2 + b^2)]/[(1 + \varkappa)\sqrt{\pi\,(l^2 + b^2)}],$$

$$K_{II} = Q\sqrt{l}\,[1 + \varkappa - 2b^2/(l^2 + b^2)]/[(1 + \varkappa)\sqrt{\pi\,(l^2 + b^2)}].$$

При сжатии пластины вдоль линии трещины двумя сосредоточенными силами Q (рис. 2.10) КИН равны [14]

$$K_I = (Q\sqrt{l}/\sqrt{\pi\,(a^2 - l^2)})\,(\varkappa - 1)/(\varkappa + 1) \quad (a > l),$$

$$K_{II} = 0.$$



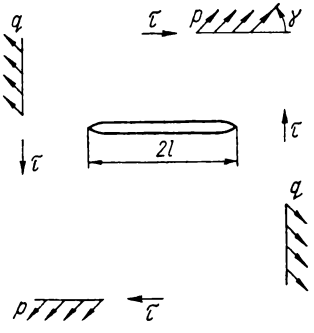


Рис. 2.11. Действие сосредоточенных сил в четырех симметричных точках.

Рис. 2.12. Действие растягивающей и сдвигающей нагрузки на бесконечности.

Пусть в четырех симметричных точках (b, h), $(-b, h)$, $(-b, -h)$ и $(b, -h)$ действуют сосредоточенные силы $(-Q, P)$, (Q, P), $(Q, -P)$ и $(-Q, -P)$ соответственно (рис. 2.11). КИН определяются по формулам [15]

$$K_I = 2\sqrt{l/\pi}\,\{(Q/(\varkappa + 1))\,\mathrm{Im}\,[(\varkappa - 1)\,(l^2 - \nu^2)^{-1/2} + 2ih\nu\,(l^2 - \nu^2)^{-3/2}] +$$

$$+ P\,\mathrm{Re}\,[(l^2 - \nu^2)^{-1/2} - 2ih\nu\,(l^2 - \nu^2)^{-3/2}/(\varkappa + 1)]\},$$

$$K_{II} = 0,$$

где $\nu = b + ih$.

Растягивающая и сдвигающая нагрузка на бесконечности. Когда пластина подвергнута на бесконечности растяжению внешними напряжениями p и q, действующими во взаимно перпендикулярных направлениях, причем напряжения p направлены под углом γ к линии трещины, а также сдвигу напряжениями τ (рис. 2.12), то [5, 8]

$$K_I = (1/2)\,[p + q - (p - q)\cos 2\gamma]\sqrt{\pi l},$$

$$K_{II} = [\tau + (p - q)\sin\gamma\cos\gamma]\sqrt{\pi l}.$$

Сжимающая нагрузка на бесконечности. Пластина с трещиной находится в поле сжимающих нагрузок (рис. 2.13), т. е. берега трещины-разреза соприкасаются между собой по всей длине. Если принять, что закон взаимодействия берегов разреза имеет вид $\tau_{xy} = -k_0 + \rho_0\sigma_y$ $(\sigma_y < 0,$

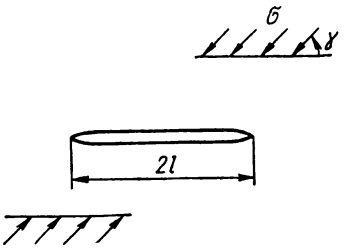
$\gamma < \pi/2$), где k_0 и ρ_0 — постоянные сухого (кулонова) трения, то [7, 8]

$$K_I = 0, \quad K_{II} = \sigma \sqrt{\pi l}\,[(k_0/\sigma - \rho_0) + (1/2)(\sin 2\gamma + \rho_0 \cos 2\gamma)].$$

Расклинивание бесконечного тела клином конечной длины. Бесконечное тело содержит трещину вдоль отрезка $|x| \leqslant l$ оси x. Берега трещины раскрываются жестким тонким включением (рис. 2.14), форма которого в зоне контакта $|x| \leqslant b$ описывается уравнением

$$y = \pm f(x) \quad (f(x) > 0 \text{ и } f''(x) < 0) \quad \text{при} \quad |x| \leqslant b$$

(оси x и y — оси симметрии включения).



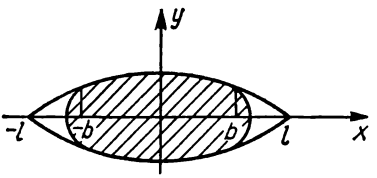


Рис. 2.13. Действие сжимающей нагрузки на бесконечности.

Рис. 2.14. Расклинивание тела тонким симметричным клином произвольной формы.

Между включением и берегами трещины имеет место гладкий контакт (отсутствуют касательные напряжения). Остальная часть трещины свободна от нагрузки. КИН в вершинах трещины равны [16, 17]

$$K_I = -\frac{8G}{1+\varkappa}\sqrt{\frac{l^2-b^2}{\pi l}}\left[\int_0^b \frac{xf'(x)\,dx}{\sqrt{(l^2-x^2)(b^2-x^2)}} + \frac{\pi a_2}{2(l^2-b^2)}\right],$$

$$K_{II} = 0,$$

где

$$a_2 = -\frac{l}{K(k)}\left[f(b-0) + \frac{2}{\pi}\int_b^l\int_b^l \sqrt{\frac{(x^2-b^2)(l^2-x'^2)}{(l^2-x^2)(x'^2-b^2)}}\,\frac{x'g(x')\,dxdx'}{x'^2-x^2}\right],$$

$$g(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^b \frac{x'f'(x')\,dx'}{x'^2-x^2},$$

$K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $k = \sqrt{1-b^2/l^2}$ $(b < l)$.

Длину зоны контакта $2b$ (для случая закругленных концов), если заранее известна длина трещины $2l$, находят из уравнения

$$\frac{\pi a_1}{2(l^2-b^2)} = \int_0^b \frac{xf'(x)\,dx}{\sqrt{(l^2-x^2)(b^2-x^2)}},$$

$$a_1 = -\frac{l}{K(k)}\left[f(b-0) + \frac{2}{\pi}\int_b^l\int_b^l \sqrt{\frac{(x'^2-b^2)(l^2-x^2)}{(l^2-x'^2)(x^2-b^2)}}\,\frac{x'g(x')\,dxdx'}{x'^2-x^2}\right].$$

В частности, если

$$f(x) = a^2 - x^2, \quad a \leqslant l,$$

имеем

$$K_I = -8Glk^{-2}/((1+\varkappa)K(k))\sqrt{(l^2-b^2)/(\pi l)}\,[K(k)E(k') - E(k)E(k') - k^2K(k)K(k') + (\pi/2)\,|1-a^2/l^2|],$$

где $E(k')$ —полный эллиптический интеграл второго рода и $k'^2 = 1 - k^2$. Постоянная b находится через l (или l через b) из уравнения

$$(\pi/2)(l^2-b^2)^{-1}\{l^2 - a^2 - (2/\pi)l^2[E(k)E(k') + k^2K(k)K(k') - K(k)E(k')]\} = 2[K(k)E(k') - K(k)K(k')].$$

Пусть берега трещины раскрываются ромбовидным включением (рис. 2.15), когда $f(x) = \varepsilon - |x|\operatorname{ctg}\alpha$. Тогда [18]

$$K_I = (4G\sqrt{\pi l}/((1+\varkappa)\sqrt{l^2-b^2}))\{\varepsilon/K(k) - (2b/\pi)\operatorname{ctg}\alpha - (l/\pi)\operatorname{ctg}\alpha\,[E(k)/K(k) - 1]\ln((l+b)/(l-b))\}.$$

Длина зоны контакта определяется из уравнения

$$\pi l\varepsilon - 2lbK(k)\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha\,|b^2K(k) - l^2E(k)|\ln((l+b)/(l-b)) = 0.$$

Пусть тело расклинивается жесткой полосой постоянной толщины $2h$ и длины $2b$. На бесконечности тело находится под действием одноосного растяжения напряжениями σ (рис. 2.16). Тогда [19]

$$K_I = (\sqrt{\pi l}/\sqrt{l^2-b^2})\{\sigma l\,|1 - E(k)/K(k)| + 4Gh/((\varkappa+1)K(k))\}, \quad (2.8)$$

причем напряжение σ должно удовлетворять условию $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, где $\sigma_1 = -4Gh\{l(1+\varkappa)\,[K(k) - E(k)]\}^{-1}$, $\sigma_2 = 4Gh\,[l(1+\varkappa)\,E(k)]^{-1}$. При $\sigma > \sigma_2$ происходит разделение контактных поверхностей в центре расклинивающей полосы, а при $\sigma < \sigma_1$ имеет место контакт берегов трещины в окрестностях ее вершин. По формуле (2.8) выражается также коэффициент интенсивности в случае, когда на бесконечности отсутствует нагрузка, а берега трещины вне прямоугольного клина находятся под действием постоянного давления σ [18]. При этом [9] $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_3$, где $\sigma_3 = 4Ghl\{(1+\varkappa) \times \times l^2E(k) - b^2K(k)]\}^{-1}$. При $\sigma > \sigma_3$ происходит разделение контактных поверхностей по краям клина, а при $\sigma < \sigma_1$ имеет место контакт берегов трещины в окрестностях ее вершин. Раскрытие прямолинейной трещины двумя симметричными клиньями произвольной формы рассмотрено в [20].

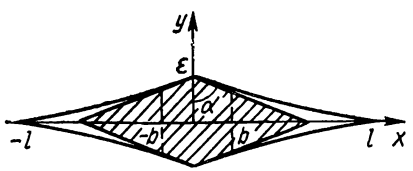


Рис. 2.15. Расклинивание тела ромбовидным клином.

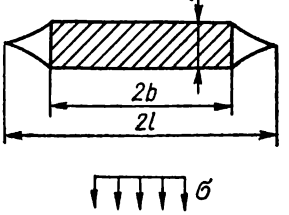


Рис. 2.16. Расклинивание тела клином постоянной толщины.

Данные для КИН в случае анизотропной бесконечной пластины с прямолинейной трещиной конечной длины при действии различных на-

грузок приведены в работах [5, 7, 21—23]. Если внешние нормальные и касательные усилия, приложенные к берегам трещины, симметричны относительно линии трещины, то КИН K_I и K_{II} совпадают с соответствующими коэффициентами K_I и K_{II} для изотропного тела. Этот вывод справедлив также в случае системы коллинеарных трещин в анизотропной пластине.

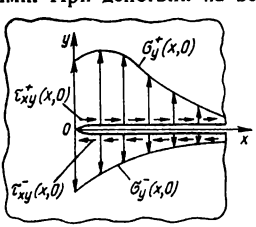
2.2. Прямолинейная полубесконечная трещина

Произвольная несамоуравновешенная нагрузка на берегах трещины. Пусть бесконечная пластина ослаблена полубесконечной трещиной, занимающей положительную полуось x ($x \geqslant 0$, $y = 0$). На берегах разреза заданы компоненты напряжений $\sigma_y^{\pm}(x, 0)$ и $\tau_{xy}^{\pm}(x, 0)$ (рис. 2.17). Тогда [2]

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sigma_y^+(x, 0) + \sigma_y^-(x, 0)}{\sqrt{x}}\, dx,$$
$$K_{II} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\tau_{xy}^+(x, 0) + \tau_{xy}^-(x, 0)}{\sqrt{x}}\, dx. \qquad (2.9)$$

Здесь предполагается, что функции $\sigma_y^{\pm}(x, 0)$ и $\tau_{xy}^{\pm}(x, 0)$ такие, что интегралы в формулах (2.9) сходятся.

Симметричное нагружение концевого участка трещины постоянными усилиями. При действии на верхнем и нижнем берегах трещины постоян-



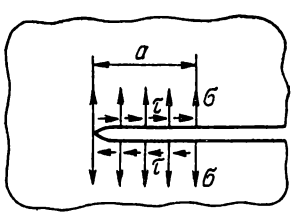


Рис. 2.17. Действие произвольной нагрузки на берегах полубесконечной трещины.

Рис. 2.18. Действие постоянной нормальной нагрузки на концевом участке полубесконечной трещины.

ной нормальной и сдвигающей нагрузок интенсивностью σ и τ на участке, примыкающем к вершине трещины (рис. 2.18), КИН равны [7, 9]

$$K_I = 2\sigma\sqrt{2a/\pi},\ K_{II} = 2\tau\sqrt{2a/\pi}.$$

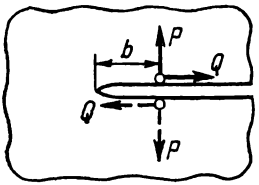
Нагружение берегов трещины сосредоточенными нормальными и сдвигающими силами. Если на верхнем берегу трещины в точке, удаленной от вершины на расстояние b, действуют сосредоточенные нормальная P и сдвигающая Q силы (рис. 2.19), то [2, 5, 11]

$$K_I = P/\sqrt{2\pi b},\ K_{II} = Q/\sqrt{2\pi b}.$$

Если и на нижнем берегу трещины действуют такие же силы P и Q, но противоположного направления (см. рис. 2.19), имеем [2, 5]

$$K_I = P\sqrt{2/\pi b},\ K_{II} = Q\sqrt{2/\pi b}.$$

Нагружение сосредоточенными силами и моментами во внутренних точках пластины. Пусть в произвольной точке (x_0, y_0) пластины с полубесконечной трещиной дей-



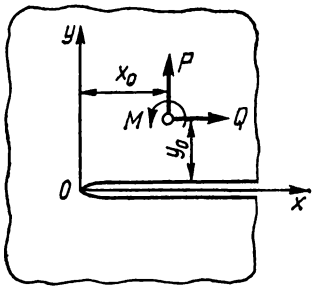


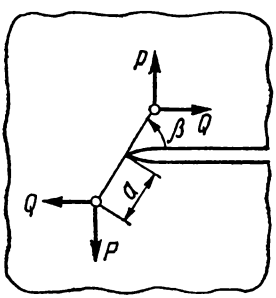
Рис. 2.19. Действие сосредоточенных сил на берегах полубесконечной трещины.

Рис. 2.20. Действие сосредоточенных сил и момента в произвольной точке пластины.

ствуют сосредоточенные силы P, Q и сосредоточенный момент M (рис. 2.20). Тогда [2]

$$K_I - iK_{II} = (1/\sqrt{2\pi}(1+\varkappa))\{(P - iQ)(1/\sqrt{z_0} - \varkappa/\sqrt{\bar{z}_0}) + \\ + [(P + iQ)(\bar{z}_0 - z_0) - (\varkappa + 1)M]/(2\bar{z}_0\sqrt{\bar{z}_0})\},$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$, $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$; корень $\sqrt{\bar{z}_0} \to \pm\sqrt{x_0}$ $(x_0 > 0)$ при $y_0 \to \pm 0$, т. е. при приближении точки z_0 к верхнему (+) или нижнему (—) берегу разреза.



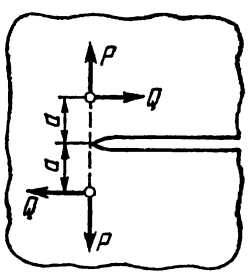


Рис. 2.21. Действие сосредоточенных сил в двух точках, симметричных относительно вершины трещины.

Рис. 2.22. Действие сосредоточенных сил в точках, симметричных относительно линии трещины.

Если равные по величине и противоположно направленные сосредоточенные силы P и Q приложены в двух точках, симметричных относительно вершины трещины (рис. 2.21), то [24]

$$K_I = (1/(\sqrt{\pi a}(1+\varkappa)))\{P[(\varkappa + 1)\cos(\pi/4 - \beta/2) + \\ + \sin\beta\sin(\pi/4 - 3\beta/2)] - Q[(\varkappa - 1)\sin(\pi/4 - \beta/2) +$$

$$+ \sin\beta \cos(\pi/4 - 3\beta/2)]\},$$

$$K_{II} = (1/(\sqrt{\pi a}(1+\varkappa)))\{P[(\varkappa - 1)\sin(\pi/4 - \beta/2) -$$

$$- \sin\beta\cos(\pi/4 - 3\beta/2)] + Q[(\varkappa + 1)\cos(\pi/4 - \beta/2) -$$

$$- \sin\beta\sin(\pi/4 - 3\beta/2)]\}.$$

В частности, при $\beta = \pi/2$ (рис. 2.22) отсюда найдем

$$K_I = P\varkappa/(\sqrt{\pi a}(1+\varkappa)),$$

$$K_{II} = Q(\varkappa + 2)/(\sqrt{\pi a}(1+\varkappa)).$$

Расклинивание тела полубесконечным клином. Бесконечная плоскость расклинивается тонким симметричным абсолютно жестким клином с за-

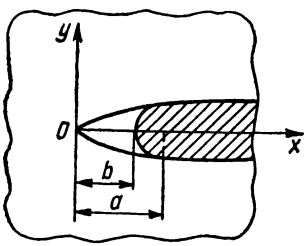


Рис. 2.23. Расклинивание тела полубесконечным клином с закругленной передней частью.

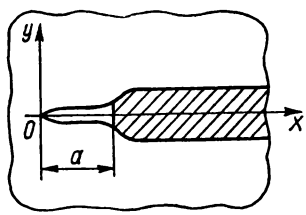


Рис. 2.24. Расклинивание тела полубесконечным клином со срезанной передней частью.

кругленной (рис. 2.23) или срезанной (рис. 2.24) передней частью. Толщина клина на бесконечности ограничена и равна $2h$. На границе клина с упругим телом отсутствуют сдвигающие напряжения (гладкий контакт) Форма клина определяется уравнением $y = \pm f(x)$, $x \geqslant a$, $f(\infty) = h$. КИН у вершины трещины равны [25, 26]

$$K_I = \frac{4G}{1+\varkappa}\sqrt{\frac{2}{\pi a}} \times$$

$$\times \left[h - \int_a^\infty \sqrt{\frac{x-a}{x}} f'(x)\,dx\right], \quad K_{II} = 0. \tag{2.10}$$

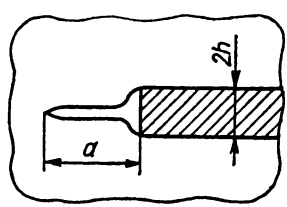


Рис. 2.25. Расклинивание тела полубесконечным клином постоянной толщины.

В случае клина с закругленной передней частью величина a заранее неизвестна и определяется в ходе решения задачи из условия

$$h = \int_a^\infty f'(x)\sqrt{\frac{x}{x-a}}\,dx,$$

Тогда формула (2.10) примет вид

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{4G}{1+\varkappa}\sqrt{\frac{2a}{\pi}}\int_a^\infty \frac{f'(x)\,dx}{\sqrt{x(x-a)}},\quad K_{\mathrm{II}} = 0.$$

Для полубесконечного клина постоянной толщины $2h$ (рис. 2.25) при отсутствии трения имеем [25—27]

$$K_{\mathrm{I}} = 4Gh\sqrt{2/(\pi a)}/(1+\varkappa),\quad K_{\mathrm{II}} = 0.$$

Если трение на границе клина с упругим телом велико (практически коэффициент трения должен быть больше 0,5), то [7]

$$K_{\mathrm{I}} = 2\sqrt{2}\,Gh/\sqrt{\varkappa\pi l},\quad K_{\mathrm{II}} = 0.$$

В работах [25, 26] рассмотрены также другие формы полубесконечного клина.

Данные по КИН для анизотропной пластины с полубесконечной трещиной приведены в работах [28, 29].

2.3. Две полубесконечные коллинеарные трещины

Произвольная несамоуравновешенная нагрузка на берегах трещин. Бесконечная пластина ослаблена двумя коллинеарными полубесконечными трещинами, размещенными на лучах $-\infty < x \leqslant -a$ и $a \leqslant x < \infty$ оси x. Напряжение и вращение на бесконечности отсутствуют, а на берегах трещины заданы компоненты напряжений $\sigma_y^+(x, 0)$, $\sigma_y^-(x, 0)$, $\tau_{xy}^+(x, 0)$ и $\tau_{xy}^-(x, 0)$ (рис. 2.26). КИН определяются по формулам [2, 3]

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}}^{\pm} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{l}}\left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^\infty\right)[\sigma_y^+(x,0) + \sigma_y^-(x,0)]\sqrt{\frac{x\pm a}{x\mp a}}\,dx,\\ K_{\mathrm{II}}^{\pm} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{l}}\left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^\infty\right)[\tau_{xy}^+(x,0) + \tau_{xy}^-(x,0)]\sqrt{\frac{x\pm a}{x\mp a}}\,dx. \end{aligned}\right\} \quad (2.11)$$

Здесь верхние знаки относятся к правой трещине, а нижние — к левой.

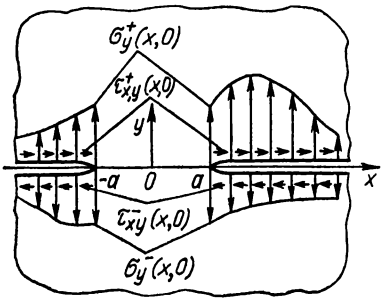
Сосредоточенная нагрузка на берегах трещин. Пусть напряжения и вращение на бесконечности отсутствуют, а к верхним берегам трещин приложены сосредоточенные силы P_1, Q_1 (левая трещина) и P_2, Q_2 (правая трещина) соответственно на расстоянии b и c от середины перешейка (рис. 2.27). Тогда [2, 5, 9]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = (1/(2\sqrt{\pi a}))\,[(P_1 - iQ_1)\sqrt{(b\mp a)/(b\pm a)} + (P_2 - iQ_2)\sqrt{(c\pm a)/(c\mp a)}]. \quad (2.12)$$

Если же, кроме того, на нижних берегах трещин приложены такие же по величине, но противоположно направленные силы, то [2, 9]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = (1/\sqrt{\pi a})\,[(P_1 - Q_1)\sqrt{(b\mp a)/(b\pm a)} + (P_2 - iQ_2)\sqrt{(c\pm a)/(c\mp a)}]. \quad (2.13)$$

Данная задача может быть решена также в иной постановке, когда вращение на бесконечности считается, вообще говоря, отличным от нуля. При этом удовлетворяются все условия равновесия: главный вектор и главный момент усилий, действующих на верхнюю или нижнюю полуплоскость, равны нулю. Именно в такой постановке в работах [30, 31] решена задача, когда на верхних и нижних берегах трещин дейст-



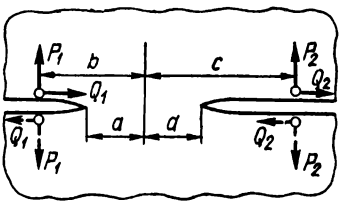


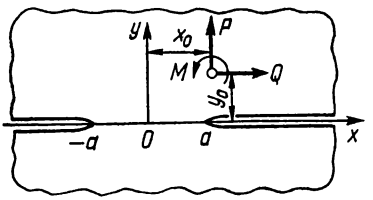
Рис. 2.26. Действие произвольной нагрузки на берегах полубесконечных коллинеарных трещин.

Рис. 2.27. Действие сосредоточенных сил на берегах трещин.

вуют нормальные сосредоточенные силы P_1 и P_2 (рис. 2.27). Тогда КИН даются соотношениями

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}}^{\pm} &= \pm P_1 \sqrt{b \mp a}\,(2b \pm a)/(a\sqrt{\pi a}\sqrt{b \pm a}) \mp \\ &\mp P_2 \sqrt{c \pm a}\,(2c \mp a)/(a\sqrt{\pi a}\sqrt{c \mp a}) \\ K_{\mathrm{II}} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

При действии симметричной нагрузки ($P_1 = P_2$, $b = c$), т. е. когда суммарный момент внешних сил, действующих на верхнюю или нижнюю полуплоскость, относительно центра перешейка равен нулю (следовательно, отсутствует вращение на бесконечности), формулы (2.13) и (2.14) дают одинаковые результаты.



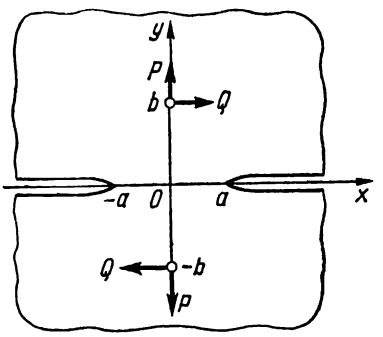


Рис. 2.28. Действие сосредоточенной нагрузки в произвольной точке пластины.

Рис. 2.29. Действие противоположно направленных растягивающих и сдвигающих сосредоточенных сил в двух симметричных точках.

Сосредоточенная нагрузка во внутренних точках пластины. Пусть во внутренней точке плоскости $z_0 = x_0 + iy_0$ действуют сосредоточенные силы P, Q и момент M (рис. 2.28). Берега трещин свободны от нагрузки,

напряжения и вращение на бесконечности отсутствуют. Тогда [2]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = -[(Q+iP)(z_0 \pm a)/\sqrt{a^2 - z_0^2} -$$

$$-\varkappa(Q+iP)(\bar{z}_0 \pm a)/\sqrt{a^2 - \bar{z}_0^2} - [(Q-iP)\,a(\bar{z}_0 - z_0) +$$

$$+ ia(\varkappa+1)M]/(\sqrt{a^2 - \bar{z}_0^2}(a \mp \bar{z}_0))]/(2(1+\varkappa)\sqrt{\pi a}), \qquad (2.15)$$

где под функцией $\sqrt{a^2 - z^2}$ подразумевается та ветвь, которая удовлетворяет при $z \to \infty$ условию $\sqrt{a^2 - z^2}/z \to -i$. Путем суперпозиции из соотношения (2.15) находятся [2] КИН для случая, когда в точках $z = \pm ib$ приложены равные по величине, но противоположные по направлению сосредоточенные силы P и Q (рис. 2.29):

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}} &= Pb[1 + \varkappa - 2a^2/(a^2+b^2)]/[(1+\varkappa)\sqrt{\pi a(a^2+b^2)}], \\ K_{\mathrm{II}} &= Qb[1 + \varkappa + 2a^2/(a^2+b^2)]/[(1+\varkappa)\sqrt{\pi a(a^2+b^2)}]. \end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

Отсюда при $b \to \infty$ получаем решение задачи, когда тело на бесконечности находится под действием растягивающей и сдвигающей нагрузок, суммарные значения которых равны P и Q (рис. 2.30; $M = 0$): $K_{\mathrm{I}} = P/\sqrt{\pi a}$; $K_{\mathrm{II}} = Q/\sqrt{\pi a}$.

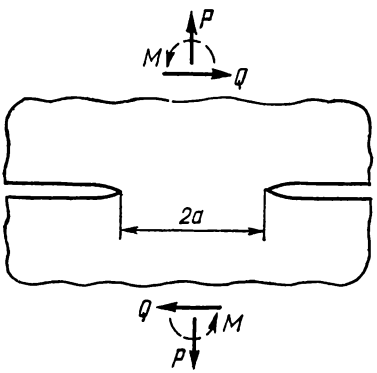


Рис. 2.30. Действие нагрузки на бесконечности.

Если же на бесконечности приложены усилия, главный момент которых равен M, а главный вектор — нулю (при этом, естественно, вращение на бесконечности считается отличным от нуля), то КИН у вершины правой трещины будут * [5, 7]

$$K_{\mathrm{I}}^{+} = 2M/(a\sqrt{\pi a}), \quad K_{\mathrm{II}}^{+} = 0.$$

Результаты (2.11) — (2.13), (2.15) и (2.16), полученные при условии отсутствия вращения на бесконечности (отметим, что об этом условии в упомянутых работах ничего не говорится), следуют также как предельный случай решения задачи для двух коллинеарных трещин конечной длины [11].

Расклинивание тела двумя полубесконечными клиньями. Бесконечная плоскость расклинивается двумя тонкими симметричными абсолютно жесткими клиньями с закругленными передними частями (рис. 2.31). Толщина клиньев на бесконечности ограничена и равна $2h$. На границе клиньев с упругим телом отсутствуют сдвигающие напряжения (гладкий контакт). Форма клиньев определяется уравнением

$$y = \pm f(x), \quad f(x) = f(-x), \quad |x| \geqslant c, \quad f(\infty) = h.$$

КИН у вершин трещин равны [32]

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{8G}{1+\varkappa}\sqrt{\frac{c^2 - a^2}{\pi a}}\left[\int_c^{\infty} \frac{tf'(t)\,dt}{\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - c^2)}} + \frac{A\pi}{2(c^2 - a^2)}\right], \quad K_{\mathrm{II}} = 0,$$

* При этом не учитывается контакт берегов левой трещины.

где

$$A = \frac{c}{K(k)}\left[f(c) - \frac{2}{\pi}\int_a^c\int_a^c \sqrt{\frac{(c^2-x^2)(t^2-a^2)}{(x^2-a^2)(c^2-t^2)}}\,\frac{tg(t)\,dtdx}{t^2-x^2}\right],$$

$$g(x) = \frac{2}{\pi}\int_c^\infty \frac{tf'(t)\,dt}{t^2-x^2},$$

$K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $k = \sqrt{c^2-a^2}/c$.

Пусть форма клиньев определяется равенством $f(x) = h(1 - b/x)$ $(a < b < c)$ (см. рис. 2.31). Тогда [32]

$$K_I = 4G\sqrt{(c^2-a^2)/(\pi a)}\,[(bh/ac)\ln((c+a)/(c-a)) +$$
$$+ A\pi/(c^2-a^2)]/(1+\varkappa),\ K_{II} = 0,$$

$$A = ch\{1 - 2bK(k)/(\pi c) + (b/\pi a)[K(k) - E(k)]\ln((c+a)/(c-a))\}/K(k).$$

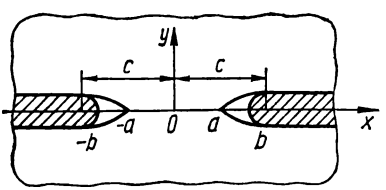


Рис. 2.31. Раскрытие берегов трещин двумя симметричными полубесконечными клиньями.

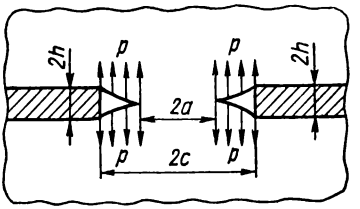


Рис. 2.32. Расклинивание тела двумя полубесконечными клиньями постоянной толщины.

Если берега трещин раскрываются жесткими тонкими включениями постоянной толщины $2h$, а остальные части трещин находятся под действием постоянного давления p (рис. 2.32), то [9, 32]

$$K_I = p\sqrt{\pi/a}\,[c^2E(k) - a^2K(k)]/[K(k)\sqrt{c^2-a^2}] +$$
$$+ 4Gh\sqrt{\pi/a}/[(1+\varkappa)kK(k)],\ K_{II} = 0, \qquad (2.17)$$

где $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

Напряжение p должно удовлетворять условию [9]

$$p_1 = -4Ghc/\{(1+\varkappa)[c^2E(k) -$$
$$- a^2K(k)]\} \leqslant p \leqslant 4Gh/\{c(1+\varkappa)[K(k) - E(k)]\} = p_2. \qquad (2.18)$$

Если $p > p_2$, то происходит разделение контактирующих поверхностей на концах клиньев, если же $p < p_1$, то имеет место контакт берегов трещин в окрестностях их вершин. Формула (2.17) верна также в случае, когда берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности тело растягивается напряжениями p в направлении, перпендикулярном линии трещин, однако условие (2.18) несколько изменится [9].

Данные по КИН для анизотропной пластины с двумя полубесконечными коллинеарными трещинами приведены в работах [7, 33].

2.4. Дугообразная трещина

Произвольная несамоуравновешенная нагрузка на берегах трещины. Бесконечная плоскость ослаблена трещиной вдоль дуги L окружности радиуса R от точки $z = x + iy = a = R\exp(-i\beta)$ (начало) до $b = \bar{a} = R\exp(i\beta)$ (конец). Напряжения на бесконечности отсутствуют, а на берегах трещины заданы компоненты напряжений $\sigma_r^+(t)$, $\tau_{r\theta}^+(t)$, $\sigma_r^-(t)$ и $\tau_{r\theta}^-(t)$, где r, θ — полярные координаты с полюсом в точке O, а $t = R\exp(i\theta)$ $(-\beta \leqslant \theta \leqslant \beta)$ — комплексная координата точки на контуре L (рис. 2.33). КИН определяются по формулам [3]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = \mp \frac{\exp(\mp i\beta/2)}{\sqrt{\pi R \sin\beta}} \left\{ \int_L \left[\frac{t - R\exp(\mp i\beta)}{X(t)} p(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (1 - \varkappa\exp(\mp i\beta))\, q(t)/(\varkappa + 1) \right] dt \mp C \right\}, \qquad (2.19)$$

где $p(t) = (1/2)[\sigma_r^+(t) + \sigma_r^-(t)] + (i/2)[\tau_{r\theta}^+(t) + \tau_{r\theta}^-(t)]$,

$q(t) = (1/2)[\sigma_r^+(t) - \sigma_r^-(t)] + (i/2)[\tau_{r\theta}^+(t) - \tau_{r\theta}^-(t)]$,

$$C = -\frac{i\operatorname{tg}(\beta/2)}{1 + \sin^2(\beta/2)} \int_L \left\{ \frac{X(t)}{R} \left[\frac{R}{t} \sin^2\frac{\beta}{2}\, p(t)\, dt + \overline{p(t)}\, \overline{dt} \right] + \right.$$

$$\left. + [(1 - \varkappa\cos\beta)/(1 + \varkappa) - R/t]\, [\sin^2(\beta/2)\, q(t)\, dt + \overline{q(t)}\, \overline{dt}] \right\}, \quad X(t) = X^-(t) -$$

предельное значение функции $X(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$ при $z \to t$ справа от контура L по отношению к выбранному положительному направлению (от a до b).

Здесь и в дальнейшем величины $K_{\mathrm{I}}^{\pm}$ и $K_{\mathrm{II}}^{\pm}$ с нижним знаком относятся к началу трещины ($z = a$), а с верхним — к концу ($z = b$). С помощью формулы (2.19) находятся КИН при любой нагрузке, действующей как на берегах трещины, так и во внутренних точках или на бесконечности.

Действие нагрузки на бесконечности. Пусть дугообразная трещина свободна от нагрузки, а на бесконечности действуют во взаимно перпендикулярных направлениях равномерно распределенные растягивающие напряжения p и q, причем напряжения p направлены под углом γ к оси Ox (рис. 2.34). Тогда [8, 24]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} = \sqrt{\pi R \sin\beta}\, \{[p + q - (p - q)\cos 2\gamma \sin^2(\beta/2)\cos^2(\beta/2)]\cos(\beta/2)/[1 +$$

$$+ \sin^2(\beta/2)] \pm (p - q)\sin 2\gamma \sin^3(\beta/2) + (p - q)\cos(2\gamma \mp 3\beta/2)\}/2,$$

$$K_{\mathrm{II}}^{\pm} = \pm\sqrt{\pi R \sin\beta}\, \{[p + q - (p - q)\cos 2\gamma \sin^2(\beta/2)\cos^2(\beta/2)] \times$$

$$\times \sin(\beta/2)/[1 + \sin^2(\beta/2)] \mp (p - q)\sin 2\gamma \sin^2(\beta/2)\cos(\beta/2) \mp$$

$$\mp (p - q)\sin(2\gamma \mp 3\beta/2)\}/2;$$

в частности, при одноосном растяжении пластины напряжениями p параллельно хорде, соединяющей вершины дугообразной трещины (см. рис. 2.34; $q = 0$, $\gamma = \pi/2$), имеем [34]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} = (p/4)\sqrt{\pi R \sin\beta}\, [\cos(\beta/2)(5 - \cos^2\beta)/(3 - \cos\beta) - 2\cos(3\beta/2)],$$

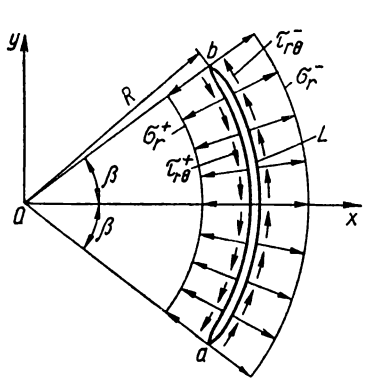
$$K_{\mathrm{II}}^{\pm} = \pm(p/4)\sqrt{\pi R \sin\beta}\, [\sin(\beta/2)(5 - \cos^2\beta)/(3 - \cos\beta) - 2\sin(3\beta/2)].$$

Если же пластина растягивается вдоль оси симметрии трещины (см. рис. 2.34; $q = 0$, $\gamma = 0$), то [34, 35]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} = (p/4)\sqrt{\pi R \sin\beta}\,[\cos(\beta/2)(3 + \cos^2\beta)/(3 - \cos\beta) + 2\cos(3\beta/2)],$$

$$K_{\mathrm{II}}^{\pm} = \pm(p/4)\sqrt{\pi R \sin\beta}\,[\sin(\beta/2)(3 + \cos^2\beta)/(3 - \cos\beta) + 2\sin(3\beta/2)].$$

Отметим, что $K_{\mathrm{I}}^{\pm} = 0$ при $\beta = 1{,}34$, что позволяет использовать эту схему нагружения при исследовании трещин поперечного сдвига [35].



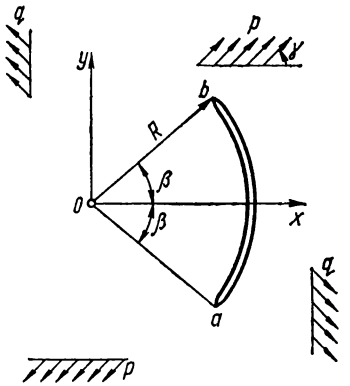


Рис. 2.33. Действие произвольной нагрузки на берегах дугообразной трещины.

Рис. 2.34. Растяжение на бесконечности пластины с дугообразной трещиной.

В случае всестороннего растяжения (см. рис. 2.34; $p = q$) выражения для $K_{\mathrm{I}}^{\pm}$ и $K_{\mathrm{II}}^{\pm}$ имеют вид [3,8]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = p\sqrt{\pi R \sin\beta}\exp(\mp i\beta/2)/[1 + \sin^2(\beta/2)] =$$

$$= \sqrt{1 + \varepsilon^2}\,(1 + 2\varepsilon^2)^{-1}(1 \mp i\varepsilon)\,p\sqrt{\pi c}, \qquad (2.20)$$

где $\varepsilon = \delta/c$; $2c$ — длина хорды, соединяющей концы трещины; δ — максимальное удаление точек трещины от этой хорды. Формула (2.20) определяет также КИН при отсутствии нагрузки на бесконечности, когда берега трещины находятся под действием постоянных нормальных напряжений p.

При действии на бесконечности равномерно распределенных сдвигающих напряжений τ (рис. 2.35) КИН равны [34]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} = \mp\tau\sqrt{\pi R \sin\beta}\,[\sin(3\beta/2) + \sin^3(\beta/2)],$$

$$K_{\mathrm{II}}^{\pm} = \tau\sqrt{\pi R \sin\beta}\,[\cos(3\beta/2) + \cos(\beta/2)\sin^2(\beta/2)].$$

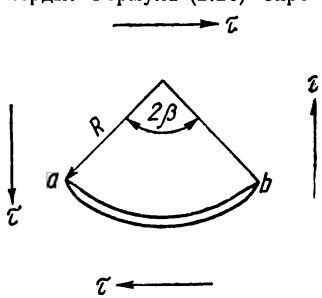


Рис. 2.35. Сдвиг на бесконечности пластины с дугообразной трещиной.

Зависимости $K_I^{\pm}$ и $K_{II}^{\pm}$ от угла β при различных значениях угла γ в случае одноосного растяжения ($q = 0$) проиллюстрированы в работе [12].

2.5. Гладкие криволинейные трещины

Слабоискривленная трещина. Пусть бесконечная плоскость ослаблена гладким криволинейным разрезом L, на берегах которого заданы несамоуравновешенные усилия

$$N^{\pm} + iT^{\pm} = p(t) \pm q(t) \quad (t = x + iy \in L),$$

где N и T — нормальная и касательная компоненты напряжений; индекс «+» («—») обозначает предельное значение функции при стремлении к разрезу слева (справа). Форма контура L определяется параметрическим уравнением $x = x(\xi), y = y(\xi), -1 \leqslant \xi \leqslant 1$. В случае слабоискривленной трещины (рис. 2.36) функцию $t = \omega(\xi) = x(\xi) + iy(\xi)$ можно представить в виде $\omega(\xi) = c[\xi + \lambda\omega_1(\xi)]$, где λ — малый безразмерный параметр (при $\lambda = 0$ контур L представляет собой отрезок $-c \leqslant x \leqslant c$ оси Ox), а функция $\omega_1(\xi)$ удовлетворяет условиям $\lambda \mid \omega_1(\xi) \mid \ll 1$, $\lambda \mid \omega_1'(\xi) \mid \ll 1$. Тогда асимптотические значения КИН при произвольных нагрузке $p(\xi) = p(\omega(\xi))$, $q(\xi) = q(\omega(\xi))$ и форме трещины $\omega_1(\xi)$ определяются выражениями [3, 36]

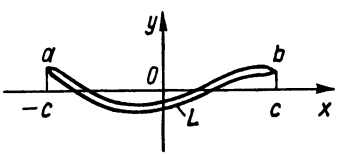


Рис. 2.36. Схема слабоискривленной трещины в бесконечной пластине.

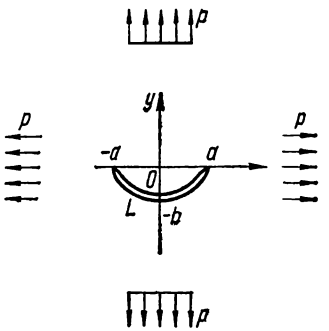


Рис. 2. 37. Бесконечная плоскость с криволинейным разрезом L при всестороннем растяжении на бесконечности.

$$K_I^{\pm} - iK_{II}^{\pm} = -\sqrt{\frac{c}{\pi}} \left\{ \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1 \pm \xi}{1 \mp \xi}} \left\{ p_0(\xi) + \lambda \left\{ p_1(\xi) + \right.\right.\right.$$

$$+ p_0(\xi)\{\omega_1'(\xi) - i \operatorname{Im} \omega_1'(\pm 1) - (1/2) \operatorname{Re}[\omega(1, -1) \pm \omega(\xi, 1) \mp$$

$$\mp \omega(\xi, -1)]\} + (i/2)\overline{p_0(\xi)} \operatorname{Im}[\omega_1'(\pm 1) - \omega(1, -1) \mp \omega(\xi, 1) \pm$$

$$\left.\left.\left. \pm \omega(\xi, -1)] + \frac{2i}{\pi} \int_{-1}^{1} \operatorname{Im} \omega_{\xi}'(s, \xi) \operatorname{Im} q_0(s)\, ds \right\} \right\} d\xi \pm$$

$$\pm i \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \int_{-1}^{1} \{q_0(\xi) + \lambda \{q_1(\xi) + q_0(\xi)[\omega_1'(\xi) - i \operatorname{Im} \omega_1'(\pm 1) -$$

$$\left. - (1/2) \operatorname{Re} \omega(1, -1)] - (i/2)\overline{q_0(\xi)} \operatorname{Im}[\omega_1'(\pm 1) - \omega(1, -1)]\}\} d\xi \right\} + O(\lambda^2),$$

где $p_0(\xi)$, $p_1(\xi)$, $q_0(\xi)$ и $q_1(\xi)$ — коэффициенты разложения функций $p(\xi)$ и $q(\xi)$ в ряды по степеням λ, а $\omega(s, \xi) = [\omega_1(s) - \omega_1(\xi)] / (s - \xi)$.

Если трещина свободна от нагрузки, а тело подвергнуто на бесконечности растяжению внешними напряжениями p и q, действующими во взаимно перпендикулярных направлениях, причем напряжения p направлены под углом γ к оси Ox, то [3, 36]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = \sqrt{\pi c}\left\{((p+q)/2)\{1 + (\lambda/2)[\omega(1, -1) - i\,\mathrm{Im}\,\omega_1'(\pm 1)]\} - \right.$$

$$-((p-q)/2)\left\{\exp(2i\gamma) + (\lambda/2)\left[\omega(1, -1)\cos 2\gamma + i\bar{\omega}(1, -1)\sin 2\gamma - \right.\right.$$

$$- i\,\mathrm{Im}\,\omega_1'(\pm 1)(\cos 2\gamma + 3i\sin 2\gamma) -$$

$$\left.\left.\left. - (4l/\pi)\cos 2\gamma\,\mathrm{Im}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1 \pm \xi}{1 \mp \xi}}\,\omega_1'(\xi)\,d\xi\right]\right\}\right\} + O(\lambda^2);$$

в частности, при всестороннем растяжении на бесконечности ($p = q$)

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = p\sqrt{\pi c}\{1 + (\lambda/2)[\omega(1, -1) - i\,\mathrm{Im}\,\omega_1'(\pm 1)]\} + O(\lambda^2).$$

В случае самоуравновешенной нагрузки ($q(t) = 0$) выражения КИН для слабоискривленной трещины в ином виде приведены также в работах [34, 37]. Известны также асимптотические разложения КИН для криволинейной трещины, мало отличающейся от дугообразной [3, 36].

Таблица 2.1. **Значения КИН $K_{\mathrm{I}} = p\sqrt{\pi a}F_{\mathrm{I}}$ и $K_{\mathrm{II}} = p\sqrt{\pi a}F_{\mathrm{II}}$ при всестороннем растяжении бесконечной пластины с трещиной по дуге эллипса или параболы [3]**

b/a	Эллипс		Парабола	
	F_{I}	F_{II}	F_{I}	F_{II}
0	1	0	1	0
0,2	0,3187	0,4457	0,9481	0,1823
0,5	0,3576	0,4610	0,8158	0,3266
1,0	0,4714	0,4714	0,7416	0,3812
1,5	0,5807	0,4688	0,7636	0,3906
2,0	0,6730	0,4679	0,8115	0,3969
2,5	0,7536	0,4704	0,8662	0,4046
3,0	0,8261	0,4754	0,9219	0,4135
3,5	0,8926	0,4821	0,9767	0,4234
4,0	0,9544	0,4896	1,0297	0,4337

Трещина по дуге эллипса. Бесконечная плоскость, ослабленная свободным от нагрузки разрезом L вдоль дуги эллипса с полуосями a и b, находится при всестороннем растяжении на бесконечности усилиями p (рис. 2.37) или нагрузка на бесконечности отсутствует, а берега трещины находятся под действием давления p. Значения КИН $K_{\mathrm{II}}^{\pm} = p\sqrt{\pi a}F_{\mathrm{I}}$, $K_{\mathrm{II}}^{\pm} = \pm p\sqrt{\pi a}F_{\mathrm{II}}$ (верхний знак соответствует правой вершине трещины L), полученные методом СИУ [3], приведены в табл. 2.1.

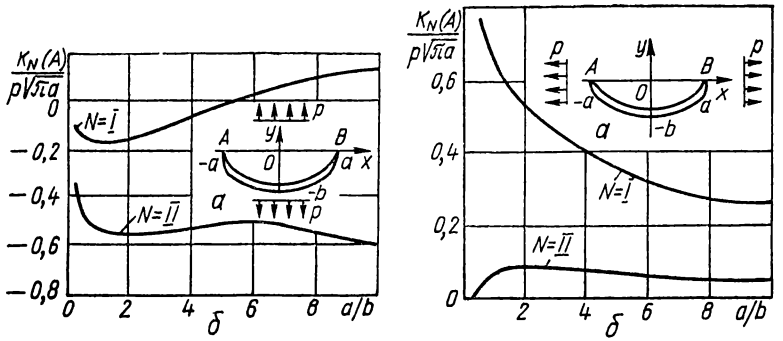


Рис. 2.38. Схема бесконечной пластины с трещиной вдоль дуги эллипса при вертикальном растяжении (*а*) и зависимость КИН от параметра a/b ($K_I(B) = K_I(A)$, $K_{II}(B) = -K_{II}(A)$) (*б*) [2,38].

Рис. 2.39. Схема бесконечной пластины с трещиной вдоль дуги эллипса при горизонтальном растяжении (*а*) и зависимость КИН от параметра a/b ($K_I(B) = K_I(A)$, $K_{II}(B) = -K_{II}(A)$) (*б*) [2,38].

Таблица 2.2. Значения КИН $K_I = p\sqrt{\pi s}F_I$ и $K_{II} = p\sqrt{\pi s}F_{II}$ при всестороннем растяжении бесконечной пластины с трещиной вдоль кубической параболы [41]

c	F_I	F_{II}	c	F_I	F_{II}	c	F_I	F_{II}
0,01	0,9998	0,01	0,55	0,873	0,238	1,8	0,921	0,152
0,02	0,9993	0,02	0,6	0,871	0,237	2,2	0,936	0,131
0,05	0,9958	0,05	0,7	0,869	0,233	3,5	0,962	0,089
0,1	0,9844	0,095	0,8	0,871	0,227	4,0	0,967	0,079
0,3	0,9157	0,208	1,0	0,880	0,211	5,0	0,976	0,064

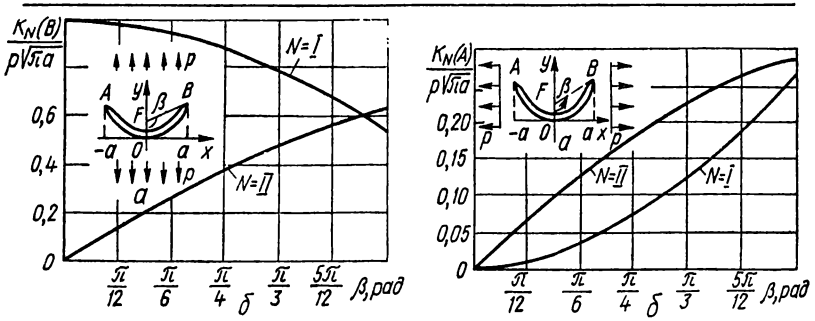


Рис. 2.40. Схема бесконечной пластины с трещиной вдоль дуги параболы при вертикальном растяжении (*а*) и зависимость КИН от угла β ($K_I(A) = K_I(B)$, $K_{II}(A) = -K_{II}(B)$) (*б*) [38].

Рис. 2.41. Схема бесконечной пластины с трещиной вдоль дуги параболы при горизонтальном растяжении (*а*) и зависимость КИН от угла β ($K_I(B) = K_I(A)$, $K_{II}(B) = -K_{II}(A)$) (*б*) [38].

При одноосном растяжении бесконечной пластины с трещиной по дуге эллипса зависимости КИН от параметра a/b, полученные методом СИУ [38], приведены на рис. 2.38 и 2.39. Эти результаты хорошо согласуются с данными работы [39]. Общий случай ориентации трещины данной формы рассмотрен в работе [40].

Трещина на дуге параболы. Значения КИН $K_{\mathrm{I}}^{\pm} = p\sqrt{\pi a}\,F_{\mathrm{I}}$, $K_{\mathrm{II}}^{\pm} = \pm p\sqrt{\pi a}F_{\mathrm{II}}$ для бесконечной плоскости, содержащей трещину вдоль дуги параболы и находящейся при всестороннем растяжении на бесконечности (см. рис. 2.37; ось Oy — ось параболы), приведены в табл. 2.1. Эти результаты получены методом СИУ [3].

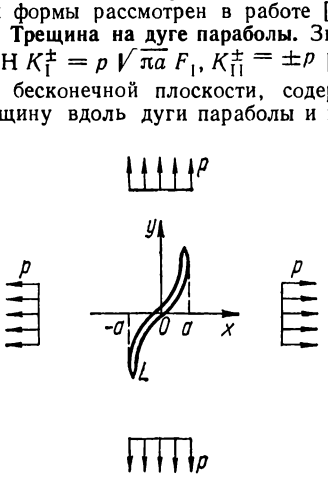


Рис. 2.42. Всестороннее растяжение бесконечной плоскости с трещиной вдоль кубической параболы.

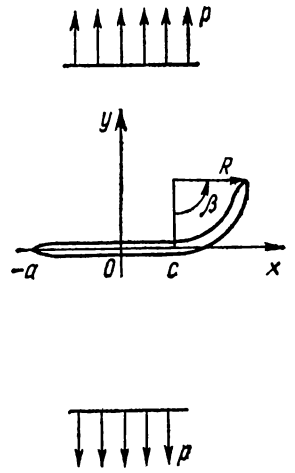


Рис. 2.43. Растяжение бесконечной плоскости с прямолинейной трещиной с искривлением на правом конце.

Зависимости КИН при одноосном растяжении бесконечной пластины с трещиной вдоль дуги параболы от угла β между отрезком, соединяющим фокус параболы F с вершиной трещины B, и отрицательным направлением оси Oy приведены на рис. 2.40 и 2.41. Эти результаты, полученные методом СИУ [38], хорошо согласуются с данными работы [39]. Общий случай ориентации трещины данной конфигурации рассмотрен в работе [40].

Трещина вдоль кубической параболы. Пусть плоскость со свободным от нагрузки разрезом L, имеющим форму дуги кубической параболы $y = cx^3$ ($|x| \leqslant a$), находится под действием всестороннего растяжения на бесконечности усилиями p (рис. 2.42). Задача решена методом СИУ в работе [41]. Для этого случая в табл. 2.2 даны значения $K_{\mathrm{I}}^{\pm} = p\sqrt{\pi s}F_{\mathrm{I}}$, $K_{\mathrm{II}}^{\pm} = p\sqrt{\pi s}F_{\mathrm{II}}$, где $s = \int_0^a \sqrt{1 + 9c^2x^4}\,dx$ — полудлина разреза, при

Таблица 2.3. **Значение КИН $K_{\mathrm{I}}^{\pm} = p\sqrt{\pi a}F_{\mathrm{I}}^{\pm}$ и $K_{\mathrm{II}} = p\sqrt{\pi a}F_{\mathrm{II}}^{\pm}$ для прямолинейной трещины с искривлением на правом конце в бесконечной плоскости [43]**

β	F_{I}^{+}	F_{II}^{+}	F_{I}^{-}	F_{II}^{-}
π/18	0,979	0,142	1,000	—0,006
π/12	0,953	0,211	1,000	—0,009
π/9	0,918	0,276	0,999	—0,012
5π/36	0,873	0,387	0,998	—0,014

различных значениях параметра c, характеризующего кривизну трещины.

Графические зависимости КИН от длины трещины $2s$ для трех значений c, равных 0,5; 1,0; 2,0, приведены в работе [42].

Прямолинейная трещина с искривлением на правом конце. Пусть бесконечная плоскость, ослабленная криволинейной трещиной вдоль отрезка прямой, плавно переходящего в дугу окружности, растягивается на бесконечности усилиями p, направленными перпендикулярно прямолинейному участку трещины (рис. 2.43). Задача решена методом СИУ в работе [43]. Значения КИН для левой ($K_N^- = p\sqrt{\pi a}F_N^-$; $N = \text{I, II}$) и правой ($K_N^+ = p\sqrt{\pi a}F_N^+$; $N = \text{I, II}$) вершин даны при $c = 0{,}6a$ в табл. 2.3. В этой же работе приведены графические зависимости $K_{\text{I}}^{\pm}$ и $K_{\text{II}}^{\pm}$ от угла β при других значениях параметра c для различных случаев нагружения.

Данные по КИН для анизотропной пластины с трещиной вдоль дуги эллипса приведены в работе [44].

2.6. Ломаные трещины

Двухзвенная ломаная трещина. Бесконечная плоскость, ослабленная свободной от нагрузки двухзвенной ломаной трещиной, находится на бесконечности под действием растягивающих и сдвигающих напряжений (рис. 2.44). В табл. 2.4 приведены полученные методом конформного отображения [45] значения КИН $K_N(A) = K_0F_N^-$, $K_N(B) = K_0F_N^+$ ($N = \text{I, II}$) при одноосном растяжении ($\lambda = 0$, $\tau = 0$, $K_0 = p\sqrt{2a}$) или сдвиге ($p = 0$, $K_0 = \tau\sqrt{2a}$) для трещины с равными звеньями ($2a = b$). Аналогичные данные в случае растяжения получены также методом СИУ в работе [46].

Ниже приведены значения КИН $K_{\text{I}}(B) = p\sqrt{\pi c}F_{\text{I}}^+$ и $K_{\text{II}}(B) = p\sqrt{\pi c}F_{\text{II}}^+$ для правой вершины B ломаной трещины с различными звеньями при одноосном растяжении (см. рис. 2.44; $\lambda = 0$, $\tau = 0$) для $\alpha = \pi/4$ [47, 48]:

$b/2a$	0,01	0,1	0,2	0,5	0,8	1,0	1,5	2,0
F_{I}^+	1,000	0,998	0,995	0,988	0,985	0,985	0,988	0,993
F_{II}^+	0,003	0,019	0,028	0,033	0,024	0,016	—0,004	—0,022

Аналогичные данные для левой вершины A приведены в табл. 2.5 для $\alpha = \pi/12$; $\pi/6$; $\pi/4$; $\pi/3$. В табл. 2.6 приведены КИН для ломаной трещины с различными звеньями при наклонном одноосном растяжении на бесконечности (рис. 2.45). Результаты работ [47, 48] получены методом конформных отображений.

Ниже приведены значения КИН $K_{\text{I}}(A) = p\sqrt{a}F_{\text{I}}$ и $K_{\text{II}}(A) = p\sqrt{a}F_{\text{II}}$ ($K_{\text{I}}(B) = K_{\text{I}}(A)$, $K_{\text{II}}(B) = -K_{\text{II}}(A)$) для ломаной трещины с равными ветвями при растяжении на бесконечности в направлении, перпендикулярном оси симметрии трещины (рис. 2.46):

θ	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$
F_{I}	0,927	0,781	0,530	0,265	0,071
F_{II}	0,195	0,448	0,552	0,487	0,282

Таблица 2.4. **Значения КИН для ломаной трещины с равными звеньями при одноосном растяжении или сдвиге на бесконечности** [45]

α	Растяжение ($\lambda = 0$, $\tau = 0$)			
	F_{I}^{+}	F_{II}^{+}	F_{I}^{-}	F_{II}^{-}
π/12	1,7512	0,0287	1,6619	—0,4777
π/6	1,6930	0,0407	1,3573	—0,8528
π/4	1,6127	0,0261	0,9322	—1,0499
π/3	1,5283	—0,0145	0,4865	—1,0392
5π/12	1,4547	—0,0701	0,1203	—0,8429
π/2	1,3984	—0,1230	—0,0921	—0,5269

α	Сдвиг ($p = 0$)			
	F_{I}^{+}	F_{II}^{+}	F_{I}^{-}	F_{II}^{-}
π/12	0,1115	1,7808	0,7778	1,5706
π/6	0,1981	1,7974	1,3610	1,0160
π/4	0,2454	1,8001	1,6064	0,2475
π/3	0,2557	1,7628	1,4585	—0,5460
5π/12	0,2470	1,6664	0,9619	—1,1770
π/2	0,2460	1,5072	0,2460	—1,5072

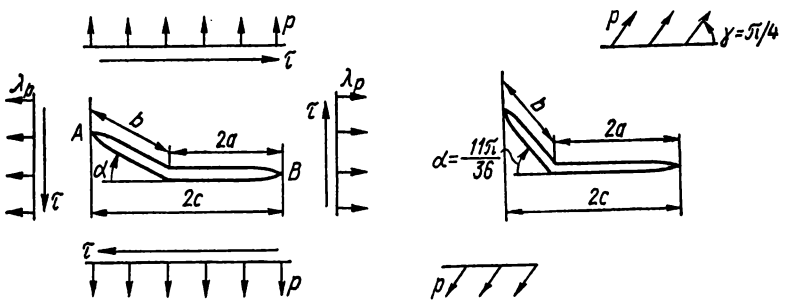


Рис. 2.44. Двухзвенная ломаная трещина при двухосном растяжении и сдвиге на бесконечности.

Рис. 2.45. Двухзвенная ломаная трещина при наклонном одноосном растяжении на бесконечности.

Численные результаты получены методом СИУ [49]. Этот метод применялся также при построении решения в случае одноосного и всестороннего растяжения на бесконечности плоскости с ломаной грещиной, состоящей из основной и боковой трещин длиной $2a$ и b соответственно, при $b/a = 1$. На рис. 2.47 и 2.48 (кривые *1*) приведены зависимости КИН K_{I} и K_{II}, отнесенных к $p\sqrt{\pi a}$, от угла ориентации боковой трещины α.

Таблица 2.5. **Значение КИН $K_I(A) = p\sqrt{\pi c}F_I^-$ и $K_{II}(A) = p\sqrt{\pi c}F_{II}^-$ в левой вершине ломаной трещины с различными звеньями при одноосном растяжении [47, 48]**

$b/2a$	$\alpha = \pi/12$		$\alpha = \pi/6$	
	F_I^-	F_{II}^-	F_I^-	F_{II}^-
0,1	0,9540	—0,2120	0,8245	—0,3895
0,2	0,9496	—0,2346	0,8076	—0,4307
0,4	0,9466	—0,2555	0,7957	—0,4690
0,6	0,9457	—0,2648	0,7927	—0,4858
0,8	0,9456	—0,2694	0,7922	—0,4940
1,0	0,9457	—0,2718	0,7928	—0,4981
1,5	0,9463	—0,2737	0,7951	—0,5008
2,0	0,9468	—0,2733	0,7971	—0,4996

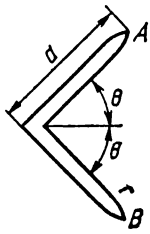
$b/2a$	$\alpha = \pi/4$		$\alpha = \pi/3$	
	F_I^-	F_{II}^-	F_I^-	F_{II}^-
0,1	0,6339	—0,5053	0,4106	—0,5462
0,2	0,5983	—0,5578	0,3583	—0,5996
0,4	0,5741	—0,6072	0,3189	—0,6516
0,6	0,5679	—0,6283	0,3112	—0,6718
0,8	0,5678	—0,6376	0,3128	—0,6770
1,0	0,5694	—0,6413	0,3171	—0,6775
1,5	0,5744	—0,6414	0,3273	—0,6682
2,0	0,5785	—0,6377	0,3340	—0,6580

Таблица 2.6. **Значения КИН $K_I^{\pm} = p\sqrt{\pi c}F_I^{\pm}$ и $K_{II}^{\pm} = p\sqrt{\pi c}F_{II}^{\pm}$ для ломаной трещины при наклонном одноосном растяжении ($\gamma = \pi/4$) и $\alpha = 11\,\pi/36$ [48]**

$b/2a$	F_I^+	F_{II}^+	F_I^-	F_{II}^-	$b/2a$	F_I^+	F_{II}^+	F_I^-	F_{II}^-
0,1	0,515	0,535	0,900	—0,023	0,8	0,566	0,663	0,967	—0,182
0,2	0,527	0,565	0,912	—0,059	1,0	0,576	0,675	0,988	—0,201
0,4	0,543	0,611	0,925	—0,115	1,5	0,601	0,688	1,033	—0,229
0,6	0,555	0,672	0,945	—0,154	2,0	0,624	0,687	1,068	—0,242

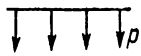
Рис. 2.46. Двухзвенная ломаная трещина с одинаковыми ветвями при одноосном симметричном растяжении на бесконечности.

Сплошные кривые относятся к правой вершине трещины (вершина A), а штриховые — к левой. Численные результаты для КИН в рассмотренном случае ломаной трещины приведены также в работах [34, 51—53].



Трещина с бесконечно малым отростком. В механике разрушения принципиальное значение имеет решение рассмотренной выше задачи в предельном случае, когда отношение длины отростка к длине основной трещины бесконечно мало (рис. 2.49). При этом коэффициенты интенсивности напряжений у вершины отростка могут быть представлены в виде

$$K_N = K_{\mathrm{I}}^* B_{N_1}(\alpha) + K_{\mathrm{II}}^* B_{N2}(\alpha) \quad (N = \mathrm{I}, \mathrm{II}), \quad (2.21)$$



где K_{I}^* и K_{II}^* — коэффициенты интенсивности для основной трещины при отсутствии отростка. В табл. 2.7 приведены значения функций $B_{N1}(\alpha)$ и $B_{N2}(\alpha)$, полученные [54] методом интегральных уравне-

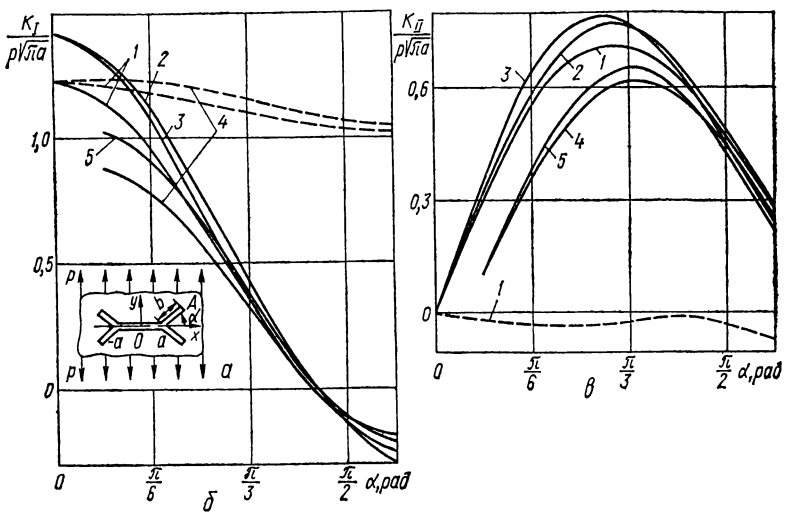


Рис. 2.47. Схема ломаных и ветвящихся трещин в бесконечной плоскости при одноосном растяжении (*а*) и зависимости КИН K_{I} (*б*) и K_{II} (*в*) от угла α в вершине боковой трещины A (сплошные кривые) и левой вершине основной трещины (штриховые кривые) для ломаных двухзвенной (*1*) и трехзвенных трещин с центром симметрии (*2*) и осью симметрии (*3*), а также для симметричной (*4*) и двоякосимметричной (*5*) трещин ветвления при $b/a = 1$ [3,50].

ний. Эти результаты хорошо согласуются с данными работ [50, 55—57]. Решение последней задачи может быть получено в квадратурах [58, 59]. Были сделаны попытки [60—64] построить замкнутые аналитические зависимости (2.21), однако полученные формулы не согласуются с извест-

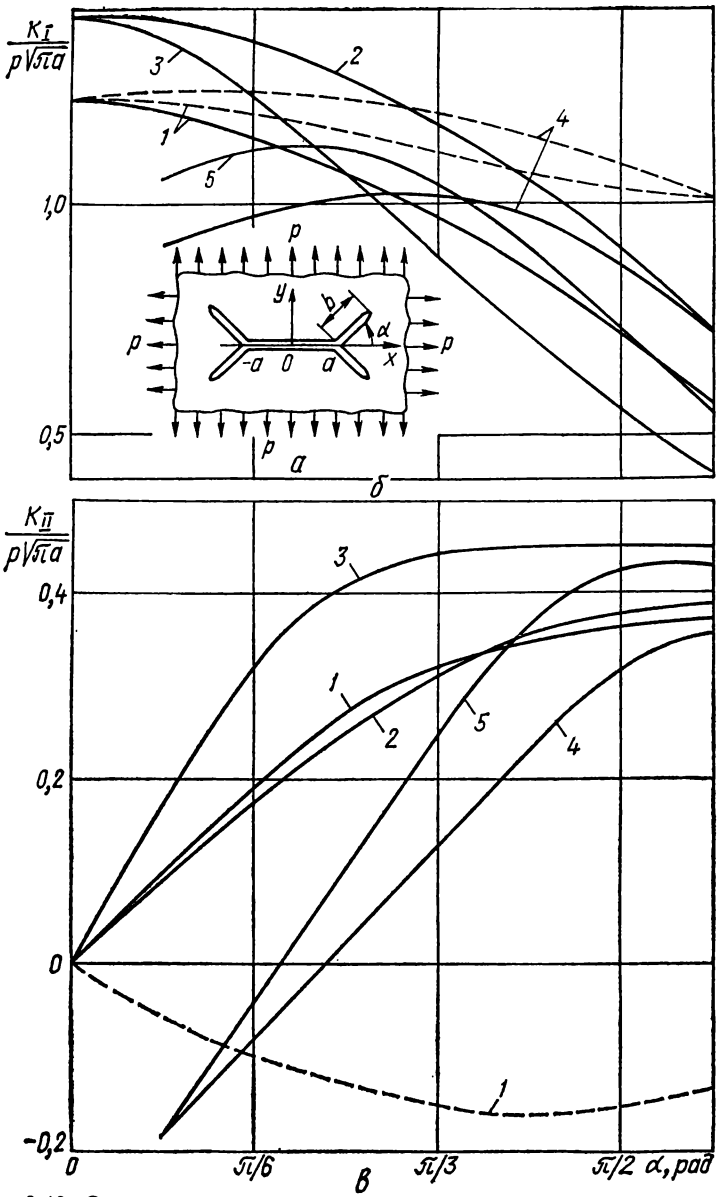


Рис. 2.48. Схема ломаных и ветвящихся трещин в бесконечной плоскости при всестороннем растяжении (*а*) и зависимости КИН K_I (*б*) и K_{II} (*в*) от угла α в вершине боковой трещины A (сплошные кривые) и левой вершине основной трещины (штриховые кривые) для ломаных двухзвенной (*1*) и трехзвенных трещин с центром симметрии (*2*) и осью симметрии (*3*), а также для симметричной (*4*) и двоякосимметричной (*5*) трещин ветвления при $b/a = 1$ [3, 50].

Таблица 2.7. Значения функций $B_{N1}(\alpha)$ и $B_{N2}(\alpha)$ [54]

α/π	$B_{I1}(\alpha)$	$B_{III}(\alpha)$	$B_{I2}(\alpha)$	$B_{II2}(\alpha)$
0,00	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000
0,02	0,9985	0,0314	—0,0941	0,9969
0,04	0,9940	0,0625	—0,1877	0,9877
0,06	0,9867	0,0932	—0,2800	0,9724
0,08	0,9766	0,1232	—0,3707	0,9513
0,10	0,9636	0,1523	—0,4590	0,9245
0,12	0,9480	0,1803	—0,5444	0,8921
0,14	0,9298	0,2070	—0,6265	0,8546
0,16	0,9092	0,2323	—0,7047	0,8123
0,18	0,8864	0,2559	—0,7787	0,7655
0,20	0,8614	0,2777	—0,8479	0,7147
0,22	0,8346	0,2976	—0,9121	0,6602
0,24	0,8061	0,3155	—0,9710	0,6026
0,26	0,7760	0,3313	—1,0240	0,5424
0,28	0,7447	0,3450	—1,0716	0,4801
0,30	0,7123	0,3565	—1,1131	0,4161
0,32	0,6790	0,3658	—1,1148	0,3510
0,34	0,6451	0,3729	—1,1177	0,2853
0,36	0,6106	0,3778	—1,2003	0,2195
0,38	0,5760	0,3806	—1,2170	0,1542
0,40	0,5412	0,3813	—1,2276	0,0897
0,42	0,5066	0,3801	—1,2321	0,0266
0,44	0,4723	0,3770	—1,2309	—0,0347
0,46	0,4384	0,3722	—1,2239	—0,0939
0,48	0,4051	0,3657	—1,2115	—0,1505
0,50	0,3724	0,3578	—1,1939	—0,2043
0,52	0,3406	0,3485	—1,1713	—0,2549
0,54	0,3097	0,3380	—1,1144	—0,3019
0,56	0,2797	0,3266	—1,1122	—0,3453
0,58	0,2509	0,3142	—1,0763	—0,3848
0,60	0,2231	0,3010	—1,0367	—0,4201
0,62	0,1964	0,2871	—0,9935	—0,4511
0,64	0,1710	0,2729	—0,9472	—0,4777
0,66	0,1467	0,2581	—0,8981	—0,4997
0,68	0,1237	0,2430	—0,8467	—0,5169
0,70	0,1019	0,2277	—0,7932	—0,5293
0,72	0,0817	0,2121	—0,7386	—0,5367
0,74	0,0629	0,1965	—0,6832	—0,5393
0,76	0,0458	0,1808	—0,6279	—0,5372
0,78	0,0307	0,1652	—0,5736	—0,5309
0,80	0,0179	0,1500	—0,5208	—0,5214

ными численными результатами во всем диапазоне изменения угла α. В работе [65] приведены формулы

$$B_{I1}(\alpha) = (1/2)\cos(\alpha/2)(1+\cos\alpha)(1+0{,}051\xi^4), \quad \xi = 2\alpha/\pi,$$

$$B_{I2}(\alpha) = (3/2)\cos(\alpha/2)\sin\alpha(1+0{,}060\xi^2+0{,}064\xi^4),$$

$$B_{III}(\alpha) = (1/2)\cos(\alpha/2)\sin\alpha\,(1 - 0{,}048\xi^2 + 0{,}033\xi^4),$$

$$B_{II2}(\alpha) = (1/2)\cos(\alpha/2)\,(3\cos\alpha - 1) + 0{,}242\xi^2 - 0{,}085\xi^4,\ -1 \leqslant \xi \leqslant 1,$$

которые аппроксимируют численные результаты [65] с относительной погрешностью, не превышающей 0,3 %.

Трехзвенные ломаные трещины. Пусть в бесконечной плоскости имеется ломаная трещина, состоящая из трех участков. Трещина свободна от нагрузки, а на бесконечности задано одноосное ($\lambda = 0$) или всестороннее ($\lambda = 1$) растяжение (рис. 2.50, 2.51). Численные результаты для рассматриваемых задач, полученные методом СИУ [3, 50], проиллюстрированы для $a/b = 1$ на рис. 2.47 и 2.48. Кривые *2* и *3* относятся к правым вершинам трещин, изображенных на рис. 2.50 и 2.51. При этом КИН для левой вершины B равны: $K_I(B) = K_I(A)$, $K_{II}(B) = K_{II}(A)$ (см. рис. 2.50) или $K_{II}(B) = -K_{II}(A)$ (см. рис. 2.51). Численные результаты для ломаной трещины с центром симметрии (см. рис. 2.50) имеются также в работах [66, 67]. В работе [68] приведены КИН для симметричной ломаной трещины (см. рис. 2.51), когда с верхним берегом основной трещины по всей ее длине $2a$ соединена жесткая пластина, симметрично нагруженная нормальной сосредоточенной силой.

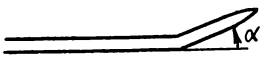
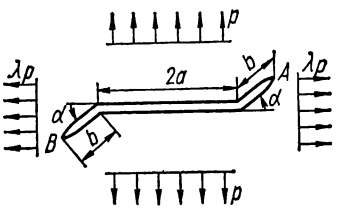


Рис. 2.49. Схема трещины с бесконечно малым отростком.



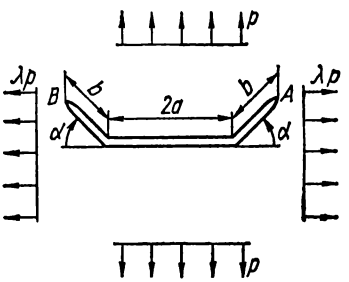


Рис. 2.50. Трехзвенная ломаная трещина, симметричная относительно своего центра.

Рис. 2.51. Трехзвенная ломаная трещина с осью симметрии, перпендикулярной основной трещине.

В случае бесконечно малых отростков КИН в вершинах отростков выражаются через КИН для основной трещины такими же зависимостями (2.21), как и в рассмотренном случае двухзвенной трещины.

2.7. Трещины ветвления

Симметричная трехзвенная трещина ветвления. Пусть бесконечная плоскость ослаблена прямолинейной трещиной длины $2a$, из правого конца которой симметрично выходят две боковые трещины длины b. На бесконечности плоскость находится под действием двухосного растяжения (рис. 2.52). В табл. 2.8 приведены значения КИН в случае одноосного

растяжения ($\lambda = 0$) для $2a/b = 1$ и $2a/b = 4$, полученные методом СИУ [69].

На рис. 2.47 и 2.48 (кривые *4*) приведены зависимости КИН от угла α для $a = b$ при одноосном ($\lambda = 0$) и всестороннем ($\lambda = 1$) растяжении пластины. Эти результаты также получены методом СИУ [3, 50].

Таблица 2.8. **Значения КИН для симметричной трещины ветвления при одноосном растяжении ($\lambda = 0$) [69]**

α	$2a/b = 1$			$2a/b = 4$		
	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{4\pi c}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{2\pi b}}$	$\frac{K_{II}(B)}{p\sqrt{2\pi b}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{4\pi c}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{2\pi b}}$	$\frac{K_{II}(B)}{p\sqrt{2\pi b}}$
$\pi/18$	0,6995	0,5059	0,0420	0,5589	0,8040	0,0792
$\pi/9$	0,7073	0,4986	0,1360	0,5623	0,8032	0,1744
$\pi/6$	0,7012	0,4483	0,2311	0,5604	0,7397	0,3066
$\pi/5$	0,6939	0,4036	0,2777	0,5578	0,6798	0,3794
$\pi/4$	0,6800	0,3229	0,3276	0,5524	0,5667	0,4675
$\pi/3$	0,6530	0,1722	0,3514	0,5409	0,3397	0,5431
$\pi/2$	0,6008	—0,0550	0,1935	0,5174	—0,1014	0,4257

В табл. 2.9 приведены полученные методом последовательных приближений [70] значения КИН при одноосном растяжении пластины с трещиной ветвления (см. рис. 2.52, $\lambda = 0$), когда $\alpha = \pi/4$, для различных отношений длин отростков и основной трещины. В работе [70] приведены также КИН при заданных на бесконечности сдвигающих напряжениях. Численные результаты для рассматриваемой конфигурации трещины имеются также в работах [47, 48, 51, 53, 71].

Данные по КИН для несимметричной трехзвенной трещины ветвления приведены в работах [70, 72].

Симметричная трещина ветвления с бесконечно малыми отростками. В этом случае КИН в вершине отростка B можно представить в виде

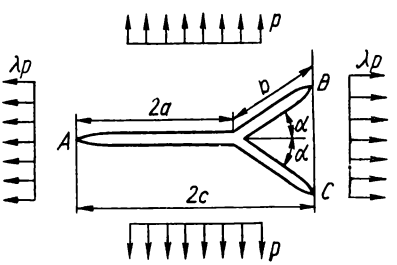


Рис. 2.52. Растяжение бесконечной пластины с симметричной трехзвенной трещиной ветвления.

$$K_N(B) = K_I^* C_{N1}(\alpha) + K_{II}^* C_{N2}(\alpha) \quad (N = I, II),$$

где K_I^* и K_{II}^* — КИН для основной трещины при отсутствии отростков. Значения функций $C_{N1}(\alpha)$ и $C_{N2}(\alpha)$, полученные [70] в результате решения задачи методом последовательных приближений, приведены в табл. 2.10. В случае симметричной нагрузки ($K_{II}^* = 0$) эти результаты согласуются с данными работ [50, 51, 55, 73]. В работе [73] имеются также значения КИН при симметричной нагрузке, когда из вершины основной трещины симметрично выходят три и больше отростков бесконечно малой длины.

Таблица 2.9. **Значения КИН для симметричной трехзвенной трещины ветвления при одноосном растяжении ($\lambda = 0$) для $\alpha = \pi/4$ [70]**

$\frac{b}{2a}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_{II}(B)}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{b}{2a}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_{II}(B)}{p\sqrt{\pi c}}$
0	1,000	0,712	0,146	0,1	1,010	0,560	0,347
0,001	1,000	0,692	0,170	0,2	1,015	0,528	0,405
0,005	1,001	0,669	0,198	0,3	1,019	0,512	0,438
0,01	1,002	0,652	0,218	0,4	1,023	0,504	0,460
0,02	1,003	0,631	0,246	0,5	1,026	0,500	0,474
0,03	1,004	0,615	0,267	0,6	1,029	0,497	0,485
0,05	1,006	0,593	0,297	0,7	1,032	0,496	0,493

Таблица 2.10. **Значения функций $C_{N1}(\alpha)$ и $C_{N2}(\alpha)$ [70]**

$180\alpha/\pi$	$C_{II}(\alpha)$	$C_{III}(\alpha)$	$C_{I2}(\alpha)$	$C_{II2}(\alpha)$
2,5	0,689	—0,195	...	...
5	0,699	—0,178	...	...
10	0,718	—0,141	—0,726	0,468
15	0,732	—0,101	—0,805	0,438
20	0,742	—0,060	—0,867	0,424
30	0,746	0,025	—0,978	0,378
40	0,728	0,107	—1,069	0,305
45	0,712	0,146	—1,105	0,261
50	0,691	0,183	—1,136	0,213
60	0,635	0,245	—1,177	0,105
70	0,564	0,291	—1,190	—0,009
80	0,483	0,316	—1,173	—0,124
90	0,398	0,321	—1,127	—0,231

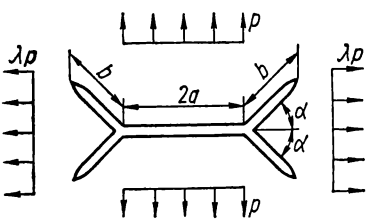


Рис. 2.53. Растяжение бесконечной пластины с двоякосимметричной трещиной ветвления.

Двоякосимметричная трещина ветвления. Бесконечная плоскость ослаблена прямолинейным разрезом длины $2a$, из правой и левой вершин которого выходят симметрично по два одинаковых отростка длины b. На бесконечности задано двухосное растяжение (рис. 2.53).

В табл. 2.11 и 2.12 приведены значения КИН в случае одноосного растяжения ($\lambda = 0$). Эти данные получены методом СИУ [66].

На рис. 2.47 и 2.48 (кривые *5*) проиллюстрированы зависимости КИН от угла α для $a = b$ при одноосном ($\lambda = 0$) и всестороннем ($\lambda = 1$) растяжении пластины [3, 50]. Данные по КИН для рассматриваемой конфигурации трещины приведены также в работах [51, 53, 74]. В работе [66] имеются численные результаты для случая трещины ветвления с неравными отростками, симметричной относительно своего центра.

2.8. Система радиальных трещин, выходящих из одной точки

Звездообразная трещина. Бесконечная плоскость ослаблена системой равномерно распределенных трещин равной длины, пересекающихся в одной точке. Если на берегах трещин действует одинаковая симметричная ($K_{II} = 0$) нормальная нагрузка, то КИН выражается в квадратурах [75]. В частности, при действии на трещинах постоянного давления σ или при всестороннем

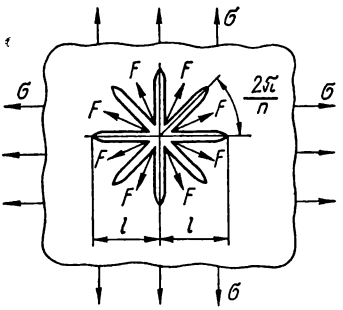


Рис. 2.54. Всестороннее растяжение бесконечной плоскости с звездообразной трещиной.

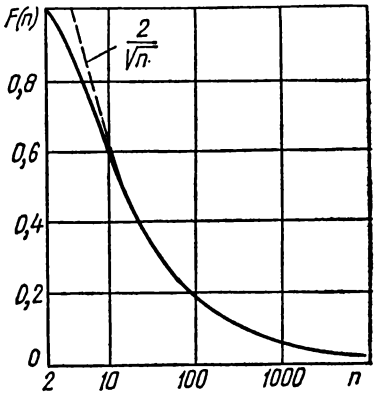
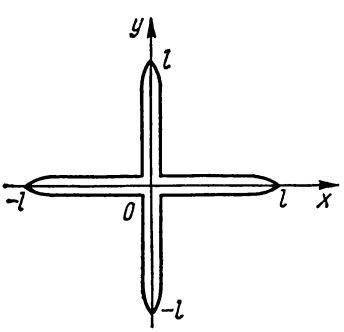


Рис. 2.55. Зависимость КИН $K_I/\sigma\sqrt{\pi l} = F(n)$ от числа трещин n для звездообразной трещины при действии постоянного давления [9, 76].

растяжении плоскости на бесконечности напряжениями σ (рис. 2.54, $F = 0$), имеем

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l}\,F(n),$$

$$F(n) = 2^{1-\frac{2}{n}}\sqrt{\frac{2}{n}}\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln\left(1 + x\sin(2\pi/n)\,\mathrm{csch}\,(2\pi x/n)\right)dx}{1+x^2}\right\},$$



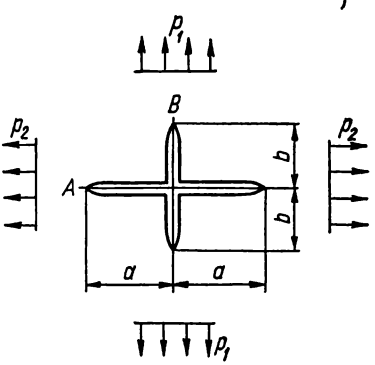


Рис. 2.56. Схема крестообразной трещины.

Рис. 2.57. Растяжение бесконечной плоскости с несимметричной крестообразной трещиной.

Таблица 2.11. Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ для двоякосимметричной

$\frac{b}{a}$	180 α/π						
	5	7,5	10	12,5	15	20	25
0,01	0,752	0,743	0,740	0,738	0,735	0,738	0,736
0,05	0,771	0,761	0,756	0,753	0,752	0,746	0,735
0,1	0,792	0,781	0,776	0,772	0,773	0,761	0,745
0,2	0,831	0,820	0,814	0,809	0,812	0,791	0,770
0,3	0,869	0,857	0,850	0,844	0,842	0,822	0,797
0,5	0,938	0,925	0,917	0,918	0,903	0,882	0,850
0,7	1,002	0,989	0,980	0,983	0,963	0,939	0,903
1,0	1,091	1,077	1,067	1,068	1,048	1,019	0,977
1,5	1,225	1,210	1,198	1,195	1,175	1,141	1,090
2,0	1,346	1,318	1,316	1,304	1,290	1,251	1,193
3,0	1,559	1,535	1,533	1,510	1,493	1,446	1,377
5,0	1,910	1,894	1,890	1,855	1,834	1,774	1,685
7,0	2,213	2,180	2,177	2,145	2,120	2,050	1,946
10,0	2,598	2,564	2,558	2,518	2,489	2,405	2,282

Таблица 2.12. Значения КИН $K_{II}/(p\sqrt{\pi l})$ для двоякосимметричной

$\frac{b}{a}$	180 α/π						
	5	7,5	10	12,5	15	20	25
0,01	—0,219	—0,163	—0,124	—0,094	—0,069	—0,021	0,026
0,05	—0,209	—0,146	—0,102	—0,068	—0,038	0,018	0,072
0,1	—0,203	—0,135	—0,088	—0,050	—0,017	0,045	0,105
0,2	—0,199	—0,124	—0,071	—0,028	0,009	0,080	0,147
0,3	—0,199	—0,118	—0,060	—0,013	0,028	0,105	0,178
0,5	—0,202	—0,111	—0,046	0,007	0,054	0,142	0,224
0,7	—0,207	—0,108	—0,036	0,022	0,073	0,169	0,259
1,0	—0,217	—0,106	—0,026	0,038	0,096	0,203	0,302
1,5	—0,233	—0,107	—0,016	0,058	0,124	0,246	0,359
2,0	—0,250	—0,110	—0,008	0,074	0,147	0,282	0,406
3,0	—0,281	—0,117	0,002	0,098	0,184	0,341	0,484
5,0	—0,336	—0,132	0,015	0,134	0,240	0,433	0,608
7,0	—0,383	—0,147	0,024	0,162	0,285	0,509	0,711
10,0	—0,445	—0,167	0,034	0,196	0,341	0,604	0,841

где n — число трещин. При $n \to \infty$ функция $F(n) \to 2/\sqrt{n}$ [75, 76].

На рис. 2.55 проиллюстрированы зависимости функций $F(n)$ (сплошная линия) и $2/\sqrt{n}$ (штриховая линия) от числа трещин n [9, 76]. Аналогичные данные, полученные методом конформного отображения [48], приведены в табл. 2.13. Здесь же даются значения функции $2/\sqrt{n}$, а также приближенного решения $F^*(n) = 2\sqrt{(n-1)}/n$ $(n \geqslant 2)$, определяющего КИН для случая гипоциклоидального остроконечного отверстия [77]. Численные результаты для этого случая нагрузки приведены также в работах [6, 78].

Если нагрузка на бесконечности отсутствует, а в вершинах клиньев, образованных трещинами, приложены равные по величине сосредоточен-

трещины ветвления при одноосном растяжении ($\lambda = 0$) [66]

30	40	45	50	60	70	80	90
0,724	0,688	0,662	0,631	0,557	0,471	0,380	0,289
0,718	0,663	0,627	0,586	0,491	0,387	0,280	0,180
0,723	0,654	0,611	0,562	0,452	0,333	0,216	0,108
0,740	0,654	0,600	0,541	0,410	0,272	0,139	0,021
0,761	0,662	0,601	0,535	0,388	0,237	0,093	—0,031
0,807	0,688	0,616	0,538	0,370	0,202	0,046	—0,084
0,853	0,719	0,638	0,552	0,369	0,188	0,027	—0,102
0,919	0,767	0,676	0,579	0,377	0,184	0,017	—0,108
1,022	0,844	0,739	0,628	0,401	0,188	0,013	—0,110
1,116	0,916	0,799	0,675	0,425	0,195	0,010	—0,111
1,285	1,047	0,908	0,764	0,472	0,209	0,006	—0,113
1,569	1,269	1,096	0,915	0,555	0,237	0,002	—0,115
1,809	1,458	1,256	1,046	0,664	0,263	—0,001	—0,118
2,120	1,703	1,464	1,216	0,725	0,298	—0,004	—0,122

трещины ветвления при одноосном растяжении ($\lambda = 0$) [66]

30	40	45	50	60	70	80	90
0,073	0,161	0,200	0,235	0,292	0,327	0,339	0,327
0,125	0,221	0,262	0,298	0,350	0,376	0,374	0,346
0,162	0,264	0,307	0,343	0,394	0,414	0,402	0,362
0,211	0,323	0,368	0,405	0,454	0,466	0,442	0,387
0,247	0,366	0,413	0,451	0,498	0,504	0,471	0,405
0,301	0,431	0,481	0,520	0,562	0,558	0,510	0,427
0,342	0,481	0,532	0,572	0,609	0,594	0,532	0,434
0,393	0,541	0,594	0,633	0,663	0,633	0,551	0,431
0,460	0,621	0,677	0,714	0,733	0,680	0,570	0,419
0,516	0,689	0,746	0,783	0,792	0,722	0,586	0,410
0,611	0,804	0,865	0,901	0,896	0,797	0,622	0,400
0,762	0,912	1,061	1,099	1,075	0,932	0,692	0,389
0,888	1,149	1,226	1,265	1,228	1,050	0,757	0,383
1,048	1,351	1,438	1,480	1,427	1,205	0,845	0,376

ные радиальные силы F (см. рис. 2.54; $\sigma = 0$), для КИН ($K_{II} = 0$) известно замкнутое выражение [77, 79]

$$K_I = (F/\sqrt{\pi l})\sqrt{n/2}/\sqrt{1 + (n/2\pi)\sin(2\pi/n)} \quad (n \geqslant 2).$$

В работе [80] приведено решение задачи в квадратурах для звездообразной закрытой трещины (отсутствуют скачки нормальных напряжений при переходе через контур трещины) при действии на ее берегах касательных напряжений, а на бесконечности — однородной сжимающей нагрузки.

Крестообразная трещина. Частный случай звездообразной трещины при $n = 4$ — крестообразная трещина (рис. 2.56) [53, 81—83]. При

действии на берегах трещины симметричной ($K_{II} = 0$) нормальной полиномиальной нагрузки

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y(x, 0) &= -p_0(|x|/l)^{m-1},\ \tau_{xy}(x, 0) = 0\ (|x| \leqslant l), \\ \sigma_x(0, y) &= -p_0(|y|/l)^{m-1},\ \tau_{xy}(0, y) = 0\ (|y| \leqslant l), \end{aligned}\right\} \qquad (2.22)$$

Таблица 2.13. **Значения КИН для звездообразной трещины при действии постоянного давления** [48]

n	$K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$	$2\sqrt{n-1/n}$	$2/\sqrt{n}$	n	$K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$	$2\sqrt{n-1/n}$	$2/\sqrt{n}$
2	1,0000	1,0000	1,4142	20	0,4348	0,4359	0,4472
3	0,9415	0,9428	1,1547	30	0,3583	0,3590	0,3651
4	0,8636	0,8660	1,0000	40	0,3117	0,3122	0,3162
5	0,7972	0,8000	0,8944	50	0,2796	0,2800	0,2828
8	0,6592	0,6614	0,7071	100	0,1987	0,1990	0,2000
10	0,5979	0,6000	0,6325	400	0,0997	0,0999	0,1000
12	0,5511	0,5528	0,5774				

КИН выражаются в квадратурах [82, 83]

$$K_I = p_0\sqrt{l}\,\Gamma(m/2)\exp[-k_+(im)]/\Gamma((m+1)/2) \quad (m > 0), \qquad (2.23)$$

где $\Gamma(m)$ — гамма-функция;

$$k_+(im) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln[1 + m\,\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{csch}((m\pi/2)\,\mathrm{tg}\,x)]\,dx. \qquad (2.24)$$

Ниже приведены значения КИН $K_I = p_0\sqrt{2\pi l}\,F_I$, вычисленные по формуле (2.23) для некоторых значений m [83]:

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_I	0,4069	0,3277	0,2826	0,2523	0,2302	0,2130	0,1992	0,1878	0,1782	0,1700

Таблица 2.14. **Значение функций $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$** [84]

a/b	$A(a/b)$	$B(a/b)$	$A(b/a)$	$B(b/a)$
0,1	1,1216	—0,0005	1,0005	—0,0958
0,2	1,1213	—0,0039	1,0032	—0,8550
0,3	1,1203	—0,0125	1,0092	—0,7330
0,4	1,1182	—0,0274	1,0182	—0,6225
0,5	1,1147	—0,0489	1,0292	—0,5250
0,6	1,1097	—0,0763	1,0410	—0,4307
0,7	1,1034	—0,1082	1,0521	—0,3691
0,8	1,0963	—0,1433	1,0634	—0,3066
0,9	1,0888	—0,1801	1,0730	—0,2590
1,0	1,0812	—0,2176	1,0812	—0,2176

Несимметричная крестообразная трещина. Бесконечная плоскость, ослабленная крестообразной трещиной с неравными ветвями, находится на бесконечности под действием симметричного двухосного растяжения напряжениями p_1 и p_2 (рис. 2.57). КИН K_I в вершинах A и B можно представить в виде

$$K_I(A) = \sqrt{\pi a}\,[p_1 A(a/b) + p_2 B(b/a)],$$

$$K_I(B) = \sqrt{\pi b}\,[p_1 B(a/b) + p_2 A(b/a)].$$

Таблица 2.15. **Значения КИН для Т-образной трещины [88]**

c/a	Растяжение вдоль ветви OB ($p_1 = 0$)			Растяжение вдоль ветви OA ($p_2 = 0$)		
	$\frac{K_I(A)}{p_2\sqrt{\pi c/2}}$	$\frac{K_I(B)}{p_2\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(B)}{p_2\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I(A)}{p_1\sqrt{\pi c/2}}$	$\frac{K_I(B)}{p_1\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(B)}{p_1\sqrt{\pi a}}$
0,0219	1,584	—0,000	—0,000	—1,542	1,000	0,000
0,0492	1,583	—0,000	—0,002	—1,489	1,000	0,001
0,100	1,576	—0,000	—0,006	—1,384	1,000	0,006
0,200	1,549	—0,002	—0,024	—1,178	1,002	0,020
0,400	1,458	—0,013	—0,083	—0,795	1,008	0,058
0,600	1,358	—0,033	—0,154	—0,501	1,017	0,090
0,800	1,272	—0,057	—0,221	—0,303	1,024	0,111
1,000	1,208	—0,081	—0,279	—0,176	1,029	0,122
1/0,800	1,152	—0,095	—0,302	—0,083	0,923	0,114
1/0,600	1,100	—0,106	—0,318	—0,013	0,800	0,101
1/0,400	1,057	—0,102	—0,319	0,024	0,653	0,082
1/0,201	1,028	—0,054	—0,298	0,021	0,463	0,056
1/0,024	1,005	0,137	—0,250	0,001	0,161	0,019

В табл. 2.14 приведены значения функций $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$, полученные в работе [84] на основе численного решения интегрального уравнения. Данные по КИН для рассматриваемой трещины имеются также в работах [85, 86]. Рассматривался также более общий случай, когда две трещины пересекаются под произвольным углом (X-образная трещина) [38, 87].

Т-образная трещина. Бесконечная плоскость, ослабленная Т-образной трещиной, находится на бесконечности под действием двухосного растяжения, симметричного относительно ветви OA (рис. 2.58). КИН в вершинах B и A ($K_{II}(A)=0$) приведены в табл. 2.15 для двух случаев одноосного растяжения — параллельно ($p_2 = 0$) или перпендикулярно ($p_1 = 0$) ветви трещины OA. Численные результаты получены методом конформных отображений [88]. В этой же работе приведены данные по КИН при действии на бесконечности сдвигающих напряжений. В работах [47, 70] найдены также КИН для случая, когда ветвь OA образует с основной трещиной BC угол $\alpha = \pi/4$ [70] и $\alpha = \pi/6$ [47].

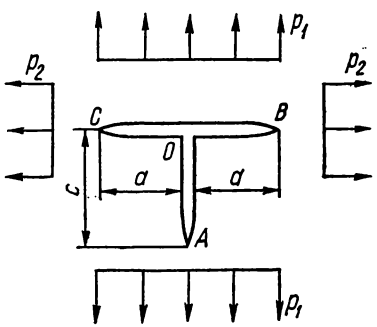


Рис. 2.58. Растяжение бесконечной плоскости с Т-образной трещиной.

2.9. Система коллинеарных трещин в бесконечной плоскости

Две трещины равной длины. Пусть бесконечная плоскость содержит два равных коллинеарных разреза вдоль оси Ox на отрезках $-b \leqslant x \leqslant -a$ и $a \leqslant x \leqslant b$ (рис. 2.59). На бесконечности напряжения отсутствуют, а берега трещины находятся под действием произвольной несамоуравновешенной нагрузки

$$\sigma_y(x, 0 \pm) = \begin{cases} -p_1^{\pm}(x) & (-b \leqslant x \leqslant -a), \\ -p_2^{\pm}(x) & (a \leqslant x \leqslant b), \end{cases}$$

$$\tau_{xy}(x, 0 \pm) = \begin{cases} \pm q_1^{\pm}(x) & (-b \leqslant x \leqslant -a), \\ \pm q_2^{\pm}(x) & (a \leqslant x \leqslant b), \end{cases}$$

КИН определены в квадратурах [89]:

$$K_{\mathrm{I}}(\pm b) = \frac{C_5 \pm C_7}{\sqrt{b(b^2-a^2)}} + \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b\sqrt{\pi b}} \int_a^b \frac{y[bP_1(y) \mp yP_2(y)]\,dy}{\sqrt{(y^2-a^2)(b^2-y^2)}},$$

$$K_{\mathrm{I}}(\pm a) = \frac{C_6 \pm C_8}{\sqrt{a(b^2-a^2)}} + \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a\sqrt{\pi a}} \int_a^b \frac{y[aP_1(y) \mp yP_2(y)]\,dy}{\sqrt{(y^2-a^2)(b^2-y^2)}},$$

$$K_{\mathrm{II}}(\pm b) = -\frac{C_1 \mp C_3}{\sqrt{b(b^2-a^2)}} - \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b\sqrt{\pi b}} \int_a^b \frac{y[bQ_1(y) \pm yQ_2(y)]\,dy}{\sqrt{(y^2-a^2)(b^2-y^2)}},$$

$$K_{\mathrm{II}}(\pm a) = \frac{C_2 \mp C_4}{\sqrt{a(b^2-a^2)}} - \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a\sqrt{\pi a}} \int_a^b \frac{y[aQ_1(y) \pm yQ_2(y)]\,dy}{\sqrt{(y^2-a^2)(b^2-y^2)}},$$

$$C_1 = \frac{b\sqrt{\pi}}{2K(k)} \left[\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \int_a^b p_0(y)\,dy + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{t^2-a^2}{b^2-t^2}}\,dt \int_a^b \sqrt{\frac{b^2-y^2}{y^2-a^2}} \frac{yQ_1(y)\,dy}{y^2-t^2} \right],$$

$$C_2 = \frac{b\sqrt{\pi}}{2K(k)} \left[\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \int_a^b p_0(y)\,dy + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{b^2-t^2}{t^2-a^2}}\,dt \int_a^b \sqrt{\frac{y^2-a^2}{b^2-y^2}} \frac{yQ_1(y)\,dy}{y^2-t^2} \right],$$

$$C_3 = \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \int_a^b \sqrt{\frac{b^2 - y^2}{y^2 - a^2}}\, Q_2(y)\, dy,\quad C_4 = -\frac{b^2}{\sqrt{\pi}} \int_a^b \sqrt{\frac{y^2 - a^2}{b^2 - y^2}}\, Q_2(y)\, dy,$$

$$C_5 = \frac{b\sqrt{\pi}}{2K(k)} \left[\frac{2}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{t^2 - a^2}{b^2 - t^2}}\, dt \int_a^b \sqrt{\frac{b^2 - y^2}{y^2 - a^2}}\, \frac{yP_1(y)\, dy}{y^2 - t^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \int_a^b q_0(y)\, dy \right],$$

$$C_6 = \frac{b\sqrt{\pi}}{2K(k)} \left[\frac{2}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{b^2 - t^2}{t^2 - a^2}}\, dt \int_a^b \sqrt{\frac{y^2 - a^2}{b^2 - y^2}}\, \frac{yP_1(y)\, dy}{y^2 - t^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \int_a^b q_0(y)\, dy \right],$$

$$C_7 = \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \int_a^b \sqrt{\frac{b^2 - y^2}{y^2 - a^2}}\, P_2(y)\, dy,\quad C_8 = -\frac{b^2}{\sqrt{\pi}} \int_a^b \sqrt{\frac{y^2 - a^2}{b^2 - y^2}}\, P_2(y)\, dy,$$

$$Q_1(x) = (1/2)\,[q_1^+(x) + q_2^+(x) - q_2^-(x) - q_1^-(x)],$$

$$Q_2(x) = (1/2)\,[q_2^+(x) - q_1^+(x) - q_2^-(x) + q_1^-(x)],$$

$$P_1(x) = (1/2)\,[p_1^-(x) + p_2^-(x) + p_1^+(x) + p_2^+(x)],$$

$$P_2(x) = (1/2)\,[p_1^+(x) + p_1^-(x) - p_2^+(x) - p_2^-(x)],$$

$$p_0(x) = (1/2)\,[p_2^+(x) - p_2^-(x) - p_1^+(x) + p_1^-(x)],$$

$$q_0(x) = (1/2)\,[q_2^+(x) + q_2^-(x) - q_1^+(x) - q_1^-(x)],$$

$K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $k = \sqrt{b^2 - a^2}/b$.

Пусть берега трещин находятся под действием различной постоянной нормальной нагрузки (рис. 2.60):

$$p_1^+(x) = p_1^-(x) = p_1,\quad p_2^+(x) = p_2^-(x) = p_2,\quad q_1^\pm(x) = q_2^\pm(x) = 0.$$

Тогда [89]

$$K_I(\pm b) = \sqrt{\pi}\,\{b^2(p_1 + p_2)\,[1 - E(k)/K(k)] \pm$$

$$\pm (2/\pi)\,(p_1 - p_2)\,[a^2K(k) - b^2E(k)]\}/(2\sqrt{b\,(b^2 - a^2)}),$$

$$K_I(\pm a) = \sqrt{\pi}\,\{a^2(p_1 + p_2)\,[b^2E(k)/(a^2K(k)) - 1] \pm$$

$$\pm (2ba/\pi)\,(p_1 - p_2)\,[E(k) - K(k)]\}/(2\sqrt{a\,(b^2 - a^2)}),$$

$$K_{II}(\pm a) = K_{II}(\pm b) = 0,$$

где $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Когда берега трещин нагружены постоянными различными нормальными и одинаковыми сдвигающими напряжениями (рис. 2.61), т. е.

$$p_1^+(x) = p_2^-(x) = p_1, \quad p_2^+(x) = p_1^-(x) = p_2,$$

$$q_1^+(x) = q_1^-(x) = -q_2^+(x) = -q_2^-(x) = q,$$

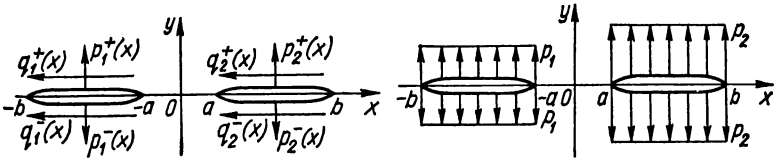


Рис. 2.59. Две равные коллинеарные трещины при произвольной нагрузке.

Рис. 2.60. Две равные коллинеарные трещины при действии постоянной нормальной нагрузки.

то [89]*

$$K_I(b) = K_I(-b) = \sqrt{\pi}\,\{2qb\,(b-a)\,(\varkappa-1)/(\varkappa+1) +$$

$$+ b^2\,(p_1+p_2)\,[K(k) - E(k)]\}/(2K(k)\sqrt{b\,(b^2-a^2)}),$$

$$K_I(a) = K_I(-a) = \sqrt{\pi}\,\{(p_1+p_2)\,[b^2E(k) - a^2K(k)] -$$

$$- 2qb\,(b-a)\,(\varkappa-1)/(\varkappa+1)\}/(2K(k)\sqrt{a\,(b^2-a^2)}),$$

$$K_{II}(b) = -K_{II}(-b) = -b\,(p_2-p_1)\,(\varkappa-1)\times$$

$$\times\sqrt{\pi\,(b-a)/(b\,(b+a))}/[2K(k)\,(\varkappa+1)],$$

$$K_{II}(a) = -K_{II}(-a) = b\,(p_2-p_1)\,(\varkappa-1)\times$$

$$\times\sqrt{\pi\,(b-a)/(a\,(b+a))}/[2K(k)\,(\varkappa+1)].$$

При действии на верхнем берегу правой трещины сосредоточенных нормальной P и сдвигающей Q сил (рис. 2.62) КИН равны [6, 9, 11]

$$K_I(\pm b) = \{P\sqrt{d^2-a^2}\sqrt{(b\pm d)/(b\mp d)} + ((\varkappa-1)/(\varkappa+1))\,[1\pm$$

$$\pm\pi/2K(k)]\,Qb \mp Pb\,[E(k)\,F(\theta,k) -$$

$$- K(k)\,E(\theta,k)]/K(k)\}/(2\sqrt{\pi b}\sqrt{b^2-a^2}),$$

$$K_{II}(\pm b) = \{Q\sqrt{d^2-a^2}\sqrt{(b\pm d)/(b\mp d)} -$$

$$- ((\varkappa-1)/(\varkappa+1))\,[1\pm\pi/2K(k)]\,Pb \mp Qb\,[E(k)\,F(\theta,k) -$$

$$- K(k)\,E(\theta,k)]/K(k)\}/(2\sqrt{\pi b}\sqrt{b^2-a^2}),$$

$$K_I(\pm a) = \{P\sqrt{b^2-d^2}\sqrt{(d\pm a)/(d\mp a)} -$$

$$- ((\varkappa-1)/(\varkappa+1))\,[a\pm\pi b/2K(k)]\,Q \pm Pb\,[E(k)\,F(\theta,k) -$$

$$- K(k)\,E(\theta,k)]/K(k)\}/(2\sqrt{\pi a}\sqrt{b^2-a^2}),$$

* Здесь исправлены опечатки, допущенные в работе [89].

$$K_{II}(\pm a) = \{Q\sqrt{b^2 - d^2}\sqrt{(d \pm a)/(d \mp a)} +$$

$$+ ((\varkappa - 1)/(\varkappa + 1))\,[a \pm \pi b/2K(k)]\,P \pm Qb\,[E(k)\,F(\theta, k) -$$

$$- K(k)\,E(\theta, k)]/K(k)\}/(2\sqrt{\pi a}\sqrt{b^2 - a^2}),$$

где $F(\theta, k)$ и $E(\theta, k)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно с параметром $\theta = \sqrt{(b^2 - d^2)/(b^2 - a^2)}$.

Пусть берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности плоскость находится под действием растягивающих (σ) и сдвигающих (τ) напряжений (рис. 2.63). Тогда [2, 5, 8, 9, 11, 90, 91]

$$K_I(\pm a) - iK_{II}(\pm a) = (\sigma - i\tau)\sqrt{\pi a}\,[b^2E(k) - a^2K(k)]/[aK(k)\sqrt{b^2 - a^2}],$$

$$K_I(\pm b) - iK_{II}(\pm b) = (\sigma - i\tau)\sqrt{\pi b}\,(b/\sqrt{b^2 - a^2})\,[1 - E(k)/K(k)].$$

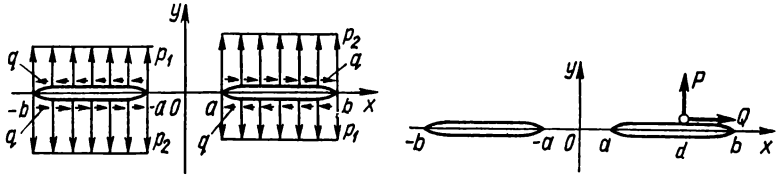


Рис. 2.61. Две равные коллинеарные трещины при действии на их берегах постоянных различных нормальных и одинаковых сдвигающих нагрузок.

Рис. 2.62. Две равные коллинеарные трещины при действии сосредоточенных сил на верхнем берегу правой трещины.

При симметричном растяжении двумя сосредоточенными силами бесконечной плоскости с двумя равными коллинеарными трещинами (рис. 2.64) КИН даются формулами [92]

$$K_I(\pm a) = (P/\sqrt{\pi l})\,\{(\varkappa + 1)\,[(1 + \beta^2)\,\alpha^2\Pi(m, k)/K(k) - (1 + \alpha^2)] +$$

$$+ 2\beta^2(1 + \alpha^2)/(1 + \beta^2) -$$

$$- 2E(k)/K(k)\}/[(1 + \varkappa)\sqrt{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)(1 + \alpha\beta)\alpha\beta}],$$

$$K_I(\pm b) = (P/\sqrt{\pi l})\,2\alpha^2\sqrt{1 + \beta^2}\,\{(\varkappa + 1)\,[\Pi(m, k)/K(k) - 1]/2 +$$

$$+ 1/(1 + \alpha^2) - E(k)/K(k)\,\alpha^2(1 + \beta^2)\}/[(1 + \varkappa)\sqrt{(1 + \alpha^2)(1 + \alpha^2\beta^2)}],$$

где $\alpha = c/b$; $\beta = a/c$; $b - a = 2l$; $\Pi(m, k)$ — полный эллиптический интеграл третьего рода с параметром $m = -(b^2 - a^2)/(b^2 + c^2)$.

Более общий случай, когда произвольно направленная сосредоточенная сила и момент действуют в произвольной точке бесконечной плоскости с двумя одинаковыми коллинеарными трещинами, рассмотрен в работах [11, 93].

Две трещины различной длины. Пусть в бесконечной плоскости имеются две коллинеарные трещины различной длины $2l_1$ и $2l_2$. Расстояние между центрами трещин равно d. К верхним берегам трещин приложены нормальные и сдвигающие сосредоточенные силы P_k и Q_k ($k = 1, 2$) (рис. 2.65). КИН $K_I(\pm l_k)$ и $K_{II}(\pm l_k)$ для правой ($k = 1$) и левой ($k = 2$) трещин даются выражениями [2]

$$K_I(\pm l_n) - iK_{II}(\pm l_n) = \{(P_n - iQ_n)\sqrt{(l_n \pm \xi_n)\,[Z_n^2(\xi_n) - l_k^2]/(l_n \pm \xi_n)} \pm$$

$$\pm (P_k - iQ_k)\sqrt{(l_k^2 - \xi_k^2)\,[Z_n^2(\xi_k) - l_n^2]}/[Z_k(\xi_k) \mp l_n] + 2i(R_1 + R_2)\,l_n \mp$$

$$\mp \{(P_n - iQ_n)\sqrt{(l_n - \xi_n)\,[Z_n(\xi_n) + l_k]}/((l_n + \xi_n)\,[Z_n(\xi_n) - l_k]) \times$$

$$\times [(\xi_n + l_n)\,K(\rho) - (l_n + l_k + (-1)^n d)\,\Pi(m_n, \rho)] + (P_k - iQ_k) \times$$

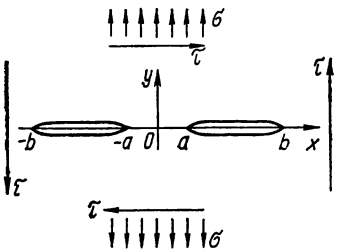
$$\times \sqrt{(l_k + \xi_k)\,[Z_k(\xi_k) - l_n]}/\{(l_k - \xi_k)\,[Z_k(\xi_k) + l_n]\} \times$$

$$\times [(Z_k(\xi_k) + l_n)\,K(\rho) - (l_n + l_k + (-1)^n d)\,\Pi(c_k, \rho)] -$$

$$- 2i(R_1 + R_2)\,[(l_k + (-1)^n d)\,K(\rho) - (l_n + l_k - (-1)^n d)\,\Pi(d_n, \rho)] +$$

$$+ \pi i\sqrt{d^2 - (l_n - l_k)^2}\,R_n\}/K(\rho)\}/(2\sqrt{\pi l_n}\sqrt{Z_n^2(\pm l_n) - l_k^2})$$

$(n = 1,\ k = 2$ или $n = 2,\ k = 1)$,



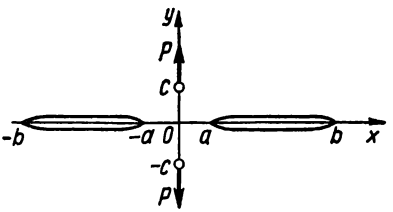


Рис. 2.63. Две равные коллинеарные трещины при действии нагрузки на бесконечности.

Рис. 2.64. Две равные коллинеарные трещины при симметричном растяжении сосредоточенными силами.

где $K(\rho)$, $\Pi(m, \rho)$ — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода с модулем $\rho = 2\sqrt{l_1 l_2}/[d^2 - (l_2 - l_1)^2]$ и параметрами

$$m_n = d_n[\xi_n - l_k - (-1)^n d]/(\xi_n + l_n),$$

$$c_k = d_n(\xi_k - l_k)/[\xi_k + l_n + (-1)^n d],$$

$$d_n = 2l_n/[l_n - l_k - (-1)^n d],$$

$$Z_n(t) = t - (-1)^n d,$$

$$R_n = -(1/2)(P_n - iQ_n)(\varkappa - 1)/(\varkappa + 1).$$

Приведенное решение является фундаментальным, с помощью которого могут быть найдены КИН при любой нагрузке. В другом виде фундаментальное решение приведено также в работе [94].

При действии на обеих трещинах одинаковой постоянной нагрузки но различной на верхних и нижних берегах (рис. 2.66), КИН равны [2

$$K_I(\pm l_n) - iK_{II}(\pm l_n) = -\{1/[\sqrt{\pi l_n}\sqrt{[\pm l_n - (-1)^n d]^2 - l_k^2}]\} \times$$

$$\times \{il_n(R_1 + R_2) \pm \pi i\{(R_n/2)\sqrt{d^2 - (l_n - l_k)^2} -$$

$$- ((R_1 + R_2)/\pi)[-(l_n + l_k - (-1)^n d)\,\Pi(d_n, \rho) +$$

$$+ (l_k + (-1)^n d)\,K(\rho)]\}/K(\rho) \pm \pi s[(-l_n^2 + l_k^2 - d^2)/2 \pm$$

$$\pm (-1)^n l_n d + [d^2 - (l_n - l_k)^2] E(\rho)/(2K(\rho))]\} \qquad (2.25)$$

$$(n = 1,\ k = 2 \text{ или } n = 2,\ k = 1),$$

где $s = [p + \sigma - i(\tau + q)]/2$; $R_n = -l_n(\varkappa - 1)$ $[p - \sigma - i(\tau - q)]/(\varkappa + 1)$, $E(\rho)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

В случае трещин равной длины ($l_1 = l_2 = l$, $R_1 = R_2 = R$) этот результат принимает более простую форму [2]

$$K_I(\pm l_n) - iK_{II}(\pm l_n) = \pm (s\sqrt{\pi l}/\lambda)[1 \mp (-1)^n \lambda -$$

$$- E(\lambda)/K(\lambda)]/\sqrt{1 \mp (-1)^n \lambda} \mp (iR/(\pi\sqrt{l}))\sqrt{1 \mp (-1)^n \lambda} \quad (n = 1, 2),$$

где $\lambda = 2l/d$. (2.26)

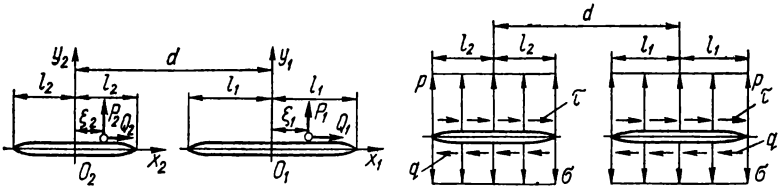


Рис. 2.65. Две коллинеарные трещины различной длины при действии сосредоточенных сил на их берегах.

Рис. 2.66. Две коллинеарные трещины различной длины при действии на их берегах постоянной несамоуравновешенной нагрузки.

При самоуравновешенной постоянной нагрузке на берегах трещин ($R_1 = R_2 = 0$, $p = \sigma$, $\tau = q$) из формулы (2.25) следует [2, 95]

$$K_I(\pm l_n) - iK_{II}(\pm l_n) =$$

$$= \pm \{(p - i\tau)\sqrt{\pi}/[2\sqrt{l_n[(\pm l_n - (-1)^n d)^2 - l_k^2]}]\} \times$$

$$\times \{[l_n \mp (-1)^n d]^2 - l_k^2 + [(l_n - l_k)^2 - d^2] E(\rho)/K(\rho)\}$$

$$(n = 1,\ k = 2 \text{ или } n = 2,\ k = 1).$$

Последний результат в ином виде приводится также в работах [6, 8, 12, 24, 91].

Три трещины. Бесконечная плоскость ослаблена тремя коллинеарными трещинами, причем крайние трещины одинаковой длины размещены симметрично относительно средней трещины. На берегах трещин задана симметричная ($K_{II} = 0$) нормальная нагрузка $p(x) = p(-x)$ ($|x| \leqslant a$) и $q(x) = q(-x)$ ($b \leqslant |x| \leqslant c$) (рис. 2.67). КИН равны [20, 96]

$$K_I(\pm a) = \sqrt{\pi a}\left\{\int_0^a \frac{p(s)\,ds}{\sqrt{a^2 - s^2}} + \frac{2}{\pi\sqrt{(c^2 - a^2)(b^2 - a^2)}} \times\right.$$

$$\left. \times \left[(c^2 - a^2)\int_b^c \sqrt{\frac{y^2 - b^2}{c^2 - y^2}}\,\frac{yf(y)\,dy}{y^2 - a^2} - \frac{1}{2}C_2\right]\right\},$$

$$K_I(\pm b) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi b}{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}} \times$$

$$\times \left[(c^2 - b^2) \int_b^c \frac{yf(y)\,dy}{\sqrt{(c^2 - y^2)(y^2 - b^2)}} - \frac{1}{2} C_2 \right],$$

$$K_I(\pm c) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\pi c}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}} \times$$

$$\times \left[(c^2 - b^2) \int_b^c \frac{yf(y)\,dy}{\sqrt{(c^2 - y^2)(y^2 - b^2)}} + C_1 \right],$$

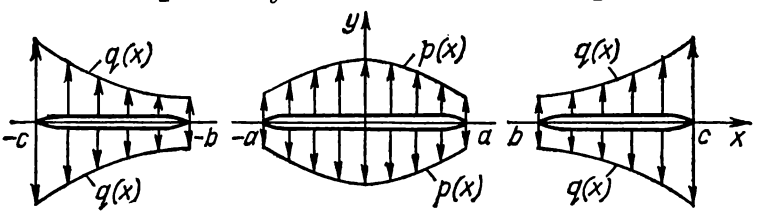


Рис. 2.67. Три коллинеарные трещины при действии симметричной нормальной нагрузки на их берегах.

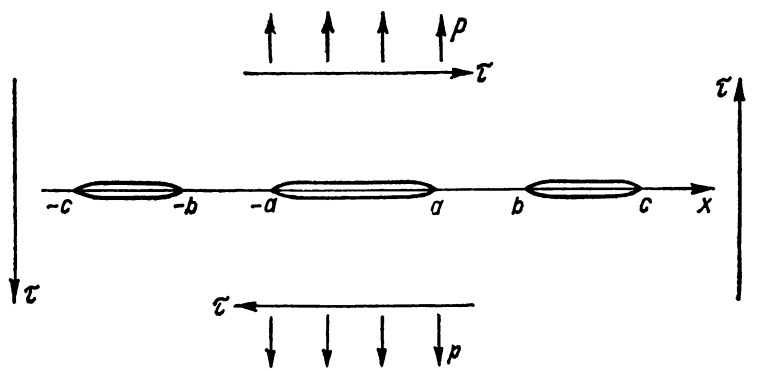


Рис. 2.68. Три коллинеарные трещины при действии нагрузки на бесконечности.

где

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} q(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - s^2}\, p(s)}{x^2 - s^2}\, ds,$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{K(k)} \int_b^c \sqrt{\frac{c^2 - y^2}{y^2 - b^2}}\, yf(y)\,dy \int_b^c \sqrt{\frac{u^2 - b^2}{(u^2 - a^2)(c^2 - u^2)}}\, \frac{udu}{y^2 - u^2},$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{K(k)} \int_b^c \sqrt{\frac{c^2 - u^2}{(u^2 - a^2)(u^2 - b^2)}}\, udu \int_b^c \sqrt{\frac{y^2 - b^2}{c^2 - y^2}}\, \frac{yf(y)\,dy}{y^2 - u^2},$$

$K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $k = \sqrt{(c^2 - b^2)/(b^2 - a^2)}$.

При действии на бесконечности растягивающих (p) и сдвигающих (τ) напряжений, когда берега трещин свободны от нагрузки (рис. 2.68), КИН определяются выражениями [6, 9, 12, 20, 24, 91, 97]

$$K_{\mathrm{I}}(\pm a) - iK_{\mathrm{II}}(\pm a) = (p - i\tau)\sqrt{\pi a}\sqrt{(c^2 - a^2)/(b^2 - a^2)}\,E(k)/K(k),$$

$$K_{\mathrm{I}}(\pm b) - iK_{\mathrm{II}}(\pm b) = (p - i\tau)\sqrt{\pi b}\sqrt{(b^2 - a^2)/(c^2 - b^2)} \times$$
$$\times \{(c^2 - a^2)\,E(k)/[(b^2 - a^2)\,K(k)] - 1\},$$

$$K_{\mathrm{I}}(\pm c) - iK_{\mathrm{II}}(\pm c) = (p - i\tau)\sqrt{\pi c} \times$$
$$\times \sqrt{(c^2 - a^2)/(c^2 - b^2)}\,[1 - E(k)/K(k)],$$

где $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

Имеются также числовые значения КИН (для средней трещины) [98], когда на прямой равномерно размещены трещины равной длины, причем их число равно 3, 5, 7 или 11.

Пусть бесконечная плоскость ослаблена двумя коллинеарными полубесконечными разрезами и одной трещиной конечной длины. Тело на бесконечности находится под действием растягивающих и сдвигающих нагрузок, суммарные значения которых равны P и Q (рис. 2.69). Тогда [9, 99]

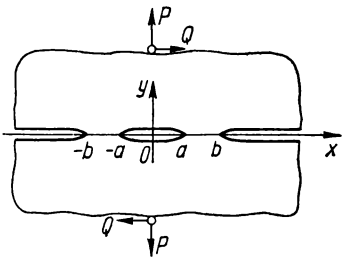


Рис. 2.69. Две полубесконечные и одна конечная коллинеарные трещины.

$$K_{\mathrm{I}}(\pm a) - iK_{\mathrm{II}}(\pm a) = (P - iQ)\sqrt{a}/\sqrt{\pi(b^2 - a^2)},$$

$$K_{\mathrm{I}}(\pm b) - iK_{\mathrm{II}}(\pm b) = (P - iQ)\sqrt{b}/\sqrt{\pi(b^2 - a^2)}.$$

Этот результат следует из известного решения контактной задачи для полуплоскости при использовании аналогии задач о трещинах и штампах.

В работе [100] приведены данные по КИН, когда вдоль одной прямой размещены полубесконечная и ряд конечных трещин.

2.10. Система произвольно ориентированных прямолинейных трещин

Две сдвинутые параллельные трещины равной длины. Бесконечная плоскость, ослабленная двумя параллельными трещинами равной длины $2l$, растягивается на бесконечности усилиями p в направлении, перпендикулярном линиям трещин. КИН для правой (сплошные линии) и левой (штриховые линии) вершин нижней трещины, полученные на основе численного решения СИУ [3], приведены на рис. 2.70, 2.71. Ниже даны эти же результаты в случае параллельных несдвинутых трещин ($\beta = \pi/2$ на схеме рис. 2.70; $K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}^{-} = K_{\mathrm{I}}^{+}$, $K_{\mathrm{II}} = K_{\mathrm{II}}^{-} = -K_{\mathrm{II}}^{+}$, K_N^{-} — КИН для левой, а K_N^{+} — для правой вершины нижней трещины) [3]:

$2l/d$	0	0,2	0,5	1,0	1,4	2,0	2,5	5,0
$K_{\mathrm{I}}/(p\sqrt{\pi l})$	1	0,986	0,930	0,843	0,805	0,773	0,758	0,722
$K_{\mathrm{II}}/(p\sqrt{\pi l})$	0	0,001	0,016	0,061	0,090	0,117	0,130	0,163

Для рассматриваемой системы трещин при одноосном растяжении на бесконечности известны [3] также асимптотические формулы для КИН при большом расстоянии между трещинами

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} = p\sqrt{\pi l}\,[1 + (\lambda^2/8)\,(2\cos 2\beta - \cos 4\beta) \pm (\lambda^3/32)\,(5\cos 3\beta - 3\cos 5\beta) +$$

$$+ (\lambda^4/128)\,(30\cos 4\beta - 20\cos 6\beta - 6\cos 2\beta + 7)] + O(\lambda^5),$$

$$K_{\mathrm{II}}^{\pm} = p\sqrt{\pi l}\,(\lambda^2/8)\,[\sin 4\beta - \sin 2\beta \pm (3\lambda/4)\,(\sin 3\beta - \sin 5\beta) -$$

$$- (\lambda^2/8)\,(10\sin 4\beta - 10\sin 6\beta - \sin 2\beta)] + O(\lambda^5),$$

где $\lambda = 2l/d$; $2l$ — длина трещины; d — расстояние между центрами трещин; β — угол между линией трещины и отрезком, соединяющим центры трещин (см. схему на рис. 2.71).

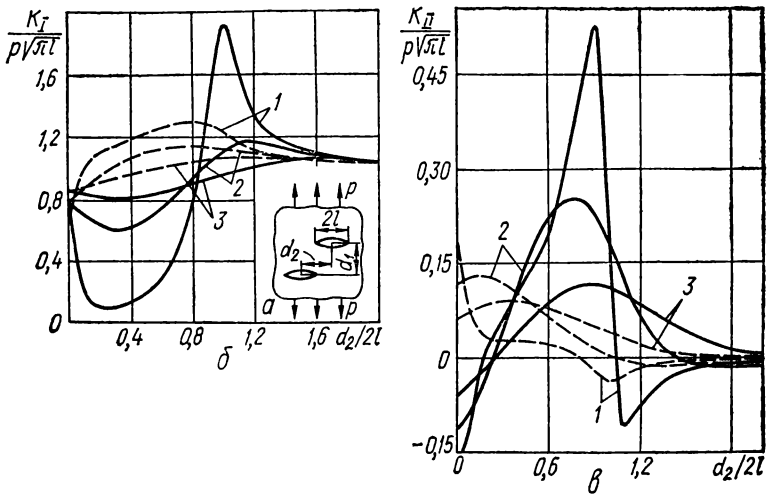


Рис. 2.70. Схема растяжения бесконечной пластины с двумя параллельными сдвинутыми трещинами ($а$) и зависимость КИН K_{I} ($б$) и K_{II} ($в$) от расстояния между линиями трещины:
1 — $d_1/2 = \varepsilon_1 = 0{,}1$; 2 — $\varepsilon_1 = 0{,}5$; 3 — $\varepsilon_1 = 1{,}0$ [3].

Отсюда при $\beta = \pi/2$ получим КИН при одноосном растяжении плоскости с двумя параллельными несдвинутыми трещинами

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} = p\sqrt{\pi l}\,[1 - (3/8)\,\lambda^2 + (63/128)\,\lambda^4] + O(\lambda^5),$$

$$K_{\mathrm{II}}^{\pm} = \mp\,(3/16)\,\lambda^3 p\sqrt{\pi l} + O(\lambda^5),$$

а при $\beta = 0$ — с двумя коллинеарными трещинами

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} = p\sqrt{\pi l}\,[1 + (1/8)\,\lambda^2 \pm (1/16)\,\lambda^3 + (11/128)\,\lambda^4] + O(\lambda^5),$$

$$K_{\mathrm{II}}^{\pm} = 0.$$

Последний результат согласуется с разложением точного решения (2.26).

Численные значения КИН для двух равных параллельных трещин при действии на бесконечности растягивающих и сдвигающих напряжений

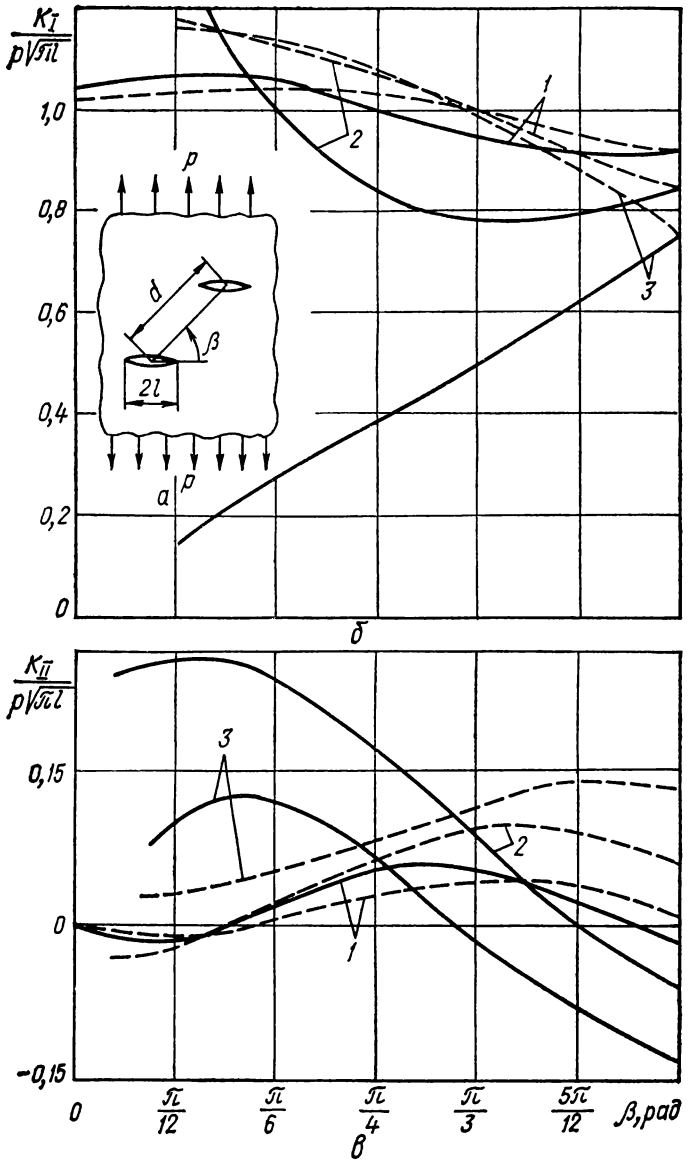


Рис. 2.71. Схема растяжения бесконечной пластины с двумя параллельными сдвинутыми трещинами (*а*) и зависимость КИН K_I (*б*) и K_{II} (*в*) от угла β:

1 — $2l/d = \lambda = 0{,}5$; *2* — $\lambda = 1$; *3* — $\lambda = 2{,}5$ [3].

приведены также в работах [6, 12, 67, 98, 101, 102]. Имеются также численные результаты, когда на одном из берегов одной из трещин действует постоянная нормальная нагрузка [103].

Две равные симметрично наклоненные трещины. Пусть бесконечная плоскость, ослабленная двумя равными симметрично размещенными трещинами, растягивается на бесконечности усилиями p в направлении оси симметрии (рис. 2.72). Асимптотические формулы для КИН имеют вид [2, 3]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} = (1/2)\, p \sqrt{\pi l}\, [1 - \cos 2\alpha + (\lambda^2/16)(1 - 2\cos 2\alpha + \cos 4\alpha) \mp$$

$$\mp (\lambda^3/32)(4\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha) +$$

$$+ (\lambda^4/256)(26 - 15\cos 2\alpha - 4\cos 4\alpha - 7\cos 6\alpha) + O(\lambda^5)],$$

$$K_{\mathrm{II}}^{\pm} = (1/2)\, p \sqrt{\pi l}\, [\sin 2\alpha + (\lambda^2/16)\sin 4\alpha \pm (\lambda^3/32)(2\cos\alpha - \cos 3\alpha -$$

$$- \cos 5\alpha) + (\lambda^4/256)(11\sin 2\alpha - 4\sin 4\alpha + 9\sin 6\alpha)] + O(\lambda^5),$$

где $\lambda = 2l/d$.

Численные данные для рассматриваемой системы трещин при сдвиге или растяжении на бесконечности как параллельно, так и перпендикулярно оси симметрии приведены в работах [6, 12, 98].

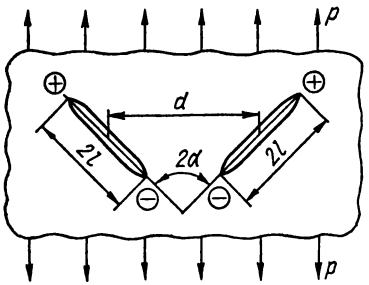


Рис. 2.72. Две равные симметрично наклоненные трещины при одноосном растяжении на бесконечности.

Две равные произвольно ориентированные трещины. Бесконечная плоскость, ослабленная двумя произвольно ориентированными трещинами одинаковой длины, находится под действием двухосного растяжения на бесконечности (рис. 2.73). Асимптотические формулы для КИН имеют вид [2, 3, 104]

$$K_{In}^{\pm} = (1/2)\, p \sqrt{\pi l}\, \{1 + \varepsilon +$$

$$+ (1 - \varepsilon)\cos 2\alpha_n + (\lambda^2/16)\{2(1 +$$

$$+ \varepsilon)[\cos 2(\alpha_k - \beta) + \cos 2(\beta -$$

$$- \alpha_n) - \cos 2(2\beta - \alpha_k - \alpha_n)] +$$

$$+ (1 - \varepsilon)[2\cos 2\beta + \cos 2(\beta - \alpha_k - \alpha_n) + \cos 2(\beta - \alpha_n + \alpha_k) -$$

$$- 2\cos 2(2\beta - \alpha_n)]\} \pm (-1)^k (\lambda^3/32)\{(1 + \varepsilon)[3\cos(2\alpha_k + \alpha_n - 3\beta) +$$

$$+ 2\cos 3(\beta - \alpha_n) - 3\cos(5\beta - 2\alpha_k - 3\alpha_n)] + (1 - \varepsilon)[3\cos(\alpha_n - 3\beta) +$$

$$+ \cos(3\beta - 3\alpha_n - 2\alpha_k) + \cos(3\beta - 3\alpha_n + 2\alpha_k) - 3\cos(5\beta - 3\alpha_n)]\} +$$

$$+ (\lambda^4/256)\{2(1 + \varepsilon)[3\cos 4(\alpha_k - \beta) + 20\cos 2(2\beta - \alpha_n - \alpha_k) -$$

$$- 6\cos 2(3\beta - 2\alpha_k - \alpha_n) + 7\cos 4(\beta - \alpha_n) - 14\cos 2(3\beta - 2\alpha_n - \alpha_k) +$$

$$+ 5 + 2\cos 2(\alpha_n - \alpha_k) - 4\cos 2(\alpha_n - \beta) - 2\cos 2(\alpha_k - \beta)] +$$

$$+ (1 - \varepsilon)[9\cos 2(\alpha_k - 2\beta) + 3\cos 2(2\beta - 2\alpha_k - \alpha_n) +$$

$$+ 35\cos 2(2\beta - \alpha_n) - 16\cos 2(3\beta - \alpha_n - \alpha_k) + 7\cos 2(2\beta - 2\alpha_n - \alpha_k) +$$

$$+ 6\cos 2(2\beta - 2\alpha_n + \alpha_k) - 24\cos 2(3\beta - 2\alpha_n) + 10\cos 2\alpha_n +$$

$$+ 3\cos 2\alpha_k - 6\cos 2\beta + \cos 2(\alpha_k - 2\alpha_n) -$$

$$- 2\cos 2(\alpha_k - \beta - \alpha_n) - 2\cos 2(\beta - \alpha_n - \alpha_k) - 2\cos 2(\beta - 2\alpha_n)]\}\} + O(\lambda^5),$$

$$K^{\pm}_{IIn} = (1/2)\, p \sqrt{\pi l} \{(1-\varepsilon) \times$$
$$\times \sin 2\alpha_n - (\lambda^2/16) \{2(1+\varepsilon) \times$$
$$\times [\sin 2(\beta-\alpha_n) - \sin 2(2\beta -$$
$$- \alpha_k - \alpha_n)] + (1-\varepsilon)[\sin 2 \times$$
$$\times (\beta - \alpha_n - \alpha_k) + \sin 2(\beta -$$
$$- \alpha_n + \alpha_k) - 2\sin 2(2\beta -$$
$$- \alpha_n)]\} \mp (-1)^k (\lambda^3/32) \{(1 +$$
$$+ \varepsilon)[\sin(3\beta - 2\alpha_k - \alpha_n) +$$
$$+ 2\sin 3(\beta - \alpha_n) - 3\sin(5\beta -$$
$$- 2\alpha_k - 3\alpha_n)] + (1-\varepsilon) \times$$
$$\times [\sin(3\beta - \alpha_n) + \sin(3\beta -$$
$$- 3\alpha_n - 2\alpha_k) + \sin(3\beta - 3\alpha_n +$$
$$+ 2\alpha_k) - 3\sin(5\beta - 3\alpha_n)]\} -$$
$$- (\lambda^4/256) \{(1+\varepsilon)[26\sin 2 \times$$
$$\times (2\beta - \alpha_n - \alpha_k) - 12\sin 2 \times$$
$$\times (3\beta - 2\alpha_k - \alpha_n) + 14\sin 4 \times$$
$$\times (\beta - \alpha_n) - 28\sin 2(3\beta -$$
$$- 2\alpha_n - \alpha_k) + 2\sin 2(\alpha_k -$$
$$- \alpha_n) - 4\sin 2(\beta - \alpha_n)] +$$
$$+ (1-\varepsilon)[\sin 2(2\beta - \alpha_k) +$$
$$+ 3\sin 2(2\beta - 2\alpha_k - \alpha_n) +$$
$$+ 23\sin 2(2\beta - \alpha_n) - 16\sin 2 \times$$
$$\times (3\beta - \alpha_k - \alpha_n) + 7\sin 2(2\beta -$$
$$- 2\alpha_n - \alpha_k) + 6\sin 2(2\beta +$$
$$+ \alpha_k - 2\alpha_n) - 24\sin 2(3\beta -$$
$$- 2\alpha_n) - 6\sin 2\alpha_n + \sin 2\alpha_k -$$
$$- 2\sin 2\beta + \sin 2(\alpha_k - 2\alpha_n) -$$
$$- 2\sin 2(\alpha_k - \beta - \alpha_n) -$$
$$- 2\sin 2(\beta - \alpha_k - \alpha_n) -$$
$$- 2\sin 2(\beta - 2\alpha_n)]\}\} + O(\lambda^5)$$

($n = 1$, $k = 2$ или $n = 2$, $k = 1$),

Таблица 2.16. **Значения КИН для трех параллельных трещин в бесконечной плоскости [109]**

l_1/l	l/d	$K_I (A)/p\sqrt{\pi l}$	$K_I (B)/p\sqrt{\pi l_1}$	$K_{II} (B)/p\sqrt{\pi l_1}$
0,5	0,2	0,975	0,942	—0,005
	0,6	0,917	0,689	—0,063
	1,0	0,933	0,487	—0,110
	1,4	0,958	0,347	—0,123
	1,8	0,975	0,249	—0,118
	2,2	0,985	0,182	—0,105
	2,6	0,991	0,136	—0,091
	3,0	0,994	0,103	—0,079
	3,4	0,996	0,030	—0,068
	3,8	0,997	0,064	—0,059
0,95	0,2	0,911	0,940	—0,010
	0,6	0,687	0,784	—0,078
	1,0	0,614	0,722	—0,118
	1,4	0,587	0,687	—0,140
	1,8	0,578	0,663	—0,154
	2,2	0,578	0,643	—0,165
	2,6	0,583	0,626	—0,173
	3,0	0,591	0,610	—0,180
	3,4	0,601	0,596	—0,185
	3,8	0,613	0,582	—0,190
1,0	0,2	0,902	—0,940	—0,010
	0,6	0,653	0,793	—0,077
	1,0	0,559	0,741	—0,114
	1,4	0,511	0,717	—0,132
	1,8	0,481	0,702	—0,144
	2,2	0,460	0,691	—0,152
	2,6	0,442	0,683	—0,153
	3,0	0,432	0,673	—0,163
	3,4	0,422	0,674	—0,167
	3,8	0,414	0,670	—0,170
2,0	0,2	0,660	0,926	—0,019
	0,4	0,257	0,861	—0,052
	0,5	0,128	0,840	—0,065
	0,6	0,038	0,822	—0,076

где $\lambda = 2l/d$ (при $n = 1$ или $n = 2$ КИН относятся к левой или правой трещине соответственно).

Численные результаты в случае двух различно ориентированных трещин как равной, так и неравной длины приведены в работах [105, 106]. Рассмотрен также случай, когда одна из трещин является полубесконечной [107]. Взаимодействие двух прямолинейных трещин в ортотропной плоскости изучалось в работе [108].

Три прямолинейные трещины. Бесконечная плоскость, ослабленная тремя симметрично размещенными ($K_{II} = 0$ для средней трещины) парал-

лельными трещинами, растягивается на бесконечности в направлении, перпендикулярном линиям трещин (рис. 2.74). КИН, полученные методом СИУ [109], приведены в табл. 2.16.

Различные случаи системы трех и больше параллельных трещин рассмотрены в работах [12, 67, 98, 102].

Изучено [67, 87, 106, 110] взаимодействие трех или четырех прямолинейных трещин, различно размещенных в бесконечной плоскости. В работах [111—115] приведены асимптотические разложения КИН (при

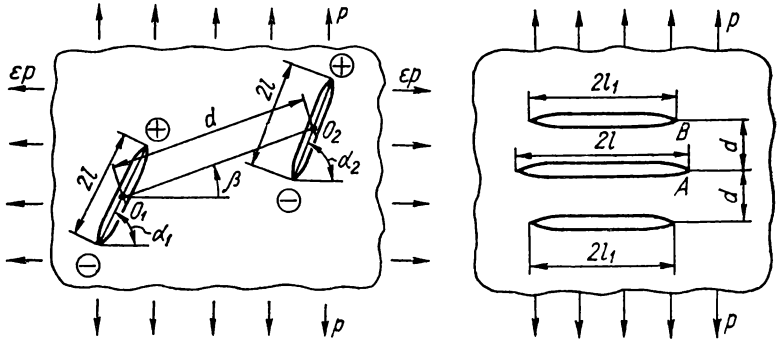


Рис. 2.73. Две равные произвольно ориентированные трещины при двухосном растяжении на бесконечности.

Рис. 2.74. Три параллельные трещины при растяжении на бесконечности.

больших расстояниях между трещинами) для системы конечного числа произвольно ориентированных прямолинейных трещин в общем случае самоуравновешенной нагрузки на их берегах.

2.11. Система дугообразных трещин

Две равные симметрично расположенные дугообразные трещины. Бесконечная плоскость ослаблена двумя равными трещинами, расположенными вдоль дуг одной и той же окружности симметрично относительно ее центра. Берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности задано двухосное симметричное растяжение (рис. 2.75). Точные выражения для КИН при одноосном растяжении ($\lambda = 0$) имеют вид [116]

$$K_I(B_1) = (p/2)\sqrt{\pi R \operatorname{tg}\theta}\,[4K(e)\cos^2\theta - E(e)(1+\cos^2\theta)]/[2K(e) - E(e)],$$

$$K_{II}(B_1) = (p/2)\sqrt{\pi R \operatorname{ctg}\theta}\sin^2\theta\,[3K(e) - E(e)]/[2K(e) - E(e)],$$

$$K_I(A_1) = K_I(B_1),\quad K_{II}(A_1) = -K_{II}(B_1),$$

где $K(e)$ и $E(e)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем $e = \sin\theta$.

Если внешняя нагрузка представляет собой всестороннее растяжение ($\lambda = 1$), то [116]

$$K_I(B_1) = p\sqrt{\pi R \operatorname{tg}\theta}\,E(e)/[2K(e) - E(e)],$$

$$K_{II}(B_1) = p\sqrt{\pi R \operatorname{ctg}\theta}\,[K(e) - E(e)]/[2K(e) - E(e)],$$

$$K_I(A_1) = K_I(B_1),\quad K_{II}(A_1) = -K_{II}(B_1).$$

Две равные трещины, произвольно размещенные вдоль дуг окружности. Бесконечная плоскость, ослабленная двумя равными произвольно размещенными вдоль дуг одной и той же окружности трещинами, находится на бесконечности под действием всестороннего растяжения (рис. 2.76). КИН даются выражениями [24, 117]

$$K_I(B_2) = p\sqrt{2\pi R/[\sin\theta_2(\cos\theta_1 - \cos 0_2)]}\,[(1 - T_0)\cos\theta_2 + \cos\theta_1]/(4 - T_0),$$

$$K_{II}(B_2) = p\sqrt{2\pi R\sin\theta_2/(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)}\,(2 - T_0)/(4 - T_0),$$

$$K_I(A_2) = p\sqrt{2\pi R/[\sin\theta_1(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)]}\,[(T_0 - 1)\cos\theta_1 - \cos\theta_2]/(4 - T_0),$$

$$K_{II}(A_2) = p\sqrt{2\pi R\sin\theta_1/[\cos\theta_1 - \cos\theta_2]}\,(2 - T_0)/(4 - T_0),$$

$$K_I(A_1) = K_I(B_2),\ K_{II}(A_1) = -K_{II}(B_2),$$

$$K_I(B_1) = K_I(A_2),\ K_{II}(B_1) = -K_{II}(A_2),$$

где $T_0 = 4\sin^2(\theta_2/2)\cos^2(\theta_1/2)\,E(k)/K(k) + 1 + \cos\theta_1\cos\theta_2$, $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем $k = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2(\theta_1/2)\operatorname{ctg}^2(\theta_2/2)}$.

Две неравные дугообразные трещины. Бесконечная плоскость, ослабленная двумя неравными дугообразными трещинами, середины которых

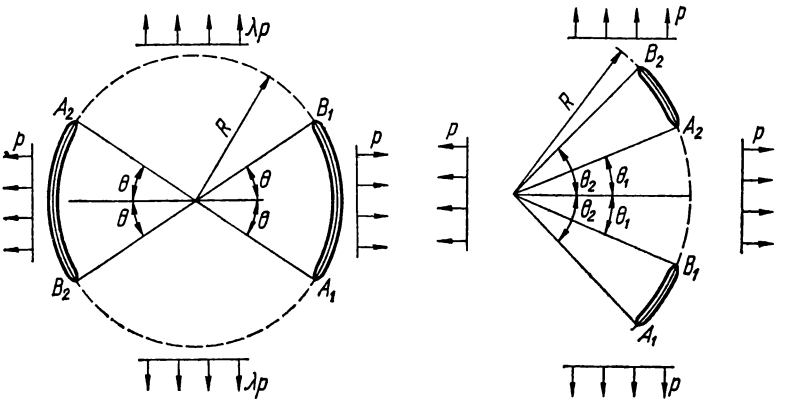


Рис. 2.75. Двухосное растяжение бесконечной плоскости с двумя равными симметрично расположенными дугообразными трещинами.

Рис. 2.76. Всестороннее растяжение бесконечной плоскости с двумя равными произвольно размещенными дугообразными трещинами.

находятся на одном диаметре, растягивается на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями (рис. 2.77). КИН равны [118]

$$K_I(A_1) - iK_{II}(A_1) = p\sqrt{(\pi/2)\,R\sin\theta/(\cos\theta + \cos\theta_1)}\,f(\theta, \theta_1),$$

$$K_I(B_1) - iK_{II}(B_1) = p\sqrt{(\pi/2)\,R\sin\theta/(\cos\theta + \cos\theta_1)}\,f(-\theta, \theta_1),$$

$$K_I(A_2) - iK_{II}(A_2) = p\sqrt{(\pi/2)\,R\sin\theta_1/(\cos\theta + \cos\theta_1)}\,f(\theta_1, \theta),$$

$$K_I(B_2) - iK_{II}(B_2) = p\sqrt{(\pi/2)\,R\sin\theta_1/(\cos\theta + \cos\theta_1)}\,f(-\theta_1, \theta),$$

где

$$f(\theta, \theta_1) = (i/\sin\theta)\,[C_0 \exp(-i\theta) + C_1 + C_2 \exp(i\theta) + D_1 \exp(2i\theta) + D_2 \exp(3i\theta)],$$

$$D_1 = (1-\lambda)\exp(2i\gamma)(\cos\theta - \cos\theta_1)/2,\quad D_2 = -(1-\lambda)\exp(2i\gamma)/2,$$

$$C_1 = -C_0[\cos\theta - \cos\theta_1],\quad C_2 = [C_0 - (1-\lambda)\exp(2i\gamma)/2]\,(2H-1),$$

$$C_0 = \{1 + \lambda + (1-\lambda)(H\exp(2i\gamma) - \exp(-2i\gamma))\,[1 - (\cos\theta + \cos\theta_1)^2/[4(1-H)]]\}/(2(H+1)),$$

$$H = \cos^2(\theta/2) + \cos^2(\theta_1/2) - 2\cos^2(\theta/2)\cos^2(\theta_1/2)\,E(\rho)/K(\rho),$$

$$\rho^2 = \operatorname{tg}^2(\theta/2)\cdot\operatorname{tg}^2(\theta_1/2).$$

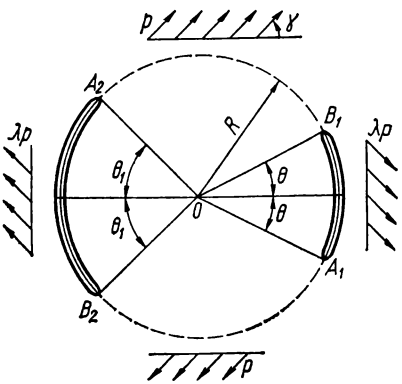


Рис. 2.77. Двухосное растяжение бесконечной плоскости с двумя неравными дугообразными трещинами.

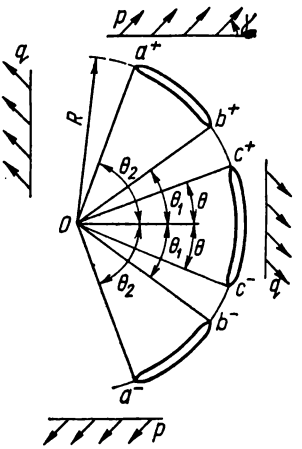


Рис. 2.78. Двухосное растяжение бесконечной плоскости с тремя дугообразными трещинами.

Если внешняя нагрузка представляет собой всестороннее растяжение ($\lambda = 1$), то [24, 117]

$$K_I(A_1) = K_I(B_1) = p\sqrt{2\pi R\sin\theta/(\cos\theta + \cos\theta_1)}\,(1-H)/(1+H),$$

$$K_I(A_2) = K_I(B_2) = p\sqrt{2\pi R\sin\theta_1/(\cos\theta + \cos\theta_1)}\,(1-H)/(1+H),$$

$$K_{II}(B_1) = -K_{II}(A_1) = p\sqrt{\pi R/[2\sin\theta(\cos\theta + \cos\theta_1)]}\times$$
$$\times\,[(2H-1)\cos\theta + \cos\theta_1]/(1+H),$$

$$K_{II}(A_2) = -K_{II}(B_2) = p\sqrt{\pi R/[2\sin\theta_1(\cos\theta + \cos\theta_1)]}\times$$
$$\times\,[(2H-1)\cos\theta_1 + \cos\theta]/(1+H).$$

Данные по КИН для системы двух неравных трещин, размещенных вдоль дуг концентрических окружностей, приведены в работе [119].

Три дугообразные трещины. Бесконечная плоскость, ослабленная тремя трещинами вдоль дуг одной и той же окружности, находится на

бесконечности под действием двухосной растягивающей нагрузки (рис. 2.78). КИН даются выражениями [24, 117]

$$K_{\mathrm{I}}(a^{\pm}) - iK_{\mathrm{II}}(a^{\pm}) =$$

$$= -\sqrt{\pi R \sin\theta_2/[(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)(\cos\theta - \cos\theta_2)]}\,\varphi(\pm\theta_2),$$

$$K_{\mathrm{I}}(b^{\pm}) - iK_{\mathrm{II}}(b^{\pm}) = \sqrt{\pi R \sin\theta_1/[(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)(\cos\theta - \cos\theta_1)]}\,\varphi(\pm\theta_1),$$

$$K_{\mathrm{I}}(c^{\pm}) - iK_{\mathrm{II}}(c^{\pm}) = \sqrt{\pi R \sin\theta/[(\cos\theta - \cos\theta_2)(\cos\theta - \cos\theta_1)]}\,\varphi(\pm\theta),$$

где

$$\varphi(\theta) = (-i/(2\sin\theta))\,[C_0 \exp(3\theta i/2) + C_1 \exp(\theta i/2) + C_2 \exp(-\theta i/2) +$$
$$+ C_3 \exp(-3\theta i/2) + D_1 \exp(-5\theta i/2) + D_2 \exp(-7\theta i/2)],$$

$$C_0 = 4\Gamma/(2 - M_0) + N(\bar{\Gamma}' M_0 + 2\Gamma')/(4 - M_0^2),\quad D_2 = \bar{\Gamma}',$$

$$C_1 = -C_0(\cos\theta + \cos\theta_1 + \cos\theta_2),\quad D_1 = -\bar{\Gamma}'(\cos\theta + \cos\theta_1 + \cos\theta_2),$$

$$D_0 = -2\Gamma M_0/(2 - M_0) - N(\bar{\Gamma}' M_0 + 2\Gamma')/(4 - M_0^2),$$

$$C_2 = -\bar{\Gamma}'(1 + M_0) - C_0(N - L),$$

$$C_3 = -\bar{\Gamma}'(N - L) - C_0(1 + M_0),\quad \Gamma = (p + q)/4,$$

$$\Gamma' = -(p - q)\exp(-2i\gamma)/2,$$

$$M_0 = 4\,[\sin^2(\theta_2/2) - \sin^2(\theta/2)]\,[\cos^2(\theta_1/2)\,E(e_2)/K(e_2) +$$
$$+ \sin^2(\theta_1/2)\,E(e_1)/K(e_1)] + \cos\theta_1 + \cos\theta_2 - \cos\theta - 1,$$

$$N = 4\,[\sin^2(\theta_2/2) - \sin^2(\theta/2)]\,[\sin^2(\theta_1/2)\,E(e_1)/K(e_1) -$$
$$- \cos^2(\theta_1/2)\,E(e_2)/K(e_2)] - 1 - 2\cos\theta_1\cos\theta_2 + L,$$

$$L = \cos\theta\cos\theta_1 + \cos\theta\cos\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 + (\sin^2\theta + \sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2)/2,$$

$$e_1^2 = [\sin^2(\theta_2/2) - \sin^2(\theta_1/2)]\sin^2(\theta/2)/\{[\sin^2(\theta_2/2) - \sin^2(\theta/2)]\sin^2(\theta_1/2)\},$$

$$e_2^2 = [\sin^2(\theta_2/2) - \sin^2(\theta_1/2)]\cos^2(\theta/2)/\{[\sin^2(\theta_2/2) - \sin^2(\theta/2)]\cos^2(\theta_1/2)\},$$

$K(e_1)$, $K(e_2)$ и $E(e_1)$, $E(e_2)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

2.12. Система трещин при циклической симметрии

Система прямолинейных трещин произвольной ориентации. Пусть на окружности радиуса R равномерно размещены центры N прямолинейных трещин одинаковой длины $2l$ и их углы наклона к окружности одинаковы для всех трещин. Плоскость на бесконечности находится под действием всестороннего растяжения (рис. 2.79). Асимптотические значения КИН при больших расстояних между трещинами даются формулами [2, 120]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} = p\sqrt{\pi l}\,\{1 - (\lambda^2/8)(2C_{22}\cos 2\alpha + C_{02}\cos 4\alpha) \mp$$
$$\mp (\lambda^3/32)\,[-2S_{33}\cos 3\alpha + 3S_{13}(\cos 3\alpha - \cos 5\alpha)] +$$
$$+ (\lambda^4/128)\,[C_{22}^2(5 + 3\cos 4\alpha) + 2C_{22}C_{02}(3\cos 2\alpha + \cos 6\alpha) + 2C_{02}^2 +$$

$$+ 9\,(2C_{04}\cos 4\alpha + 2C_{24}\cos 6\alpha + C_{44}\cos 4\alpha)]\} + O(\lambda^5),$$

$$K_{II}^{\pm} = p\sqrt{\pi l}\,(\lambda^2/8)\,\{-C_{22}\sin 2\alpha - C_{02}\sin 4\alpha \pm$$

$$\pm (\lambda/4)\,[2S_{33}\sin 3\alpha + S_{13}\,(3\sin 5\alpha - \sin 3\alpha)] +$$

$$+ (\lambda^2/8)\,[C_{22}^2\sin 4\alpha + C_{22}C_{02}\,(\sin 2\alpha + \sin 6\alpha) +$$

$$+ 3\,(2C_{04}\sin 4\alpha + 3C_{24}\sin 6\alpha + C_{44}\sin 4\alpha)]\} + O(\lambda^5),$$

где $\lambda = 2l/d$; $d = 2R\sin(\pi/N)$ — расстояние между центрами соседних трещин; $C_{mn} = \sin^n(\pi/N)\sum\limits_{k=1}^{N-1}\dfrac{\cos(m\pi k/N)}{\sin^n(\pi k/N)}$, $S_{mn} = \sin^n(\pi/N)\sum\limits_{k=1}^{N-1}\dfrac{\sin(m\pi k/N)}{\sin^n(\pi k/N)}$.

В работах [2, 120] приведены также асимптотические разложения КИН в случае произвольной самоуравновешенной нагрузки на берегах трещин (одинаковой для всех трещин).

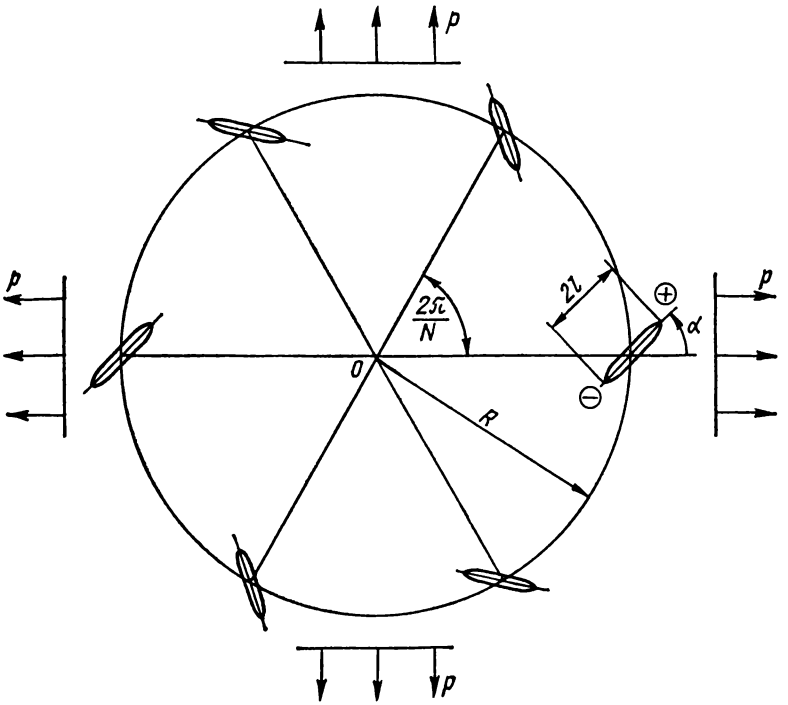


Рис. 2.79. Система прямолинейных трещин при циклической симметрии.

Система радиальных трещин конечной длины. В случае всестороннего растяжения бесконечной плоскости с циклической системой радиальных трещин (см. рис. 2.79; $\alpha = 0$) в работе [121] получены численные значения КИН методом СИУ. Эти результаты приводятся на рис. 2.80 (K_I^- — КИН для вершины трещины, лежащей ближе к центру симметрии).

Случай четырех радиальных трещин ($N = 4$) рассматривался отдельно [122, 123]. Ниже приведены значения КИН, полученные методом дуальных интегральных уравнений [122]:

$(R - l)/(R + l)$	0,141	0,316	0,500	0,671	0,806
$K_I^+/\sqrt{2\pi\,(R + l)}$	0,445	0,396	0,344	0,284	0,219
$K_I^-/\sqrt{2\pi\,(R + l)}$	0,452	0,387	0,341	0,283	0,219
$(R - l)/(R + l)$	0,866	0,922	0,949	0,975	0,995
$K_I^+/\sqrt{2\pi\,(R + l)}$	0,183	0,140	0,113	0,080	0,035
$K_I^-/\sqrt{2\pi\,(R + l)}$	0,183	0,140	0,113	0,080	0,035

Исследован также случай циклической системы трещин, когда на радиальных лучах имеется по нескольку трещин [124].

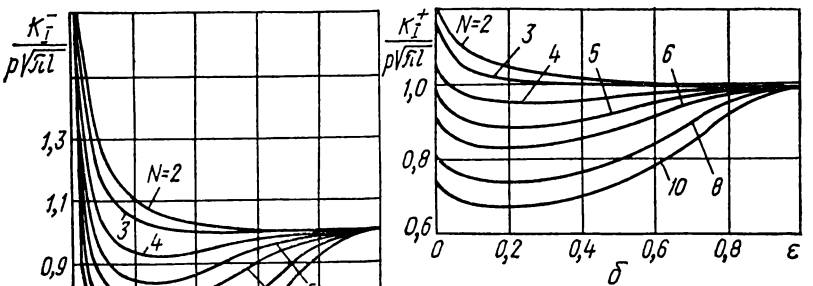


Рис. 2.80. Зависимость КИН K_I^- (*а*) и K_I^+ (*б*) от параметра $\varepsilon = (R - l)/(R + l)$ для циклической системы радиальных трещин при всестороннем растяжении на бесконечности [121].

Система полубесконечных радиальных трещин. В случае внешней крестообразной трещины (циклической системы четырех полубесконечных радиальных трещин), берега которой находятся под действием симметричной ($K_{II} = 0$) нормальной полиномиальной нагрузки (рис. 2.81), т. е.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y(x, 0) &= -p_0(|x|/a)^{-m-1}, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad (|x| \geqslant a), \\ \sigma_x(0, y) &= -p_0(|y|/a)^{-m-1}, \quad \tau_{xy}(0, y) = 0 \quad (|y| \geqslant a), \end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

КИН выражаются в квадратурах [125]

$$K_I = p_0\sqrt{a}\,[\Gamma(m/2)/\Gamma((m + 1)/2)]\exp[-k_+(im)] \quad (\mathrm{Re}\ m > 0), \tag{2.28}$$

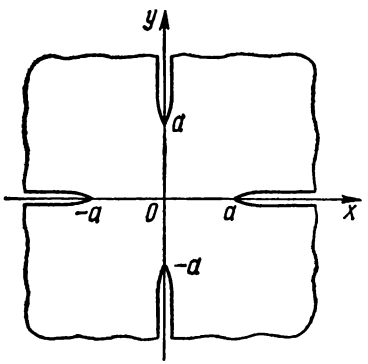
где $\Gamma(m)$ — гамма-функция;

$$k_+(im) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{m}{x^2 + m^2}\ln[1 + x\,\mathrm{csch}\,(\pi x/2)]\,dx. \tag{2.29}$$

Сравнение формул (2.23), (2.24), (2.27) и (2.28) показывает, что коэффициенты интенсивности K_I для внутренней и внешней крестообразных

трещин при действии на их берегах полиномиальных нагрузок (2.21) и (2.27) при одинаковых m равны между собой. Следовательно, в данном случае численные значения КИН $K_{\mathrm{I}} = p_0 \sqrt{2\pi a}\, F_{\mathrm{I}}$ для некоторых значений m совпадают с результатами, приведенными для внутренней крестообразной трещины (см. п. 2.8).

Система дугообразных трещин. Бесконечная плоскость, ослабленная системой n равных дугообразных трещин, равномерно размещенных на окружности радиуса R, находится под действием всестороннего растяже-



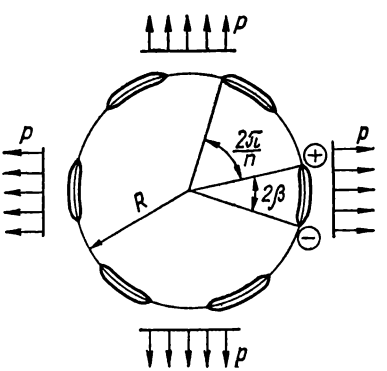


Рис. 2.81. Внешняя крестообразная трещина.

Рис. 2.82. Система равных дугообразных трещин.

ния на бесконечности (рис. 2.82). КИН выражаются в квадратурах [3, 126]:

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = p\sqrt{(2/n)\,\pi R/\mathrm{tg}\,(n\beta/2)}\,[(I_n^- + I_n^+)\,\mathrm{tg}\,(n\beta/2) \mp i\,(I_n^- -$$

$$-I_n^+)]/(3I_n^- - I_n^+); \qquad I_n^{\pm} = \int_0^{\beta} \frac{\cos((n \pm 2)\,\theta/2)\,d\theta}{\sqrt{\sin^2(n\beta/2) - \sin^2(n\theta/2)}}.$$

Приведем значения интегралов $I_n^{\pm}$ при $n = 1, 2, 3, 4$, когда они выражаются через элементарные функции и полные эллиптические интегралы первого $K(k)$ и второго $E(k)$ рода:

$$I_1^+ = \pi\cos\beta, \quad I_1^- = \pi, \quad I_2^+ = 2E(a) - K(a), \quad I_2^- = K(a), \quad a = \sin\beta,$$

$$I_3^+ = (1/2)\,\{(5/2 - 3b - 8t_1t_2)\,K(e) + 8t_1\,(t_2 - b)\,E(e)\}/\sqrt{t_1\,(t_2 - b)},$$

$$I_3^- = (1/2)\,K(e)/\sqrt{t_1\,(t_2 - b)}, \quad e = \sqrt{(t_2 - t_1)\,b/((t_2 - b)\,t_1)}, \quad b = \sin^2(\beta/2),$$

$$t_{1,2} = (2 + \cos\beta \mp \sqrt{3}\sin\beta)/4 \quad (t_2 > t_1),$$

$$I_4^+ = [(1 - 4\cos^2\beta)\,K(c) + 4E(c)\cos^2\beta]/(2\cos\beta),$$

$$I_4^- = K(c)/(2\cos\beta), \quad c = \mathrm{tg}\,\beta.$$

В работе [127] приведены также численные значения КИН для циклической системы дугообразных трещин, не лежащих на одной окружности.

2.13. Периодическая система коллинеарных трещин

Произвольная нагрузка на берегах трещин. Бесконечная плоскость ослаблена размещенной на оси x периодической системой коллинеарных трещин. В основной полосе периодов ширины d имеется одна трещина длины $2l$, на берегах которой заданы компоненты напряжений $\sigma_y^{\pm}(x, 0)$ и $\tau_{xy}^{\pm}(x, 0)$ (рис. 2.83). Остальные трещины находятся под действием такой же несамоуравновешенной нагрузки; напряжения на бесконечности

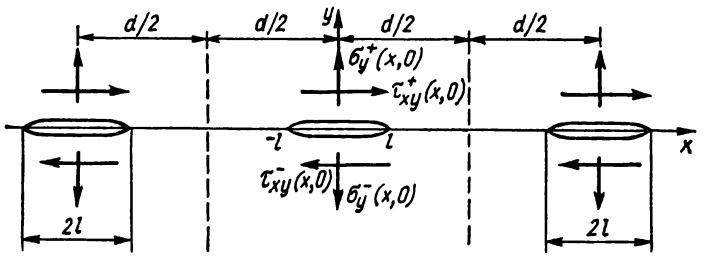


Рис. 2.83. Бесконечный ряд коллинеарных трещин при действии произвольной нагрузки на их берегах.

отсутствуют. КИН для правых (K_N^+) и левых (K_N^-) вершин трещин определяются по формуле [2, 3]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{(d/2)\sin(2\pi l/d)}}\left[\int_{-l}^{l}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\pi l/d)\pm\operatorname{tg}(\pi t/d)}{\operatorname{tg}(\pi l/d)\mp\operatorname{tg}(\pi t/d)}}\,p(t)\,dt \pm\right.$$

$$\left. \pm i\cos\frac{\pi l}{d}\,\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\int_{-l}^{l} q(t)\,dt\right],$$

где

$$p(x) = [\sigma_y^+(x, 0) + \sigma_y^-(x, 0)]/2 - i[\tau_{xy}^+(x, 0) + \tau_{xy}^-(x, 0)]/2,$$

$$q(x) = [\sigma_y^+(x, 0) - \sigma_y^-(x, 0)]/2 - i[\tau_{xy}^+(x, 0) - \tau_{xy}^-(x, 0)]/2.$$

При действии на берегах трещин самоуравновешенной нагрузки ($q(x) = 0$) формулы для КИН в ином виде приведены также в работах [128, 129].

Действие на берегах трещин сосредоточенных сил. Если к верхним берегам трещин в точках, удаленных от центра трещины на расстояние c, приложены нормальная P и сдвиговая Q сосредоточенные силы (рис. 2.84), то [2]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = (P - iQ)\{\sqrt{[\operatorname{tg}(\pi l/d)\pm\operatorname{tg}(\pi c/d)]/[\operatorname{tg}(\pi l/d)\mp\operatorname{tg}(\pi c/d)]}\pm$$

$$\pm i((\varkappa-1)/(\varkappa+1))\cos(\pi l/d)\}/\sqrt{2d\sin(2\pi l/d)}.$$

Если же, кроме того, на нижних берегах трещин действуют такие же силы по величине, но противоположные по направлению (см. рис. 2.84),

то [2]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = (P - iQ) \times$$

$$\times \sqrt{[\operatorname{tg}(\pi l/d) \pm \operatorname{tg}(\pi c/d)]/[\operatorname{tg}(\pi l/d) \mp \operatorname{tg}(\pi c/d)]}/\sqrt{(d/2)\sin(2\pi l/d)}.$$

Когда силы приложены в центрах трещин ($c = 0$), из последней формулы следует [7, 10, 13]:

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = (P - iQ)/\sqrt{(d/2)\sin(2\pi l/d)}.$$

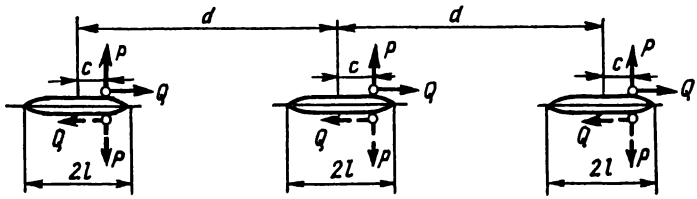


Рис. 2.84. Бесконечный ряд коллинеарных трещин при действии на их берегах сосредоточенных сил.

Действие на берегах трещин постоянной нагрузки. Пусть на верхних берегах трещин действует постоянная нормальная p и сдвигающая τ нагрузки (рис. 2.85). Тогда [2]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = (p - i\tau)\,[(1/2)\sqrt{d\operatorname{tg}(\pi l/d)} \pm$$

$$\pm il\,((\varkappa - 1)/(\varkappa + 1))\sqrt{(1/d)\operatorname{ct}(\pi l/d)}].$$

Если же, кроме того, и к нижним берегам трещин приложена такая же по величине, но противоположно направленная нагрузка, то [7, 10, 130]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = (p - i\tau)\sqrt{d\operatorname{tg}(\pi l/d)}.$$

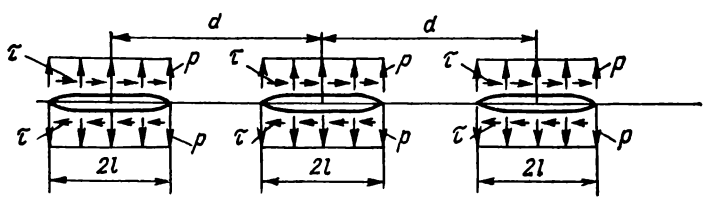


Рис. 2.85. Бесконечный ряд коллинеарных трещин при действии на их берегах постоянной нагрузки.

При действии постоянной нагрузки только на центральных участках шириной $2b$ на верхних и нижних берегах трещин КИН находится по формуле [9, 129]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = (p - i\tau)\sqrt{d\operatorname{tg}(\pi l/d)}\,(2/\pi)\arcsin[\sin(\pi b/d)/\sin(\pi l/d)].$$

Действие периодической системы сосредоточенных сил во внутренних точках бесконечной плоскости. Пусть берега трещин свободны от нагрузки, а в области пластины приложена периодическая система сосредоточенных

сил P_1 и Q_1 (рис. 2.86; $P_2 = Q_2 = 0$). Тогда [9, 128, 131]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = \sqrt{(1/d)\operatorname{tg}(\pi l/d)}\,\{(P_1 - iQ_1)\operatorname{ch}(\pi b/d) + (P_1 + iQ_1)(2\pi b/d\,(1+\varkappa))\operatorname{sh}(\pi b/d)\cos^2(\pi l/d)/[\sin^2(\pi l/d) + \operatorname{sh}^2(\pi b/d)]\}/\sqrt{\sin^2(\pi l/d) + \operatorname{sh}^2(\pi b/d)}.$$

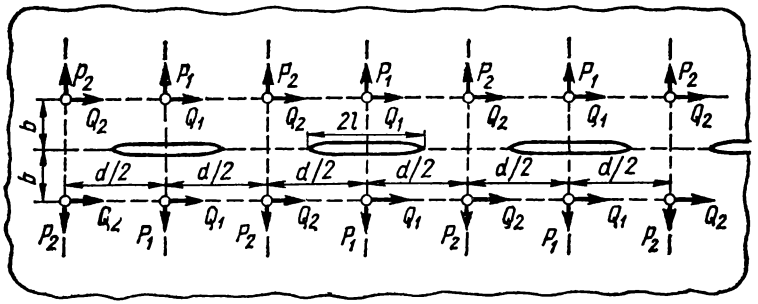


Рис. 2.86. Бесконечный ряд коллинеарных трещин: точки приложения сосредоточенных сил лежат на прямых, ортогональных линии трещин и проходящих через центры трещин или через середины промежутков между ними.

При действии сосредоточенных сил P_2, Q_2 в точках прямых, проходящих через середины промежутков между трещинами (см. рис. 2.86; $P_1 = P_2 = 0$), КИН равны [9, 131]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = \sqrt{(1/d)\operatorname{tg}(\pi l/d)}\,\{(P_2 - iQ_2)\operatorname{sh}(\pi b/d) - (P_2 + iQ_2)(2\pi b/d\,(1+\varkappa))\operatorname{ch}(\pi b/d)\cos^2(\pi l/d)/[\cos^2(\pi l/d) + \operatorname{sh}^2(\pi b/d)]\}/\sqrt{\cos^2(\pi l/d) + \operatorname{sh}^2(\pi b/d)}.$$

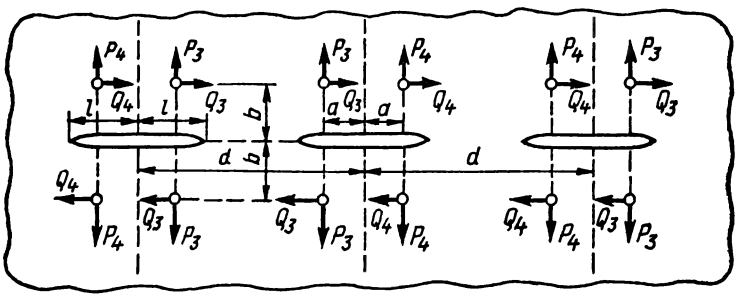


Рис. 2.87. Бесконечный ряд коллинеарных трещин: в четырех точках полосы периодов действуют сосредоточенные силы.

Если в четырех симметричных точках в полосе периодов приложены сосредоточенные силы P и Q (рис. 2.87; $P_3 = P_4 = P$, $Q_3 = Q_4 = Q$), то [9]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = \sqrt{(1/d)\operatorname{tg}(\pi l/d)}\,[(P - iQ) - (P + iQ)(2b/(\varkappa + 1))(\partial/\partial b)] \times$$

$$\times (\cos(\pi c/d)/\sqrt{\sin^2(\pi l/d) - \sin^2(\pi c/d)} +$$

$$+ \cos(\pi\bar{c}/d)/\sqrt{\sin^2(\pi l/d) - \sin^2(\pi\bar{c}/d)}),$$

где $c = a + ib$, $\bar{c} = a - ib$.

Если сосредоточенные силы P_3 и Q_3 действуют только через одну полосу периодов (см. рис. 2.87; $P_4 = Q_4 = 0$), КИН даются формулой [9]

$$K_I^{\pm} - iK_{II}^{\pm} = \sqrt{(1/d)\operatorname{tg}(\pi l/d)}\,[(P_3 - iQ_3) - (P_3 + iQ_3)\,(2b/(\varkappa + 1))\,(\partial/\partial b)] \times$$

$$\times \{\cos(\pi c/d)\sqrt{[\sin(\pi l/d) \pm \sin(\pi c/d)]/[\sin(\pi l/d) \mp \sin(\pi c/d)]} +$$

$$+ \cos(\pi\bar{c}/d)\sqrt{[\sin(\pi l/d) \pm \sin(\pi\bar{c}/d)]/[\sin(\pi l/d) \mp \sin(\pi\bar{c}/d)]} +$$

$$+ i[\cos(\pi c/d) - \cos(\pi\bar{c}/d)]\}/(2\sin(\pi l/d)),$$

где $c = a + ib$, $\bar{c} = a - ib$.

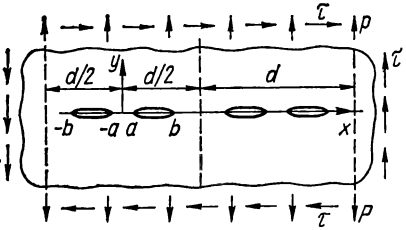


Рис. 2.88. Бесконечная плоскость с периодической системой эксцентрически размещенных коллинеарных трещин.

Бесконечный ряд эксцентрически размещенных коллинеарных трещин. Бесконечная плоскость содержит периодическую систему коллинеарных трещин, если в полосе периодов имеются две равные трещины, симметрично размещенные относительно средней линии полосы. Берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы одноосное растяжение и сдвиг (рис. 2.88). КИН [2, 3, 132] для ближних вершин трещин ($x = \pm a$)

$$K_I^- - iK_{II}^- = (p - i\tau)\sqrt{d}\,[1 + \cos(2\pi a/d) - (1 + \cos(2\pi b/d)) \times$$

$$\times \Pi(m, \rho)/K(\rho)]/\sqrt{\sin(2\pi a/d)\,[\cos(2\pi a/d) - \cos(2\pi b/d)]}$$

и дальних вершин трещин ($x = \pm b$)

$$K_I^+ - iK_{II}^+ = (p - i\tau)\sqrt{d}\,[1 + \cos(2\pi b/d)]\,[-1 +$$

$$+ \Pi(m, \rho)/K(\rho)]/\sqrt{\sin(2\pi b/d)\,[\cos(2\pi a/d) - \cos(2\pi b/d)]},$$

где $K(\rho)$, $\Pi(m, \rho)$ — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода; $m = 2c^-/(1 + c^- + c^+)$, $\rho = 2\sqrt{c^-}/\sqrt{(1 + c^-)^2 - (c^+)^2}$, $c^{\pm} = [\cos(2\pi a/d) \pm \cos(2\pi b/d)]/2$.

В другом виде КИН для рассматриваемой задачи приведены также в работе [133].

Периодическая система коллинеарных трещин при трех трещинах в полосе периодов. Пусть в полосе периодов имеются три трещины, симметрично размещенные относительно средней линии полосы. Берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы одноосное растяжение и сдвиг (рис. 2.89). Тогда [132]

$$K_I(\pm a) - iK_{II}(\pm a) = (p - i\tau)\,[\cos^2(\pi a/d) - \Pi(n, k)\cos^2(\pi c/d)/K(k)] \times$$

$$\times \sqrt{d\operatorname{tg}(\pi a/d)/[(\sin^2(\pi b/d) - \sin^2(\pi a/d))\,(\sin^2(\pi c/d) - \sin^2(\pi a/d))]},$$

$$K_I(\pm b) - iK_{II}(\pm b) = (p - i\tau)\,[\cos^2(\pi b/d) - \Pi(n, k)/K(k)] \times$$

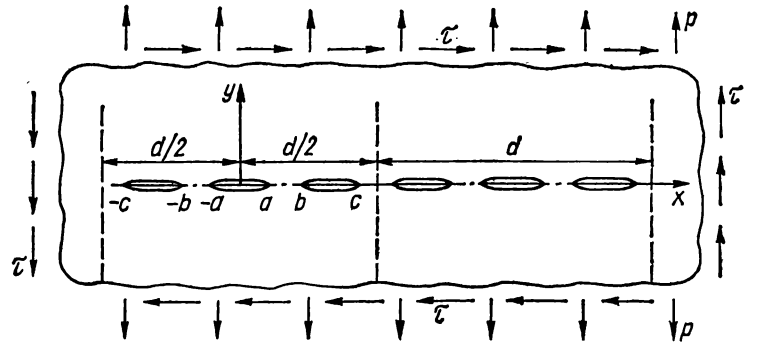


Рис. 2.89. Бесконечная плоскость с периодической системой коллинеарных трещин при трех трещинах в полосе периодов.

$$\times \sqrt{d \operatorname{tg}(\pi b/d)/[(\sin^2(\pi b/d) - \sin^2(\pi a/d))(\sin^2(\pi c/d) - \sin^2(\pi b/d))]},$$

$$K_I(\pm c) - iK_{II}(\pm c = (p - i\tau)\cos^2(\pi c/d)[\Pi(n, k)/K(k) - 1] \times$$

$$\times \sqrt{d \operatorname{tg}(\pi c/d)/[(\sin^2(\pi c/d) - \sin^2(\pi a/d))/(\sin^2(\pi c/d) - \sin^2(\pi b/d))]},$$

где $K(k)$ и $\Pi(n, k)$ — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода;

$$n = [\sin^2(\pi c/d) - \sin^2(\pi b/d)]/\cos^2(\pi b/d),$$

$$k = (\cos(\pi a/d)/\cos(\pi b/d)) \times$$

$$\times \sqrt{[\sin^2(\pi c/d) - \sin^2(\pi b/d)]/[\sin^2(\pi c/d) - \sin^2(\pi a/d)]}.$$

В работе [132] приведены также выражения КИН в общем случае самоуравновешенной симметричной нагрузки на берегах трещин.

2.14. Периодическая система параллельных трещин

Параллельные трещины конечной длины при симметричной нагрузке. Бесконечная плоскость ослаблена бесконечным рядом параллельных трещин равной длины, на берегах которых действует симметричная ($K_{II} = 0$) нагрузка (рис. 2.90; $p = \tau = 0$):

$$\sigma_y^{\pm} = -p(x), \quad \tau_{xy}^{\pm} = 0 \quad (|x| \leqslant l).$$

Приближенное замкнутое решение этой задачи получено в работе [134] путем специальной аппроксимации ядра сингулярного интегрального уравнения. В результате для КИН получены выражения [2, 3, 134]

$$K_I(\pm l) = \frac{\sqrt{2A}}{\sqrt{\pi \operatorname{sh}(2Al)}} \int_{-l}^{l} \sqrt{\frac{\operatorname{th}(Al) \pm \operatorname{th}(At)}{\operatorname{th}(Al) \mp \operatorname{th}(At)}}\, p(t)\, dt, \quad A = 2\pi/d, \tag{2.30}$$

Если к противоположным берегам трещины в точке $x = c$ приложены равные по величине, но противоположно направленные нормальные со-

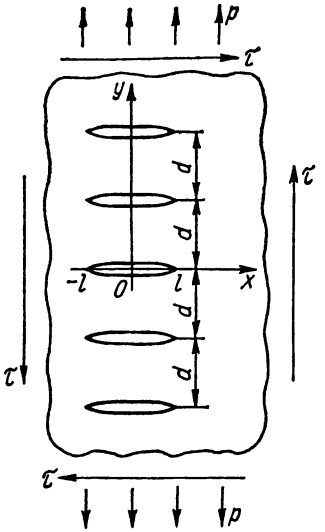


Рис. 2.90. Периодическая система параллельных трещин конечной длины.

средоточенные силы P, т. е. $p(x) = P \times \times \delta(x - c)$ ($\delta(x)$ — дельта-функция), то из выражения (2.30) следует [2, 134]

$$K_I(\pm l) = (P\sqrt{2\lambda}/\sqrt{l \operatorname{sh}(2\pi\lambda)}) \times$$

$$\times \sqrt{(\operatorname{th}(\pi\lambda) \pm \operatorname{th}(Ac))/(\operatorname{th}(\pi\lambda) \mp \operatorname{th}(Ac))},$$

$$\lambda = 2l/d,$$

в частности, при $c = 0$, т. е. при действии сосредоточенных сил в центре трещины, имеем

$$K_I(\pm l) = P\sqrt{2\lambda}/\sqrt{l \operatorname{sh}(2\pi\lambda)}.$$

При заданной на берегах трещин равномерно распределенной нагрузке $p(x) = p = \text{const}$ или при растяжении на бесконечности усилиями p в направлении, ортогональном линиям трещин (см. рис. 2.90; $\tau = 0$), решение (2.30) приводит к выражению [2, 3, 134]

$$K_I = p\sqrt{(l/\lambda) \operatorname{th}(\pi\lambda)}. \qquad (2.31)$$

Для последнего случая нагрузки известны асимптотические решения при больших [2, 3, 135]

$$K_I = p\sqrt{\pi l}\,[1 - \pi^2\lambda^2/2^3 + 3\pi^4\lambda^4/2^7 - 833\pi^6\lambda^6/(2^{10} \cdot 3^3 \cdot 7)] + O(\lambda^8) \quad (2.32)$$

и малых расстояниях между трещинами ($\lambda \to \infty$) [136, 137]

$$K_I = p\sqrt{l/\lambda}. \qquad (2.33)$$

Легко видеть, что решение (2.31) хорошо согласуется с асимптотическими решениями (2.32) и (2.33). Точность результата (2.31) можно несколько улучшить, если подобрать в формуле (2.31) поправочный множитель таким образом, чтобы полученное решение было эквивалентно с точностью до величин $O(\lambda^n)$ асимптотическому решению при малых λ. Одним из таких результатов является выражение [2]

$$K_I = p\sqrt{(l/\lambda) \operatorname{th}(\pi\lambda)}\,[1 + \pi^2\lambda^2/24 \operatorname{ch}(\pi\lambda) - \pi^4\lambda^4/640 \operatorname{ch}(\pi\lambda)], \qquad (2.34)$$

которое эквивалентно с точностью до величин $O(\lambda^6)$ асимптотическому решению (2.32).

В работе [137] также на основе асимптотических решений для больших и малых расстояний между трещинами получено интерполяционное выражение для K_I в виде

$$K_I = p\sqrt{\pi l\varepsilon}\,\{(1/\sqrt{\pi})\,[1 + \varepsilon/2 + 3\varepsilon^2/8 + 5\varepsilon^3/16 + 35\varepsilon^4/128 +$$

$$+ 63\varepsilon^5/256 + 231\varepsilon^6/1024] + 15{,}342\varepsilon^7 - 47{,}020\varepsilon^8 + 45{,}279\varepsilon^9 - 14{,}255\varepsilon^{10}\}, \qquad (2.35)$$

где $\varepsilon = 1/(1 + \lambda)$. Первая часть этого выражения (в квадратных скобках) представляет собой асимптотическое решение при малых значениях параметра ε с точностью до величин $O(\varepsilon^7)$, т. е. при малых относительных расстояниях между трещинами.

В табл. 2.17 для различных λ приведены значения функции $F_1 = K_1/(p\sqrt{\pi l})$, вычисленные по формулам (2.31) — (2.35). В последней строке даны значения F_1, полученные численным решением СИУ [2, 3, 138]. Анализ данных таблицы показывает, что решение (2.34) можно использовать при всех значениях λ, причем для малых $(0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}2)$ и больших $(2 \leqslant \lambda < \infty)$ значений λ это решение практически точное, а для средних значений λ его относительная погрешность не превосходит 1 %. Точность решения (2.31) несколько ниже; его максимальная относительная ошибка, которая достигается при $\lambda = 0{,}5$, равна 3,2 %.

Численные значения КИН для симметрично нагруженной плоскости с периодической системой параллельных трещин приведены также в работах [7, 9, 12, 139]. Имеются также аналогичные результаты в случае двух бесконечных рядов параллельных трещин [140], т. е. когда в полосе периодов находятся две коллинеарные трещины.

Параллельные трещины конечной длины при антисимметричной нагрузке. Пусть на берегах трещин действует антисимметричная ($K_1 = 0$) нагрузка (см. рис. 2.90; $p = \tau = 0$)

$$\sigma_y^{\pm} = 0, \quad \tau_{xy}^{\pm} = -\tau(x) \quad (|x| \leqslant l).$$

Приближенное замкнутое решение этой задачи получено в работе [141] путем специальной аппроксимации ядра сингулярного интегрального уравнения. Для КИН получены выражения [2, 3, 141]

$$K_{II}(\pm l) = \frac{1}{\sqrt{\pi B \operatorname{th}(Bl)}}\left[B\int_{-l}^{l}\sqrt{\frac{\operatorname{th}(Bl)\pm\operatorname{th}(Bt)}{\operatorname{th}(Bl)\mp\operatorname{th}(Bt)}}\frac{\tau(t)\,dt}{\operatorname{ch}(Bt)} \pm C\right], \tag{2.36}$$

где $C = \frac{1}{K(a)}\int_{-a}^{a}\Pi\left(\frac{a^2}{y^2}, a^2\right)\sqrt{a^2-y^2}f(y)\frac{dy}{y}$, $B = \frac{3\pi}{2d}$, $a = \operatorname{th}(Bl)$, $f(y) = \tau(1/B)\operatorname{arth}(y)/\sqrt{1-y^2}$, $K(a)$, $\Pi(\rho^2, a)$ — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода.

Если к противоположным берегам трещины в точке $x = c$ приложены равные по величине, но противоположно направленные силы Q, т. е. $\tau(x) = Q\delta(x-c)$, то из решения (2.36) следует [2, 141]

$$K_{II}(\pm l) = Q\sqrt{B/\pi a}\{\sqrt{(1-b^2)(a\pm b)/(a\mp b)} +$$

$$+ [E(a)F(\varphi, a) - K(a)E(\varphi, a)]/K(a)\},$$

$$b = \operatorname{th}(Bc), \quad \varphi = \arcsin(b/a),$$

($F(\varphi, a)$, $E(\varphi, a)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода; $E(a) = E(\pi/2, a)$), в частности, при $c = 0$, т. е. при действии сил в центре трещины [2, 3, 141],

$$K_{II}(\pm l) = Q\sqrt{(3\lambda/l)\operatorname{cth}(3\pi\lambda/4)}/2, \quad \lambda = 2l/d,$$

Таблица 2.17. **Относительные значения КИН $F_I = K_I/(p\sqrt{\pi l})$ для пе бесконечности**

Номер формулы	0	0,2	0,4	0,5	0,6
(2.31)	1	0,9414	0,8225	0,7641	0,7118
(2.32)	1	0,9540	0,8441	0,7696	0,6587
(2.33)	—	1,2662	0,8921	0,7979	0,7284
(2.34)	1	0,9541	0,8493	0,7925	0,7389
(2.35)	1	0,9498	0,8357	0,7776	0,7246
Численное решение	1	0,9540	0,8478	0,7896	0,7344

Таблица 2.18. **Относительные значения КИН $F_{II} = K_{II}/\tau\sqrt{\pi l}$ для**

Номер формулы	0	0,2	0,5	0,6	0,7
(2.37)	1	1,0178	1,0944	1,1268	1,1607
(2.38)	1	1,0160	1,0888	1,1226	1,1623
(2.39)	—	1,0630	1,0869	1,1184	1,1522
(2.40)	1	1,0161	1,0888	1,1207	1,1543
(2.41)	1	1,0160	1,0905	1,1224	1,1558
Численное решение	1	1,0160	1,0881	1,1197	1,1532

При заданной на берегах трещин равномерно распределенной нагрузке $\tau(x) = \tau = \text{const}$ (или при сдвиге на бесконечности усилиями τ; см. рис. 2.90, $p = 0$) решение (2.36) приводит к выражению [2, 3, 141]

$$K_{II} = (4\tau/\pi)\, K\,(\text{th}\,(3\pi\lambda/4))\,\sqrt{l\,\text{th}\,(3\pi\lambda/4)/(3\lambda)}. \qquad (2.37)$$

Для последнего случая нагрузки известны асимптотические решения при больших [2, 3, 142]

$$K_{II} = \tau\sqrt{\pi l}\,(1 + \pi^2\lambda^2/3\cdot 2^3 - 17\pi^4\lambda^4/(2^7\cdot 3^2\cdot 5) + \\ + 17\pi^6\lambda^6/(2^{10}\cdot 3^2\cdot 7)) + O(\lambda^8) \qquad (2.38)$$

и малых расстояниях между трещинами ($\lambda \to \infty$) [137, 141, 142]

$$K_{II} = \tau\sqrt{3\lambda l}\,(1 + 0{,}2865/\lambda). \qquad (2.39)$$

Результат (2.37) хорошо согласуется с асимптотическими решениями (2.38) и (2.39). Приведем еще одно замкнутое решение [2]

$$K_{II} = (4\tau/\pi)\, K\,(\text{th}\,(3\pi\lambda/4))\,\sqrt{l\,\text{th}\,(3\pi\lambda/4)/(3\lambda)}\,[1 - \pi^2\lambda^2/(192\,\text{ch}\,\pi\lambda)], \qquad (2.40)$$

риодической системы параллельных трещин при растяжении на

λ				
0,7	0,8	1,0	1,5	2,0
0,6661	0,6267	0,5631	0,4607	0,3989
0,4568	0,0608	...	...	...
0,6743	0,6308	0,5641	0,4608	0,3989
0,6902	0,6469	0,5757	0,4619	0,3978
0,6778	0,6369	0,5705	0,4634	0,4000
0,6845	0,6407	0,5702	0,4612	0,3989

периодической системы параллельных трещин при сдвиге на бесконечности

λ				
0,8	0,9	1,0	1,5	2,0
1,1953	1,2300	1,2647	1,4318	1,5859
1,2118	1,2791	1,3771	...	...
1,1871	1,2222	1,2572	1,4258	1,5803
1,1889	1,2240	1,2590	1,4319	1,5538
1,1900	1,2244	1,2589	1,4258	1,5800
1,1877	1,2225	1,2574	1,4255	1,5800

которое эквивалентно с точностью до величин $O(\lambda^4)$ асимптотическому решению (2.38).

В работе [137] также на основе асимптотических решений при больших и малых расстояниях между трещинами получено интерполяционное выражение для K_{II} в виде

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi l/\varepsilon}\,[\sqrt{3/\pi}\,(1 - 0{,}2135\varepsilon + 0{,}0182\varepsilon^2 + 0{,}044\varepsilon^3 + $$

$$+ 0{,}051\varepsilon^4 + 0{,}051\varepsilon^5) - 0{,}303\varepsilon^6 + 2{,}041\varepsilon^7 - 2{,}631\varepsilon^8 + 0{,}963\varepsilon^9], \quad (2.41)$$

где $\varepsilon = 1/(1 + \lambda)$. Первая часть этого выражения (в круглых скобках) представляет собой асимптотическое решение при малых значениях ε с точностью до величин $O(\varepsilon^7)$.

В табл. 2.18 для различных λ приведены значения функции $F_{II} = K_{II}/\tau\sqrt{\pi l}$, вычисленные по формулам (2.37) — (2.41). В последней строке даны значения F_{II}, полученные численным решением сингулярного интегрального уравнения [2, 3, 138]. Из сравнения числовых данных видно, что решение (2.37) при малых и больших значениях λ практически точное, а при средних значениях λ $(0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 1{,}0)$ дает требуемый результат с относительной ошиб-

кой, не превышающей 0,7 %. Максимальная относительная ошибка уточненного решения (2.40) менее 0,2 %.

Численные значения КИН для антисимметрично нагруженной плоскости с периодической системой параллельных трещин приведены также в работах [6, 7, 9, 12].

Параллельные полубесконечные трещины. Пусть на берегах полубесконечных трещин (рис. 2.91) задана произвольная самоуравновешенная нагрузка

$$\sigma_y^{\pm} = -p(x), \quad \tau_{xy}^{\pm} = -\tau(x) \quad (x \geqslant 0).$$

Выражения КИН, полученные предельным переходом из соотношений (2.30) и (2.36), имеют вид [2, 3]

$$K_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{8}{d}} \int_0^{\infty} \frac{p(x)\,dx}{\sqrt{\exp(4\pi x/d) - 1}},$$

$$K_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{6}{d}} \int_0^{\infty} \frac{\tau(x)\,dx}{\sqrt{1 - \exp(-3\pi x/d)}}. \qquad (2.42)$$

Если к берегам трещины в точке $x = c$ приложены равные по величине, но противоположно направленные нормальные P и сдвигающие Q сосредоточенные силы, т. е. $p(x) = P\delta(x - c)$, $\tau(x) = Q\delta(x - c)$ ($\delta(x)$ — дельта-функция), то из формул (2.42) следует [2]

$$K_{\mathrm{I}} = \sqrt{8/d}P/\sqrt{\exp(4\pi c/d) - 1}, \quad K_{\mathrm{II}} = \sqrt{6/d}Q/\sqrt{1 - \exp(-3\pi c/d)}.$$

При действии на берега трещин постоянной нормальной нагрузки $p(x) = p = \mathrm{const}$, $\tau(x) = 0$ из соотношений (2.42) следует результат [3]

$$K_{\mathrm{I}} = p\sqrt{d/2},$$

совпадающий с точным [6, 9, 136, 137].

Внешние параллельные трещины. Бесконечная плоскость ослаблена бесконечным рядом внешних параллельных разрезов (рис. 2.92), на берегах которых задана произвольная самоуравновешенная нагрузка

$$\sigma_y^{\pm} = -p(x), \quad \tau_{xy}^{\pm} = -\tau(x) \quad (|x| \geqslant a).$$

Замкнутое приближенное решение этой задачи получено [143, 144] путем специальной аппроксимации ядер сингулярных интегральных уравнений, соответствующих симметричной и антисимметричной нагрузкам. Выражения КИН для левой (K_N^-) и правой (K_N^+) трещин имеют вид [2, 3, 143, 144]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} = -\frac{1}{\sqrt{\pi A \operatorname{th}(\pi\lambda a)}} \left[A \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty} \right) \sqrt{\frac{\operatorname{th}(Ax) \pm \operatorname{th}(Aa)}{\operatorname{th}(Ax) \mp \operatorname{th}(Aa)}} \frac{p(x)\,dx}{\operatorname{ch}(Ax)} - C_1 \right],$$

$$K_{\mathrm{II}}^{\pm} = \frac{3}{\sqrt{3\pi d \operatorname{sh}(2Ba)}} \times$$

$$\times \left[\left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty} \right) \sqrt{\frac{\operatorname{th}(Bx) \pm \operatorname{th}(Ba)}{\operatorname{th}(Bx) \mp \operatorname{th}(Ba)}} \tau(x)\,dx + C_2 \operatorname{ch}(Aa) \right],$$

$$C_1 = \frac{1}{K\,\mathrm{th}\,(Aa)}\left[\frac{\pi^2}{d}P + A\left(\int\limits_{-\infty}^{-a} - \int\limits_{a}^{\infty}\right)\sqrt{\mathrm{th}^2(Ax) - \mathrm{th}^2(Aa)}\times\right.$$

$$\left.\times\,\Pi\left(\frac{\mathrm{th}^2(Aa)}{\mathrm{th}^2(Ax)},\ \mathrm{th}\,(Aa)\right)\frac{p(x)\,dx}{\mathrm{sh}\,(Ax)}\right], \qquad (2.43)$$

$$C_2 = Q + \left(\int\limits_{-\infty}^{-a} + \int\limits_{a}^{\infty}\right)\tau(x)\,dx, \quad A = 2\pi/d, \quad B = 3\pi/(2d),$$

$K(a)$, $\Pi(m, a)$ — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода; P и Q — компоненты главного вектора внешних усилий, приложенных на бесконечности; d — расстояние между трещинами.

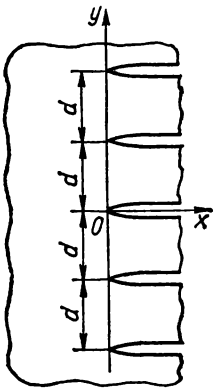


Рис. 2.91. Периодическая система параллельных полубесконечных трещин.

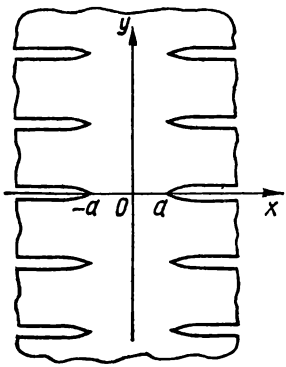


Рис. 2.92. Периодическая система внешних параллельных трещин.

Если берега трещин свободны от нагрузки, а плоскость растягивается и сдвигается на бесконечности усилиями, главные векторы которых соответственно равны P и Q, то из формулы (2.43) следует [2, 3, 143, 144]

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}} &= \pi P/[K\,(\mathrm{th}\,(2\pi a/d))\ \sqrt{2d\,\mathrm{th}\,(2\pi a/d)}],\\ K_{\mathrm{II}} &= 3Q/\sqrt{6d\,\mathrm{th}\,(3\pi a/2d)}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.44)$$

Приближенные решения (2.43) и (2.44) являются замкнутыми, т. е. они пригодны при любых значениях параметров задачи, а при малых и больших относительных расстояниях между трещинами стремятся к точным решениям.

2.15. Периодическая система трещин произвольной формы и ориентации

Произвольно ориентированные прямолинейные трещины. Бесконечная плоскость ослаблена бесконечным рядом трещин одинаковой длины $2l$, центры которых находятся на одной прямой (оси x), расстояние между

центрами соседних трещин постоянно и равно d, их углы наклона к оси x одинаковы и равны α. К берегам трещин приложены постоянные нормальные σ и сдвигающие τ напряжения. Асимптотические представления КИН даются выражениями [2, 3, 135, 145]

$$K_I = \sqrt{\pi l}\,\{\sigma + (\pi^2\lambda^2/(3\cdot 2^3))\,[\sigma\,(2\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) + \tau\,(\sin 2\alpha - \sin 4\alpha)] + \\ + (\pi^4\lambda^4/2^7)\,\{\sigma\,[{}^7/_9 - ({}^2/_3)\cos 2\alpha + ({}^{14}/_{15})\cos 4\alpha - ({}^{28}/_{45})\cos 6\alpha] + \\ + \tau\,[-({}^2/_9)\sin 2\alpha + ({}^{28}/_{45})\sin 4\alpha - ({}^{28}/_{45})\sin 6\alpha]\} + \\ + (\pi^6\lambda^6/(2^8\cdot 3^2))\,\{\sigma\,[-{}^{17}/_{12} + ({}^7/_2)\cos 2\alpha - 2\cos 4\alpha + \\ + ({}^{25}/_{14})\cos 6\alpha - ({}^{17}/_{14})\cos 8\alpha] + \tau\,[({}^{11}/_{20})\sin 2\alpha - \\ - ({}^9/_{10})\sin 4\alpha + ({}^{29}/_{21})\sin 6\alpha - ({}^{17}/_{14})\sin 8\alpha]\}\} + O(\lambda^8),$$

$$K_{II} = \sqrt{\pi l}\,\{\tau + (\pi^2\lambda^2/(3\cdot 2^3))\,[\sigma\,(\sin 2\alpha - \sin 4\alpha) + \tau\cos 4\alpha] + \\ + (\pi^4\lambda^4/2^7)\,\{\sigma\,[-({}^2/_9)\sin 2\alpha + ({}^{28}/_{45})\sin 4\alpha - ({}^{28}/_{45})\sin 6\alpha] + \\ + \tau\,[{}^1/_3 - ({}^2/_9)\cos 2\alpha - ({}^{14}/_{45})\cos 4\alpha + ({}^{28}/_{45})\cos 6\alpha]\} + \\ + (\pi^6\lambda^6/2^8\cdot 3^2)\,\{\sigma\,[({}^{19}/_{20})\sin 2\alpha - ({}^{11}/_{10})\sin 4\alpha + ({}^{29}/_{21})\sin 6\alpha - \\ - ({}^{17}/_{14})\sin 8\alpha] + \tau\,[-{}^7/_{12} + \cos 2\alpha - ({}^{41}/_{42})\cos 6\alpha + ({}^{17}/_{14})\times \\ \times\cos 8\alpha]\}\} + O(\lambda^8),$$

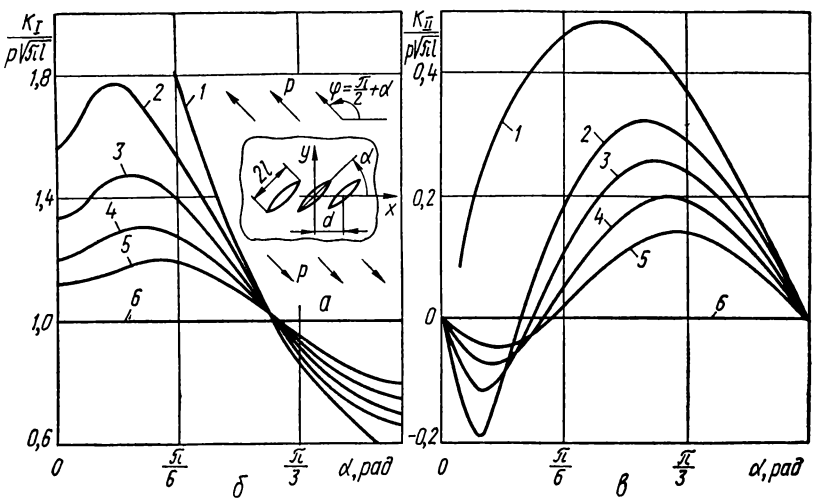


Рис. 2.93. Схема периодической системы прямолинейных трещин при растяжении в направлении, перпендикулярном линиям трещин (*а*), и зависимость КИН K_I (*б*) и K_{II} (*в*) от угла α:

1 — $\lambda = 2l/d = 1{,}0$; *2* — $\lambda = 0{,}8$; *3* — $\lambda = 0{,}7$; *4* — $\lambda = 0{,}6$; *5* — $\lambda = 0{,}5$; *6* — $\lambda = 0$ [3].

где $\lambda = 2l/d$. В работах [2, 3, 135] приведены также асимптотические разложения КИН в общем случае действующей на трещинах самоуравновешенной нагрузки.

На рис. 2.93—2.95 приведены зависимости КИН от угла ориентации трещин α при действии на бесконечности растягивающих и сдвигающих усилий. Эти результаты получены методом СИУ [2, 3].

Численные данные для рассматриваемой системы трещин приведены также в работе [146].

Периодическая система продольно-поперечных трещин. Бесконечная плоскость ослаблена двумя периодическими системами прямолинейных трещин: бесконечным рядом коллинеарных трещин длины $2l$ и бесконеч-

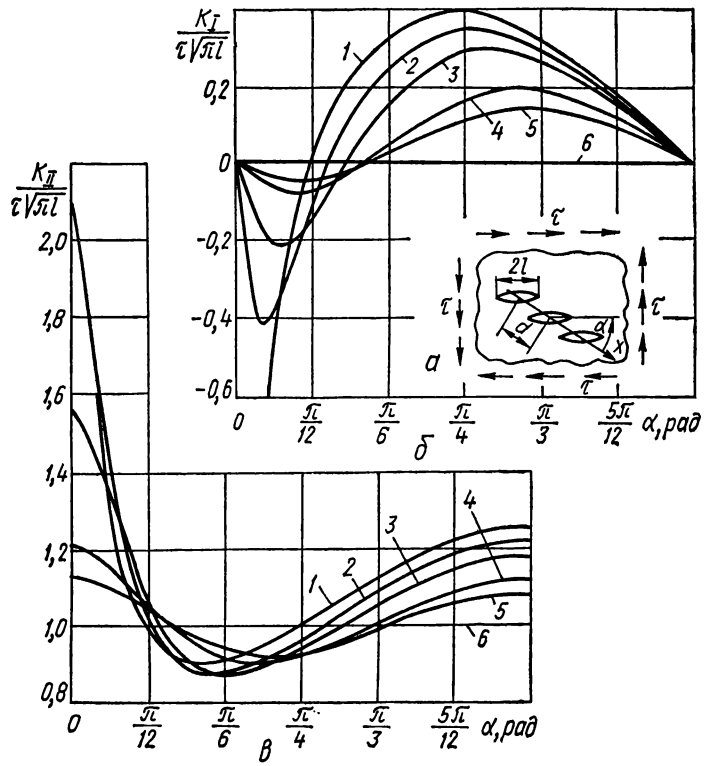


Рис. 2.94. Схема периодической системы прямолинейных трещин при сдвиге на бесконечности (*а*) и зависимость КИН K_I (*б*) и K_{II} (*в*) от угла α:

1 — $\lambda = 2l/d = 1{,}0$; *2* — $\lambda = 0{,}9$; *3* — $\lambda = 0{,}8$; *4* — $\lambda = 0{,}6$; *5* — $\lambda = 0{,}5$; *6* — $\lambda = 0$ [3].

ным рядом параллельных трещин. Центры всех трещин размещены равномерно на одной прямой. Трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности задано двухосное растяжение и сдвиг (рис. 2.96). Асимптотическое представление КИН при больших расстояниях между трещинами имеет вид [147]

$$K_I = \sigma_1 \sqrt{\pi l}\,(\alpha_{10} + \alpha_{11}) + \sigma_2 \sqrt{\pi l}\,(\beta_{10} + \beta_{11}),$$

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi l}\,(\omega_{20} + \omega_{21})$$

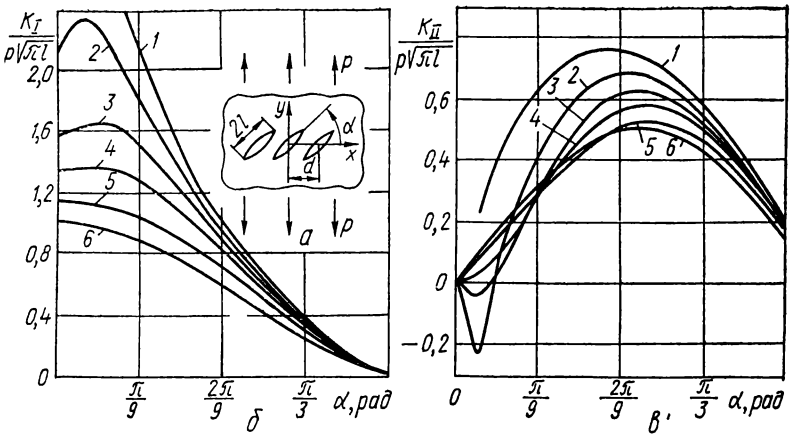


Рис. 2.95. Схема периодической системы трещин при одноосном растяжении на бесконечности ортогонально линии центров трещин (*а*) и зависимость КИН K_I (*б*) и K_{II} (*в*) от угла α:

1 — $\lambda = 2l/d = 1{,}0$; *2* — $\lambda = 0{,}9$; *3* — $\lambda = 0{,}8$; *4* — $\lambda = 0{,}7$; *5* — $\lambda = 0{,}5$; *6* — $\lambda = 0$ [3].

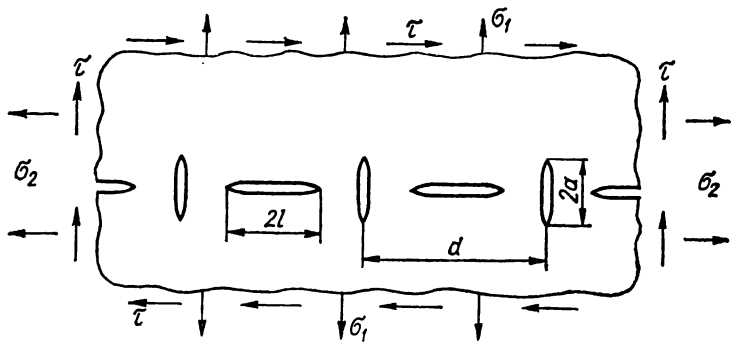


Рис. 2.96. Схема периодической системы продольно-поперечных трещин.

в вершинах продольных трещин и

$$K_I = \sigma_1 \sqrt{\pi a}\,(\alpha_{40} + \alpha_{41}) + \sigma_2 \sqrt{\pi a}\,(\beta_{40} + \beta_{41}),$$

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a}\,(\omega_{30} + \omega_{31})$$

в вершинах поперечных трещин. Здесь

$$\alpha_{10} = \varepsilon/8 - 5\varepsilon^2/128 + 3\delta\varepsilon/128,$$

$$\alpha_{11} = \delta\varepsilon/128, \quad \delta = (2\pi l/d)^2,$$

$$\alpha_{40} = 1 + \varepsilon/8 + \varepsilon^2/48 - \delta\varepsilon/64, \quad \alpha_{41} = \varepsilon^2/384, \quad \varepsilon = (2\pi a/d)^2,$$

$$\beta_{10} = 1 + \delta/8 + \delta^2/48 - \delta\varepsilon/64, \quad \beta_{11} = \delta^2/384,$$

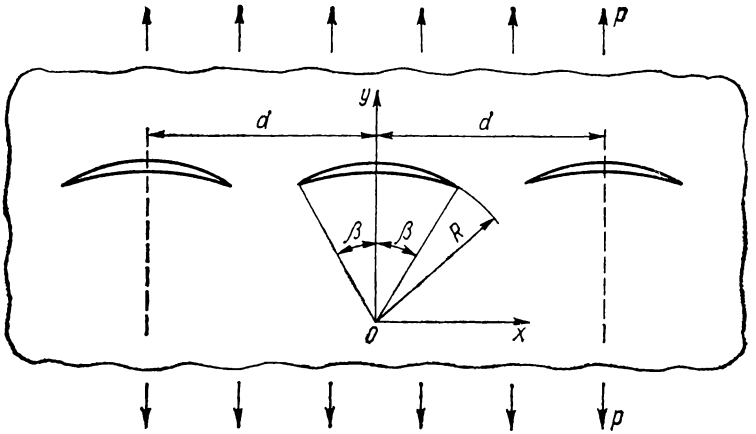


Рис. 2.97. Периодическая система дугообразных трещин.

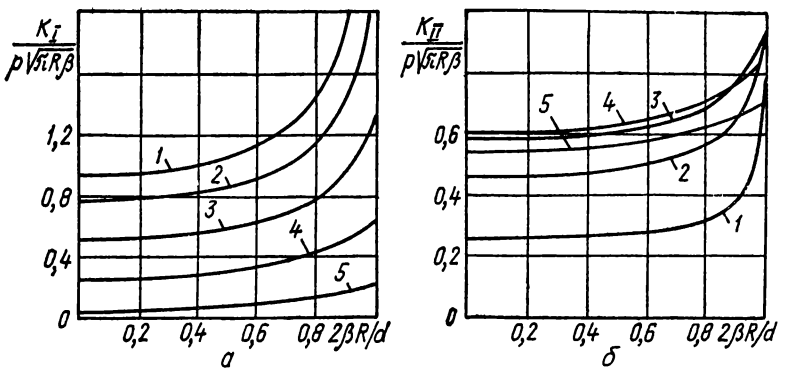


Рис. 2.98. Зависимости КИН K_I (*а*) и K_{II} (*б*) от параметра $2\beta R/d$ для периодической системы дугообразных трещин:
1 — $\beta = \pi/12$; *2* — $\beta = \pi/6$; *3* — $\beta = \pi/4$; *4* — $\beta = \pi/3$; *5* — $\beta = 5\pi/12$ [148].

$$\beta_{40} = -\delta/8 - 3\delta^2/128 + \delta\varepsilon/128, \quad \beta_{41} = \delta\varepsilon/128,$$
$$\omega_{20} = 1 + \delta/24 + \varepsilon/8 + \delta^2/360 - (\delta\varepsilon - 7\varepsilon^2)/384,$$
$$\omega_{21} = \delta^2/1920 + \delta\varepsilon/128,$$
$$\omega_{30} = 1 - \delta/8 + \varepsilon/24 - (5\delta^2 + 11\delta\varepsilon)/384 - \varepsilon^2/720,$$
$$\omega_{31} = -\delta\varepsilon/128 - \varepsilon^2/640.$$

Периодическая система криволинейных трещин. Бесконечная плоскость ослаблена бесконечным рядом одинаковых дугообразных трещин. На бесконечности плоскость растягивается усилиями p в направлении, параллельном оси симметрии (оси y), а берега трещин свободны от нагрузки (рис. 2.97). На рис. 2.98 приведены относительные значения КИН для данной задачи, полученные численным решением СИУ [148].

В работе [148] получены также КИН для периодической системы параллельных дугообразных трещин. Имеются данные для КИН в случае периодической системы полубесконечных криволинейных трещин [149].

2.16. Двоякопериодическая система трещин

Прямоугольная решетка трещин. Бесконечная плоскость ослаблена двоякопериодической системой прямолинейных трещин, центры которых образуют прямоугольную решетку, причем трещины находятся вдоль линии симметрии. Берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности плоскость находится под действием одноосного растяжения и сдви-

Таблица 2.19. **Значения КИН $K_I/p\sqrt{\pi l}$ для прямоугольной решетки трещин при растяжении на бесконечности [138]**

$\frac{b}{2l}$	$d/2l$				
	∞	5,00	2,50	1,67	1,25
∞	1,0000	1,0170	1,0753	1,2085	1,5650
5,00	0,9540	1,0122	1,0753	1,2085	1,5650
4,00	0,9309	1,0029	1,0749	1,2084	1,5650
3,00	0,8864	0,9765	1,0709	1,2083	1,5650
2,00	0,7896	0,8999	1,0381	1,2035	1,5647
1,00	0,5702	0,6817	0,8472	1,1041	1,5446
0,50	0,3989	0,4879	0,6278	0,8800	1,4304
0,25	0,2821	0,3488	0,4567	0,6614	1,1953

Таблица 2.20. **Значения КИН $K_{II}/\tau\sqrt{\pi l}$ для прямоугольной решетки трещин при сдвиге на бесконечности [138]**

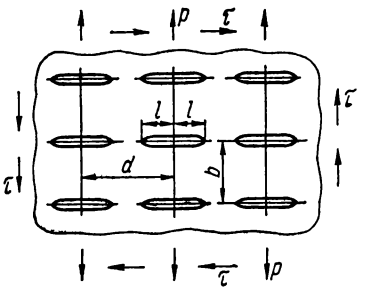
$b/(2l)$	$d/(2l)$				
	∞	5,00	2,50	1,67	1,25
∞	1,0000	1,0170	1,0753	1,2085	1,5650
5,00	1,0160	1,0205	1,0753	1,2085	1,5650
4,00	1,0246	1,0267	1,0757	1,2085	1,5650
3,00	1,0424	1,0429	1,0787	1,2086	1,5650
2,00	1,0881	1,0881	1,1022	1,2123	1,5652
1,00	1,2574	1,2574	1,2577	1,2918	1,5805
0,50	1,5800	1,5800	1,5800	1,5813	1,7028
0,25	2,0944	2,0944	2,0944	2,0944	2,1066

га (рис. 2.99). Такая система трещин в случае растяжения эквивалентна периодической системе коллинеарных или параллельных трещин в полосе, на гранях которой отсутствуют нормальные перемещения и касательные напряжения, а на берегах трещин действует постоянное давление [150, 151]. В табл. 2.19 приведены значения КИН K_I при растяжении

плоскости на бесконечности (см. рис. 2.99; $\tau = 0$), полученные методом СИУ [138]. Для рассматриваемой нагрузки имеются также данные для КИН и в других работах [12, 150—153].

При действии на бесконечности сдвигающих напряжений (см. рис. 2.99; $p = 0$) численные значения K_{II} получены в работе [138]. Эти результаты приведены в табл. 2.20. Они хорошо согласуются с данными работы [153].

Двоякопериодическая система прямолинейных трещин произвольной ориентации. Бесконечная плоскость ослаблена двоякопериодической системой трещин, когда параллелограмм периодов является произвольным.



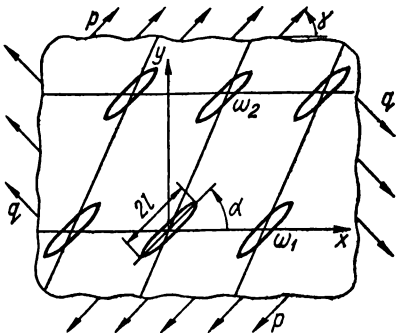


Рис. 2.99. Прямоугольная решетка трещин в бесконечной плоскости.

Рис. 2.100. Растяжение бесконечной плоскости с двоякопериодической системой произвольно ориентированных трещин.

Центры трещин находятся в вершинах параллелограмма периодов, т. е. в точках $P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2$ (m, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), где ω_1, ω_2 ($\operatorname{Im} \omega_1 = 0$, $\operatorname{Im} (\omega_2/\omega_1) > 0$) — основные периоды. Берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности плоскость растягивается усилиями p и q во взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 2.100). Асимптотические значения КИН при больших относительных расстояниях между трещинами получены в работах [2, 3, 154]. В случае, когда центры трещин образуют правильную треугольную решетку ($\omega_2 = \omega_1 \exp(i\pi/3)$), это решение имеет вид

$$
\left.
\begin{aligned}
K_I = \sqrt{\pi l}\,\{\sigma + 3\pi\lambda^2\sigma/(8\sqrt{3}) + (\pi^2\lambda^4/64)\,[3\sigma\,(1 - 1{,}7194\cos 6\alpha) - \\
- 5{,}1583\tau \sin 6\alpha] + (\pi^3\lambda^6/512\sqrt{3})\,[\sigma\,(9 + 6{,}9597\cos 6\alpha) + \\
+ 9{,}0883\tau \sin 6\alpha]\} + O(\lambda^8), \\
K_{II} = \sqrt{\pi l}\,\{\tau + \pi\lambda^2\tau/(8\sqrt{3}) + (\pi^2\lambda^4/64)\,[-5{,}1583\sigma \sin 6\alpha + \\
+ \tau\,(1/3 + 5{,}1583\cos 6\alpha)] + (\pi^3\lambda^6/512\sqrt{3})\,[5{,}6494\sigma \sin 6\alpha + \\
+ \tau\,(1/3 - 7{,}7783\cos 6\alpha)]\} + O(\lambda^8),
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.45)
$$

где $\lambda = 2l/\omega_1$, $\sigma - i\tau = [p + q - (p - q)\exp(2i(\gamma - \alpha))]/2$.

Аналогичные результаты для случая квадратной решетки ($\omega_2 = i\omega_1$) будут

$$K_I = \sqrt{\pi l}\,\{\sigma + (\pi\lambda^2/8)\,[\sigma\,(1 - 0{,}2982\cos 4\alpha) - 0{,}7982\tau\sin 4\alpha] +$$
$$+ (\pi^2\lambda^4/512)\,[\sigma\,(5{,}7742 + 3{,}8314\cos 4\alpha) + 2{,}5542\tau\sin 4\alpha] +$$
$$+ (\pi^3\lambda^6/1024)\,[\sigma\,(0{,}5725 + 2{,}5413\cos 4\alpha - 5{,}7797\cos 8\alpha) +$$
$$+ \tau\,(0{,}6033\sin 4\alpha - 5{,}7797\sin 8\alpha)]\} + O(\lambda^8),$$
$$K_{II} = \sqrt{\pi l}\,\{\tau + (\pi\lambda^2/8)\,[\tau\,(1 + 0{,}2982\cos 4\alpha) - 0{,}7982\sigma\sin 4\alpha] +$$
$$+ (\pi^2\lambda^4/256)\,[\tau\,(3{,}5485 - 2{,}5542\cos 4\alpha) + 5{,}1085\sigma\sin 4\alpha] +$$
$$+ (\pi^3\lambda^6/1024)\,[\tau\,(-0{,}7339 - 0{,}0451\cos 4\alpha + 5{,}7797\cos 8\alpha) +$$
$$+ \sigma\,(1{,}0827\sin 4\alpha - 5{,}7797\sin 8\alpha)]\} + O(\lambda^8). \qquad (2.46)$$

Формулы (2.45) и (2.46) дают также решение задачи, когда берега трещины находятся под действием постоянных нормальных σ и сдвигающих τ напряжений.

Данные по КИН для двоякопериодической системы прямолинейных трещин в изотропных пластинах имеются также в работах [99, 152, 155—157]. Случай анизотропной пластины изучался в работе [158].

ГЛАВА 3

ПОЛУОГРАНИЧЕННЫЕ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНАМИ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

3.1. Полуплоскость с перпендикулярными к ее границе краевыми трещинами

Произвольная самоуравновешенная нагрузка на берегах трещины Пусть упругое тело представляет собой полубесконечную плоскость ($x \geqslant 0$), в которой имеется прямолинейная краевая трещина длины l. Напряжения на границе полуплоскости и на бесконечности отсутствуют, а на берегах трещины заданы напряжения (рис. 3.1)

$$\sigma_y^{\pm}(x, 0) = -p(x), \quad \tau_{xy}^{\pm}(x, 0) = -\tau(x) \quad (0 \leqslant x < l).$$

Замкнутое приближенное решение этой задачи, полученное с помощью специальной аппроксимации сингулярного интегрального уравнения, имеет вид [1—3]

$$K_{\mathrm{I}} - iK_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{2cl^{c-1}}{\pi}} \int_0^l \frac{p(x) - i\tau(x)}{\sqrt{l^c - x^c}}\, dx, \tag{3.1}$$

где $c = 2\pi^2/(\pi^2 - 4)$.

Действие на берегах трещины полиномиальной нагрузки. Когда к берегам трещины приложены усилия

$$p(x) - i\tau(x) = (\sigma - i\tau)(x/l)^n \quad (\mathrm{Re}\, n > -1),$$

решение (3.1) приводит к выражению [1—3]

$$K_{\mathrm{I}} - iK_{\mathrm{II}} = (\sigma - i\tau)\sqrt{2l/c}\,\Gamma((n+1)/2)/\Gamma((n+1)/2 + 1/2), \tag{3.2}$$

где $\Gamma(n)$ — гамма-функция. При больших значениях n из соотношения (3.2) следует асимптотическое представление

$$K_{\mathrm{I}} - iK_{\mathrm{II}} = (\sigma - i\tau)\sqrt{l/(n+1)},$$

которое совпадает с аналогичным результатом, полученным на основе точного решения [4].

При действии полиномиальной нагрузки известны точные решения в виде квадратур [5]

$$K_{\mathrm{I}} - iK_{\mathrm{II}} = (\sigma - i\tau)\sqrt{l}\exp[-k(n+1)]\,\Gamma((n+1)/2)/\Gamma((n+2)/2) \tag{3.3}$$

$$(\mathrm{Re}\, n > -1),$$

где $k(n+1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln\left\{1 - (n+1)^2 \operatorname{tg}^2 y \operatorname{csch}^2\left[(n+1)\frac{\pi}{2}\operatorname{tg} y\right]\right\} dy.$

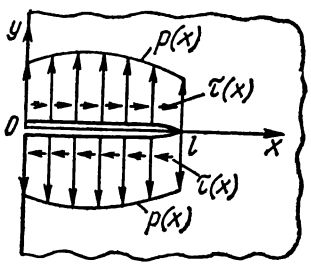
Таблица 3.1. Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$ для краевой трещины в по

Номер формулы	0	1	2	3	4
(3.2)	1,1256	0,6851	0,5269	0,4420	0,3876
(3.3)	1,1213	0,6828	0,5254	0,4409	0,3867

В табл. 3.1 приведены числовые значения КИН K_I, полученные в работе [5] на основе решения (3.3). Здесь же даны приближенные значения K_I (3.2).

Сравнение приближенных значений с точными показывает, что относительная ошибка решения (3.2) при $n = 0$ составляет 0,4 % и с увеличением n уменьшается.

При действии постоянной и полиномиальной нагрузки на берегах трещины рассматриваемая задача решалась рядом авторов [6—11]. В ра-



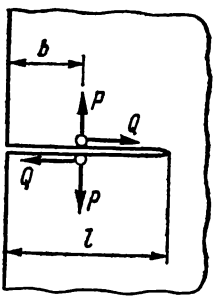


Рис. 3.1. Краевая трещина в полуплоскости при действии самоуравновешенной нагрузки на ее берегах.

Рис. 3.2. Полуплоскость с краевой трещиной при действии в произвольных точках ее берегов сосредоточенных сил.

боте [8] для КИН при постоянной нагрузке получено пять верных знаков

$$K_I - iK_{II} = 1{,}1215\,(\sigma - i\tau)\sqrt{\pi l}.$$

Действие сосредоточенных сил на берегах трещины. Пусть к противоположным берегам трещины на расстоянии b от края полуплоскости приложены равные по величине, но обратные по направлению нормальные P и касательные Q сосредоточенные силы (рис. 3.2). Тогда из решения (3.1) следует [1—3]

$$K_I - iK_{II} = 2\,(P - iQ)\sqrt{c/(2\pi l)}\sqrt{1 - (b/l)^c}. \qquad (3.4)$$

При $b = 0$ выражение (3.2) дает точное решение [12, 13]

$$K_I - iK_{II} = 2\,(P - iQ)\sqrt{c/(2\pi l)}.$$

Сравнивая этот результат со значениями КИН для бесконечной пластины

луплоскости при действии на ее берегах полиномиальной нагрузки [1, 2, 5]

n				
5	6	7	8	9
0,3491 0,3484	0,3201 0,3196	0,2972 0,2968	0,2786 0,2782	0,2631 0,2627

с трещиной длиной $2l$, когда в ее центре приложены сосредоточенные силы $2P$ и $2Q$:

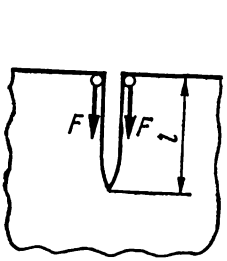
$$K_I - iK_{II} = 2(P - iQ)/\sqrt{\pi l},$$

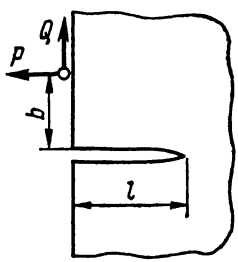
видим, что наличие свободной границы полуплоскости увеличивает КИН в $\sqrt{c/2} \approx 1{,}297$ раза, т. е. почти на 30 %. При увеличении b влияние свободного края полуплоскости уменьшается и при $b \to l$ исчезает.

Точное значение КИН известно также, когда в начале трещины симметрично приложены две сосредоточенные касательные силы F (рис. 3.3) [13]

$$K_I = (-4F/\pi)\sqrt{c/(2\pi l)}.$$

В случае, когда к берегам трещины в произвольной точке приложены сосредоточенные силы (см. рис. 3.2), в работе [14] найдено численное ре-





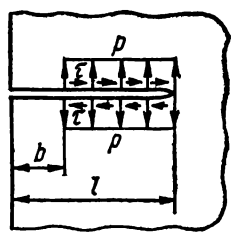


Рис. 3.3. Действие двух симметричных касательных сил в начале краевой трещины.

Рис. 3.4. Действие сосредоточенных сил на краю полуплоскости с краевой трещиной.

Рис. 3.5. Действие кусочно-постоянной нагрузки на берегах краевой трещины в полуплоскости.

шение интегральных уравнений, на основе которого методом интерполяции построено аналитическое выражение для КИН

$$K_I - iK_{II} = (2(P - iQ)/\sqrt{\pi l})\,[1 + (1 - \varepsilon^2)(0{,}2945 - 0{,}3912\varepsilon^2 +$$

$$+ 0{,}7685\varepsilon^4 - 0{,}9942\varepsilon^6 + 0{,}5094\varepsilon^8)]/\sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \varepsilon = b/l. \qquad (3{,}5)$$

Значения $K_I\sqrt{\pi l}/(2P)$, вычисленные по этой формуле, приведены во второй строке табл. 3,2. Здесь же представлены данные, полученные

Таблица 3.2. **Значения КИН $K_I\sqrt{\pi l}/2P$ для краевой трещины в полу**

Номер формулы	0	0,1	0,2	0,3	0,4
(3.4)	1,2967	1,2970	1,2996	1,3082	1,3275
(3.5)	1,2945	1,2942	1,2950	1,3009	1,3182
Численное решение	...	1,2961	1,2958	1,3013	1,3188

по приближенной зависимости (3.4), а также на основе численного решения СИУ [2]. Из сравнения числовых данных следует, что максимальная относительная ошибка решения (3.4) не превышает 1,2 %, а результата (3.5) — 0,7 %.

Выражения (3.4) и (3.5) могут быть использованы для определения КИН при действии на берегах краевой трещины произвольной самоуравновешенной нагрузки. Различные решения такого типа имеются также в работах [9, 15—18].

Действие сосредоточенных сил на краю полуплоскости. С помощью решения (3.5) в работе [19] построены приближенные аналитические выражения для КИН при действии сосредоточенных нормальной P и касательной Q сил на краю полуплоскости (рис. 3.4), когда берега трещины свободны от нагрузки:

$$K_I - iK_{II} = ((1-\xi^2)/\sqrt{\pi l})\,[(P+iQ)(0{,}8240 + 0{,}0637\xi - 0{,}8430\xi^2 + 15{,}41\xi^3 - 53{,}38\xi^4 + 59{,}74\xi^5 - 21{,}82\xi^6) + iP(1{,}294 - 1{,}184\xi + 5{,}442\xi^2 - 28{,}14\xi^3 + 41{,}80\xi^4 - 22{,}38\xi^5 + 3{,}162\xi^6) + Q(1{,}2943 + 0{,}0044\xi + 0{,}1289\xi^2 + 10{,}89\xi^3 - 22{,}14\xi^4 + 10{,}96\xi^5)], \qquad (3.6)$$

где $\xi = b/(b+l)$. На основе решения (3.6) в работе [19] получены КИН для различных случаев действия нагрузки на краю полуплоскости.

Действие кусочно-постоянной нагрузки на берегах трещины. Решение (3.5) использовалось также [14, 16] при определении КИН, когда на берегах трещины задана кусочно-постоянная нагрузка (рис. 3.5), а край полуплоскости свободен от напряжений:

$$K_I - iK_{II} = (p - i\tau)\sqrt{\pi l}\,(2/\pi)\arccos(b/l)\,[1 + f(b/l)].$$

Значения функции $f(b/l)$ приведены ниже [16]:

b/l	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$f(b/l)$	0,1215	0,1098	0,0973	0,0844	0,0715	0,0587
b/l	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	
$f(b/l)$	0,0462	0,0341	0,0224	0,0138	0,00	

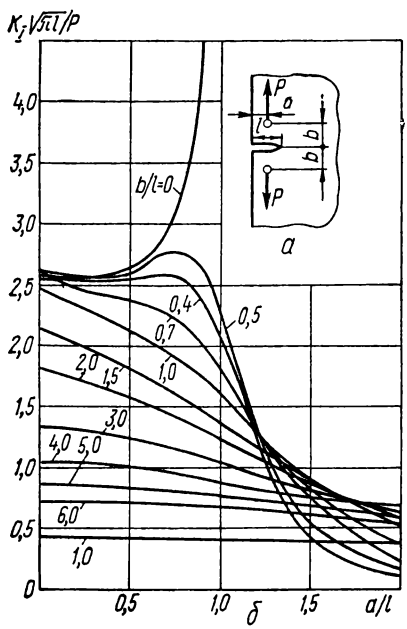
Данные по КИН для краевой трещины, на берегах которой задана кусочно-постоянная нагрузка, приведены также в работах [17, 20].

Действие сосредоточенных сил во внутренних точках полуплоскости. Пусть полуплоскость с краевой трещиной растягивается двумя сосредоточенными силами P, приложенными во внутренних точках полуплос-

плоскости при действии на ее берегах сосредоточенных сил [2]

b/l				
0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1,3647	1,4315	1,5514	1,7848	2,3740
1,3549	1,4223	1,5429	1,7769	2,3695
1,3547	1,4217	1,5423	1,7774	2,3689

кости симметрично ($K_I = 0$) относительно трещины и направленными параллельно границе (рис. 3.6, *а*). В работе [21] получено численное решение СИУ задачи и определен КИН. Зависимость K_I от координат точек приложения сил показана на рис. 3.6, *б*. Кривая при $b = 0$ построена на основе формулы (3.5).



Расклинивание полуплоскости. В краевую трещину в полуплоскости под действием силы P внедрен абсолютно жесткий клин треугольной формы, угол раствора которого 2β ($\varepsilon = \operatorname{tg}\beta \ll 1$) Трение между клином и берегами трещины отсутствует (рис. 3.7). В работе [22] эта

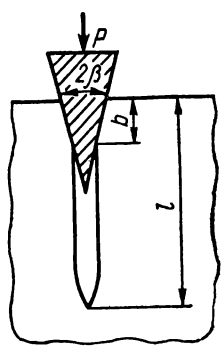


Рис. 3.6. Схема растяжения полуплоскости с краевой трещиной сосредоточенными силами (*а*) и зависимость КИН K_I от координат точек приложения сил (*б*) [1, 21].

Рис. 3.7. Расклинивание полуплоскости клином треугольной формы.

задача приближенно решена в квадратурах с помощью специальной аппроксимации ядра СИУ. Зависимость между зоной контакта b и действующей силой P, которая находится из условия равновесия клина

Таблица 3.3. Значения КИН при растяжении на бесконечности полу

l/a	3	2,5	2	5/3	1
	$K_I/(p\sqrt{\pi a})$				
10^{-6}	—0,2485	—0,1357	0,0175	0,1402	0,3755
10^{-4}	0,0464	0,1207	0,2034	0,2623	0,3756
0,01	0,3181	0,3307	0,3447	0,3552	0,3828
0,02	0,3508	0,3576	0,3653	0,3715	0,3903
0,04	0,3859	0,3882	0,3913	0,3942	0,4053
0,08	0,4309	0,4306	0,4307	0,4313	0,4359
0,1	0,4499	0,4491	0,4485	0,4486	0,4515
0,2	0,5361	0,5347	0,5333	0,5324	0,5313
0,4	0,6978	0,6969	0,6959	0,6951	0,6927
0,6	0,8485	0,8482	0,8476	0,8472	0,8453
0,8	0,9851	0,9850	0,9848	0,9845	0,9834
1,0	1,1078	1,1078	1,1077	1,1076	1,1069
a/l	$K_I/(p\sqrt{\pi l})$				
0,75	1,1147	1,1148	1,1148	1,1148	1,1146
0,50	1,1197	1,1198	1,1198	1,1198	1,1198
0,25	1,1215	1,1215	1,1215	1,1215	1,1215
0	1,1215	1,1215	1,1215	1,1215	1,1215

имеет вид

$$P = -\frac{16\varepsilon G \sin\beta}{\pi(\varkappa+1)\sqrt{l^c}}\left[\int_0^b \sqrt{\frac{(l^c-x^c)(b^c-x^c)}{x^c}} \times \right.$$

$$\left. \times \Pi\left(\frac{b^c}{x^c}, \sqrt{\frac{b^c}{l^c}}\right)dx + K\left(\sqrt{\frac{b^c}{l^c}}\right)\int_0^b \sqrt{\frac{l^c-x^c}{b^c-x^c}}\, x^c dx\right],$$

где $K(\rho)$ и $\Pi(m, \rho)$ — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода; $c = 2\pi^2/(\pi^2-4)$.

КИН в вершине трещины определяется выражением

$$K_I = \frac{4G\varepsilon\sqrt{2c(l^c-b^c)}}{(1+\varkappa)\sqrt{\pi l}}\int_0^b \frac{\sqrt{x^c}dx}{\sqrt{(b^c-x^c)(l^c-x^c)}}.$$

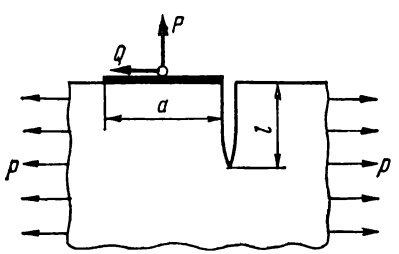
В работах [23, 24] приведено асимптотическое решение этой задачи. При расклинивании полуплоскости пластиной постоянной толщины решения для КИН следуют из результатов по расклиниванию упругого бесконечного клина.

Действие штампа (ребра жесткости) на край полуплоскости с трещиной. Пусть к участку границы полуплоскости, примыкающей к краевой тре-

плоскости с краевой трещиной и ребром жесткости [25]

$\varkappa$				
3	2,5	2	5/3	1
		$K_{II}/(p\sqrt{\pi a})$		
0,1486	0,1273	0,1131	0,0848	—0,0289
0,1262	0,1069	0,0769	0,0493	—0,0289
0,0580	0,0422	0,0238	0,0097	—0,0258
0,0454	0,0323	0,0173	0,0059	—0,0227
0,0349	0,0249	0,0136	0,0050	—0,0166
0,0295	0,0227	0,0151	0,0093	—0,0052
0,0295	0,0237	0,0172	0,0123	0,0001
0,0368	0,0338	0,0306	0,0282	0,0227
0,0525	0,0514	0,0504	0,0499	0,0496
0,05	0,0572	0,0568	0,0567	0,0580
0,05	0,0550	0,0547	0,0548	0,0564
0,0	0,0494	0,0492	0,0492	0,0506
		$K_{II}/(p\sqrt{\pi l})$		
0,0341	0,0338	0,0336	0,0336	0,0345
0,0172	0,0170	0,0169	0,0168	0,0171
0,0044	0,0043	0,0043	0,0042	0,0043
0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007

щине, прикреплена жесткая накладка (ребро жесткости или штамп с плоским основанием), нагруженная нормальной P и сдвигающей Q силами, а на бесконечности заданы растягивающие напряжения p. Остальная часть границы полуплоскости и берега трещины свободны от нагрузки. При этом накладка остается горизонтальной (отсутствует ее вращение) в процессе нагружения (рис. 3.8). Задача решена методом конформных отображений в работах [25, 26]. В работе [26] рассмотрен также случай,



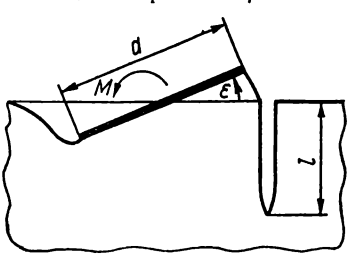


Рис. 3.8. Нагружение полуплоскости с краевой трещиной и горизонтальным ребром жесткости.

Рис. 3.9. Полуплоскость с краевой трещиной и ребром жесткости при его вращении вокруг своего центра.

Таблица 3.4. **Значения КИН $K_I/(Q\sqrt{\pi/l})$ (над чертой) и $K_{II}/(Q\sqrt{\pi/l})$ (под чертой) для полуплоскости с краевой трещиной и ребром жесткости, нагруженным сдвигающей силой [26]**

$\frac{l}{a}$	$\varkappa$				
	3,0	2,5	2,0	5/3	1,0
0,001	0,0027	0,0054	0,0085	0,0107	0,0151
	—0,0047	—0,0040	—0,0029	—0,0018	0,0012
0,01	0,0260	0,0307	0,0359	0,0398	0,0479
	—0,0110	—0,0087	—0,0056	—0,0030	0,0039
0,1	0,1241	0,1296	0,1359	0,1408	0,1531
	—0,0127	—0,0074	—0,0009	0,0044	0,0180
0,2	0,1880	0,1931	0,1992	0,2041	0,2170
	—0,0013	0,0049	0,0124	0,0185	0,0344
0,4	0,2740	0,2783	0,2835	0,2877	0,2997
	0,0320	0,0387	0,0469	0,0535	0,0712
0,6	0,3281	0,3315	0,3357	0,3392	0,3490
	0,0683	0,0749	0,0830	0,0896	0,1074
0,8	0,3617	0,3643	0,3675	0,3702	0,3778
	0,1012	0,1075	0,1151	0,1213	0,1383
1,0	0,3822	0,3841	0,3865	0,3885	0,3942
	0,1286	0,1343	0,1413	0,1470	0,1627
1,25	0,3967	0,3980	0,3997	0,4011	0,4050
	0,1549	0,1600	0,1662	0,1712	0,1851
5/3	0,4075	0,4083	0,4092	0,4099	0,4120
	0,1843	0,1884	0,1934	0,1975	0,2086
2,5	0,4129	0,4132	0,4135	0,4137	0,4144
	0,2140	0,2168	0,2202	0,2230	0,2306
5,0	0,4134	0,4134	0,4134	0,4134	0,4134
	0,2402	0,2416	0,2432	0,2446	0,2482
∞	0,4128	0,4128	0,4128	0,4128	0,4128
	0,2613	0,2613	0,2613	0,2613	0,2613

когда ребро жесткости поворачивается вокруг своего центра (рис. 3.9). Соответствующие значения КИН в вершине трещины приведены в табл. 3.3—3.6. В указанных работах получены также зависимости между главным моментом усилий, действующих на ребро жесткости, и приложенными силами P и Q, а также углом вращения ε.

Две краевые трещины неравной длины. На край полуплоскости под прямым углом выходят две трещины различной длины l и a, расстояние между которыми равно d. Берега трещин и край полуплоскости свободны от нагрузки, а на бесконечности полуплоскость растягивается параллель-

Таблица 3.5. Значения КИН $K_I/(P\sqrt{\pi/l})$ (над чертой) и $K_{II}/(P\sqrt{\pi/l})$ (под чертой) для полуплоскости с краевой трещиной и ребром жесткости, нагруженным нормальной силой [26]

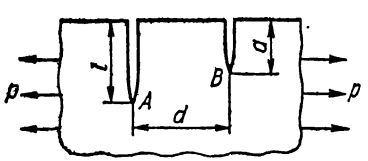
l/a	$\varkappa$				
	3,0	2,5	2,0	5/3	1,0
0,002	0,0201 0,0036	0,0190 0,0047	0,0169 0,0057	0,0147 0,0062	0,0065 0,0059
0,02	0,0513 0,0183	0,0473 0,0196	0,0419 0,0206	0,0369 0,0208	0,0211 0,0187
0,1	0,0894 0,0492	0,0839 0,0496	0,0767 0,0493	0,0707 0,0485	0,0525 0,0435
0,2	0,1144 0,0744	0,1094 0,0740	0,1031 0,0729	0,0979 0,0715	0,0825 0,0652
0,4	0,1526 0,1146	0,1495 0,1139	0,1458 0,1126	0,1427 0,1111	0,1339 0,1051
0,6	0,1833 0,1507	0,1817 0,1502	0,1799 0,1494	0,1783 0,1484	0,1742 0,1443
0,8	0,2068 0,1835	0,2061 0,1835	0,2054 0,1833	0,2048 0,1829	0,2032 0,1807
1,0	0,2237 0,2123	0,2235 0,2127	0,2234 0,2130	0,2233 0,2131	0,2231 0,2124
1,25	0,2378 0,2423	0,2379 0,2431	0,2381 0,2438	0,2382 0,2442	0,2388 0,2447
5/3	0,2506 0,2794	0,2508 0,2804	0,2511 0,2814	0,2514 0,2821	0,2522 0,2836
2,5	0,2596 0,3226	0,2598 0,3235	0,2600 0,3246	0,2601 0,3254	0,2606 0,3271
5,0	0,2629 0,3680	0,2629 0,3686	0,2630 0,3692	0,2630 0,3697	0,2631 0,3708
10	0,2629 0,3900	0,2629 0,3903	0,2629 0,3907	0,2629 0,3909	0,2629 0,3915
1000	0,2628 0,4111	0,2628 0,4111	0,2628 0,4111	0,2628 0,4112	0,2628 0,4112

но краю усилиями p (рис. 3.10). Задача решена в работе [27] методом массовых сил. Результаты расчета приведены в табл. 3.7. Эти данные согласуются с результатами работы [11]. Известны также значения КИН при растяжении полуплоскости с несколькими равными равномерно размещенными краевыми трещинами [11].

Таблица 3.6. Значения КИН для полуплоскости с краевой трещиной и

l/a	3,0	2,5	2,0	5/3	1
	$K_I/(G\varepsilon\sqrt{\pi a})$				
0,001	0,6812	0,7087	0,7149	0,6919	0,4542
0,01	0,4819	0,4989	0,5102	0,5099	0,4470
0,05	0,3112	0,3310	0,3546	0,3730	0,4160
0,1	0,2376	0,2581	0,2849	0,3081	0,3789
0,2	0,1660	0,1847	0,2103	0,2335	0,3109
0,4	0,0968	0,1099	0,1280	0,1447	0,2021
0,6	0,0598	0,0682	0,0799	0,0907	0,1277
0,8	0,0376	0,0429	0,0503	0,0571	0,0802
1,0	0,0241	0,0274	0,0321	0,0363	0,0507
a/l	$K_I/(G\varepsilon\sqrt{\pi l})$				
0,8	0,0127	0,0144	0,0168	0,0189	0,0262
0,6	0,0049	0,0055	0,0064	0,0071	0,0097
0,4	0,0010	0,0011	0,0012	0,0014	0,0018
0,2	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	—0,00000
0,1	—0,00001	—0,00001	—0,00001	—0,00001	—0,00001

Периодическая система краевых трещин. Рассмотрим периодическую систему прямолинейных трещин длиной l, выходящих под прямым углом на свободный от нагрузки край полуплоскости. На берегах трещин зада-



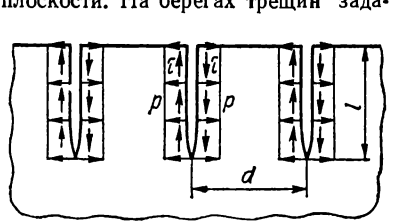


Рис. 3.10. Растяжение полуплоскости с двумя краевыми трещинами неравной длины.

Рис. 3.11. Периодическая система краевых трещин при действии на их берегах постоянной нагрузки.

на постоянная нормальная (p) и касательная (τ) нагрузки (рис. 3.11). Значения КИН, полученные методом СИУ, приведены ниже [1, 2, 28]:

l/d	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0	3,0
$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	1,1214	0,8720	0,6253	0,5104	0,4446	0,3987	0,2821	0,2303
$K_{II}/(\tau\sqrt{\pi l})$	1,1214	1,1320	1,2072	1,3291	1,4575	1,5797	2,0941	2,5075

ребром жесткости при его вращении вокруг своего центра [26]

$\varkappa$				
3,0	2,5	2,0	5/3	1
		$K_{II}/(G\varepsilon\sqrt{\pi a})$		
0,1778	0,2309	0,2942	0,3405	0,4131
0,2360	0,2714	0,3138	0,3460	0,4113
0,2408	0,2682	0,3025	0,3305	0,4030
0,2275	0,2528	0,2853	0,3129	0,3916
0,2011	0,2243	0,2551	0,2822	0,3657
0,1584	0,1781	0,2049	0,2290	0,3073
0,1253	0,1415	0,1637	0,1838	0,2498
0,0996	0,1127	0,1305	0,1468	0,2003
0,0798	0,0903	0,1047	0,1177	0,1606
		$K_{II}/(G\varepsilon\sqrt{\pi l})$		
0,0551	0,0623	0,0721	0,0811	0,1108
0,0325	0,0367	0,0425	0,0476	0,0647
0,0145	0,0164	0,0189	0,0212	0,0286
0,0035	0,0040	0,0046	0,0051	0,0068
0,0009	0,0010	0,0011	0,0013	0,0017

Таблица 3.7. **Значения КИН для двух краевых трещин в растягиваемой на бесконечности полуплоскости [27]**

$\frac{d}{l}$	$\frac{a}{l}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}(B)}{p\sqrt{\pi l}}$
0,5	0,5	1,118	0,003	0,119	—0,097
	1,0	0,818	0,159	0,818	—0,159
	1,5	0,145	0,111	1,118	—0,008
	2,0	—0,020	0,010	1,122	0,003
1,0	0,5	1,094	0,026	0,419	—0,144
	1,0	0,855	0,133	0,855	—0,133
	1,5	0,411	0,167	1,077	—0,040
	2,0	0,119	0,097	1,118	—0,003
2,0	0,5	1,071	0,029	0,738	—0,082
	1,0	0,911	0,091	0,911	—0,091
	1,5	0,668	0,139	1,035	—0,058
	2,0	0,419	0,144	1,094	—0,026

Значения КИН при действии на берегах трещин только постоянных нормальных усилий приведены также в работах [10, 11, 16, 17, 27, 29—31]. Для последнего случая нагрузки в работе [32] на основе асимптотических решений при больших и малых расстояниях между трещинами полу-

чено интерполяционное выражение для K_I в виде

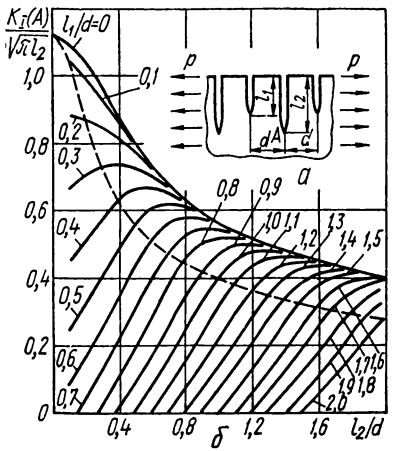
$$K_I = p\sqrt{\pi l\varepsilon}\,\{(1/\sqrt{\pi})[1 + \varepsilon/2 + 3\varepsilon^2/8 + 5\varepsilon^3/16 + 35\varepsilon^4/128 +$$

$$+ 63\varepsilon^5/256 + 231\varepsilon^6/1024] + 22{,}501\varepsilon^7 - 63{,}502\varepsilon^8 + 58{,}045\varepsilon^9 - 17{,}577\varepsilon^{10}\},$$

где $\varepsilon = d/(2l + d)$. Первая часть этого выражения (в квадратных скобках) представляет собой асимптотическое решение при малых значениях параметра ε с точностью до величин $O(\varepsilon^7)$, т. е. при малых относительных расстояниях между трещинами.

Действие сдвигающей постоянной нагрузки на берегах периодической системы краевых трещин рассмотрено также в работе [17].

Пусть полуплоскость, содержащая периодическую систему краевых трещин различной длины l_1 и l_2, находится под действием растягивающих



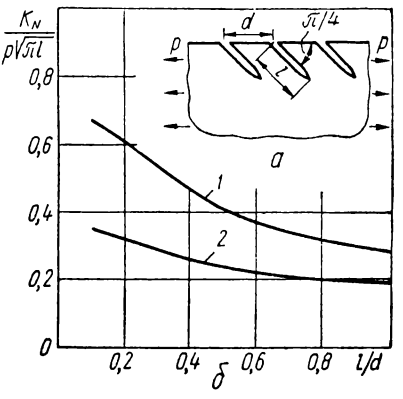


Рис. 3.12. Схема растяжения полуплоскости с периодической системой краевых трещин неравной длины (*а*) и зависимость КИН $K_I(A)/(p\sqrt{\pi l_2})$ от параметра l_2/d (штриховая линия соответствует случаю равных трещин: $l_1 = l_2$) (*б*) [30].

Рис. 3.13. Схема растяжения полуплоскости с периодической системой краевых наклонных трещин (*а*) и зависимость КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ (*1*) и $K_{II}/(p\sqrt{\pi l})$ (*2*) от параметра l/d (*б*) [30].

усилий на бесконечности. Край полуплоскости и берега трещин свободны от нагрузки (рис. 3.12, *а*). Зависимости КИН K_I в вершинах трещин длиной l_2 от отношения l_2/d, полученные методом конформного отображения [30], показаны на рис. 3.12, *б*.

При растяжении полуплоскости с периодической системой равных трещин, выходящих под углом $\gamma = \pi/4$ на ее край (рис. 3.13, *а*), КИН K_I и K_{II} приведены на рис. 3.13, *б*.

Краевые трещины в полуплоскости с жестко защемленным краем. Пусть свободная от нагрузки прямолинейная трещина длины l выходит на жестко защемленный край полуплоскости, растягиваемой на бесконечности усилиями p (рис. 3.14). КИН K_I ($K_{II} = 0$), полученный числен-

ным решением СИУ [33], равен при коэффициенте Пуассона $\mu = 0{,}3$

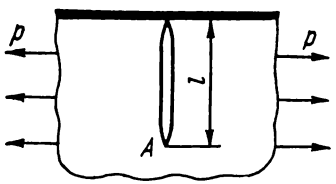
$$K_I(A) = 0{,}8653p\sqrt{\pi l/2}$$

в случае плоского напряженного состояния и

$$K_I(A) = 0{,}8698p\sqrt{\pi l/2}$$

при плоской деформации. В работе [33] приведены также численные значения КИН для периодической системы краевых трещин в полуплоскости с жестко защемленным краем.

В случае, когда жесткий край полуплоскости в точке выхода трещины разорван, свободная от нагрузки трещина раскрывается под дей-



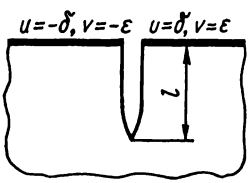


Рис. 3.14. Растяжение полуплоскости с трещиной, выходящей на жесткий край.

Рис. 3.15. Краевая трещина в полуплоскости при заданных смещениях ее границы.

ствием заданных вертикальных (v) и горизонтальных (u) смещений правой ($u = \delta$, $v = \varepsilon$) и левой ($u = -\delta$, $v = -\varepsilon$) частей жесткого края (рис. 3.15). Для этой задачи построено точное замкнутое решение [13]

$$K_I = 8G\delta/((1+\varkappa)\sqrt{\pi l}),$$

$$K_{II} = 8G\varepsilon/((1+\varkappa)\sqrt{\pi l}).$$

В работе [33] получены также данные для КИН, когда полуплоскость с трещиной, выходящей на разорванный жесткий край, находится под действием растягивающих усилий на бесконечности.

3.2. Полуплоскость с краевыми трещинами различной конфигурации

Произвольно ориентированная краевая трещина. Пусть в полуплоскости имеется прямолинейная краевая трещина длиной l, образующая с границей угол α. Берега трещины нагружены постоянными нормальными (σ) и сдвигающими (τ) напряжениями, а на бесконечности полуплоскость растягивается параллельно свободному от нагрузки краю усилиями p (рис. 3.16). В табл. 3.8 приведены значения КИН при действии нагрузки только на трещине ($p = 0$); эти данные получены методом СИУ [2]. Они хорошо согласуются с результатами работы [34], полученными иным путем. В этой же работе имеются значения КИН, когда к берегам трещины приложена нормальная и сдвигающая полиномиальная нагрузки. При действии только растягивающей нагрузки на бесконечности ($\sigma = \tau = 0$) данные о КИН имеются во многих работах [11, 27, 35—40].

Ниже для этого случая приведены значения КИН, полученные методом конформного отображения [38]:

α	$\pi/18$	$\pi/12$	$\pi/9$	$\pi/6$	$2\pi/9$	$\pi/4$
$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	0,162	0,232	0,305	0,463	0,6051	0,7250
$K_{II}/(p\sqrt{\pi l})$	0,174	0,226	0,271	0,336	0,3648	0,3644

α	$5\pi/18$	$\pi/3$	$7\pi/18$	$4\pi/9$	$\pi/2$
$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	0,7818	0,9201	1,0286	1,0978	1,1215
$K_{II}/(p\sqrt{\pi l})$	0,3543	0,3058	0,2243	0,1186	0

Приближенные аналитические выражения КИН при действии на берегах трещины сосредоточенных сил приведены в работах [41, 42]. Решение задачи для полуплоскости с произвольно ориентированной тек-

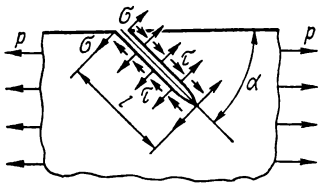


Рис. 3.16. Полуплоскость с произвольно ориентированной краевой трещиной.

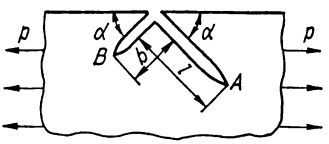


Рис. 3.17. Растяжение полуплоскости с двумя краевыми трещинами, выходящими из одной точки.

тонической трещиной, находящейся в поле сжимающих напряжений (отсутствует скачок нормальных перемещений на линии трещины) получено в квадратурах [43, 44].

Две краевые трещины, выходящие из одной точки. Пусть из одной точки границы полуплоскости выходят две одинаково наклоненные пря-

Таблица 3.8. Значения КИН при действии постоянной нагрузки на берегах произвольно ориентированной краевой трещины [2]

α	$K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$	$K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi l})$	$K_I/(\tau\sqrt{\pi l})$	$K_{II}/(\tau\sqrt{\pi l})$
$\pi/12$	5,05	—3,16	—0,42	1,75
$\pi/6$	2,329	—1,043	—0,277	1,378
$\pi/4$	1,596	—0,508	—0,186	1,237
$\pi/3$	1,292	—0,266	—0,113	1,166
$5\pi/12$	1,160	—0,117	—0,054	1,132
$\pi/2$	1,121	0	0	1,121

молинейные трещины различной длины. Берега трещин и край полуплоскости свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы растягивающие усилия (рис. 3.17). Численные значения КИН, полученные методом последовательных приближений в работе [11], приведены в табл. 3.9. Данные таблицы в случае равных трещин согласуются с численными результатами работы [45], в которой такая же задача рассмотрена методом СИУ.

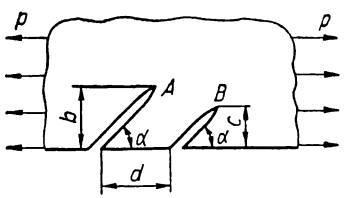
Таблица 3.9. **Значения КИН при растяжении полуплоскости с двумя краевыми трещинами, выходящими из одной точки [11]**

Равные трещины ($b = l$)			Различные трещины при $\alpha = \pi/4$				
$180\alpha/\pi$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{b}{l}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi b}}$	$-\frac{K_{II}(B)}{p\sqrt{\pi b}}$
15	0,237	0,203	0	0,705	0,364	—	—
22,5	0,314	0,284	0,05	0,705	0,364	...	...
30	0,431	0,300	0,1	0,705	0,364	0,095	0,054
37,5	0,535	0,303	0,2	0,705	0,364	0,211	0,083
45	0,629	0,283	0,3	0,703	0,361	0,312	0,113
60	0,778	0,173	0,4	0,700	0,356	0,394	0,144
67,5	0,820	0,091	0,5	0,695	0,348	0,460	0,175
75	0,835	0,003	0,6	0,687	0,337	0,512	0,203
80	0,828	—0,071	0,7	0,676	0,325	0,554	0,228
85	0,805	—0,141	0,8	0,662	0,311	0,586	0,249
87	0,791	—0,172	0,9	0,647	0,297	0,611	0,267
89	0,773	—0,210	1,0	0,629	0,283	0,629	0,283

Таблица 3.10. **Значения КИН для двух параллельных наклонных краевых трещин при $\alpha = \pi/4$ [27, 34]**

$\frac{c}{b}$	$\frac{d}{b}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\sqrt{2}\pi b}}$	$\frac{K_{II}(A)}{p\sqrt{\sqrt{2}\pi b}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\sqrt{2}\pi c}}$	$\frac{K_{II}(B)}{p\sqrt{\sqrt{2}\pi c}}$
0,5	0,5	0,708	0,352	—0,132	0,013
	1,0	0,708	0,352	0,139	—0,005
	2,0	0,645	0,372	0,464	0,171
1,0	0,5	0,400	0,316	0,619	0,235
	1,0	0,439	0,332	0,621	0,254
	2,0	0,496	0,348	0,631	0,282

Две параллельные наклонные краевые трещины различной длины. Полуплоскость со свободным краем и двумя ненагруженными параллельными краевыми трещинами различной длины растягивается на бесконечности усилиями p (рис. 3.18). При угле $\alpha = \pi/4$ в табл. 3.10 приведены значения КИН, полученные методом массовых сил [27, 34].



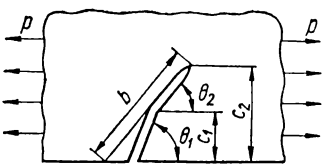


Рис. 3.18. Растяжение полуплоскости с двумя параллельными наклонными краевыми трещинами.

Рис. 3.19. Растяжение полуплоскости с краевой двухзвенной ломаной трещиной.

Краевая двухзвенная ломаная трещина. На границу растягиваемой на бесконечности полуплоскости выходит двухзвенная ломаная трещина, берега которой и край полуплоскости свободны от нагрузки (рис. 3.19). Значения КИН, полученные методом массовых сил [36], приведены в табл. 3.11 для $\theta_1 = \pi/2$ (основная трещина перпендикулярна краю полуплоскости) и в табл. 3.12 для $\theta_2 = \pi/2$ (ответвляющая трещина перпендикулярна краю полуплоскости). Для $\theta_1 = \pi/2$ числовые результаты имеются также в работе [46].

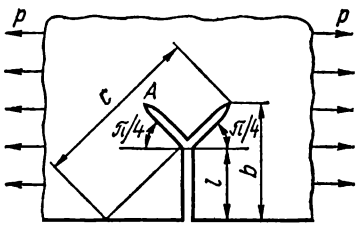


Рис. 3.20. Растяжение полуплоскости с краевой ветвящейся трещиной.

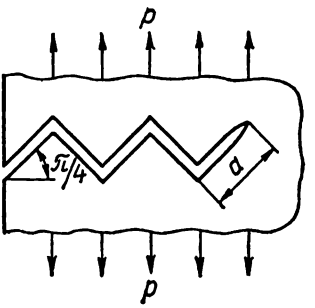


Рис. 3.21. Растяжение полуплоскости с краевой ломаной трещиной с равными звеньями.

Краевая ветвящаяся трещина. Растягиваемая на бесконечности полуплоскость ослаблена краевой трещиной, которая раздваивается на некотором расстоянии от границы (рис. 3.20). Ниже приведены значения КИН, полученные методом последовательных приближений [11]:

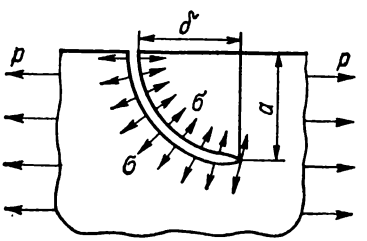


Рис. 3.22. Криволинейная трещина, выходящая под прямым углом на край полуплоскости.

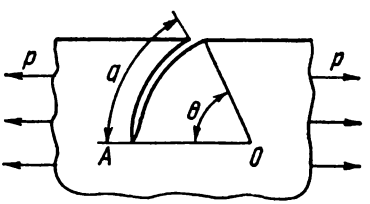


Рис. 3.23. Растяжение полуплоскости с краевой дугообразной трещиной.

l/b	0	0,125	0,250	0,375	0,500	0,600	0,750	0,825	0,900	0,950
$K_I/(p\sqrt{\pi c})$	0,629	0,628	0,625	0,623	0,621	0,620	0,619	0,620	0,625	0,632
$K_{II}/(p\sqrt{\pi c})$	0,283	0,276	0,270	0,263	0,255	0,248	0,236	0,227	0,212	0,196

Краевая ломаная трещина с равными звеньями. Растягиваемая на бесконечности полуплоскость ослаблена краевой ломаной трещиной, состоящей из N равных звеньев. Соседние звенья образуют между собой

прямой угол (рис. 3.21). Ниже приведены значения КИН [11], полученные методом последовательных приближений:

N	1	2	3	4	5	6
$K_I/(p\sqrt{\pi Na})$	0,705	0,703	0,704	0,704	0,708	0,707
$K_{II}/(p\sqrt{\pi Na})$	0,365	0,364	0,360	0,355	0,349	0,348

Краевая криволинейная трещина. Пусть на свободный от нагрузки край полуплоскости под прямым углом выходит криволинейная трещина. Берега трещины нагружены постоянными нормальными напряжениями

Таблица 3.11. **Значения КИН для ломаной краевой трещины при $\theta_1 = \pi/2$ [36]**

$\frac{c_1}{c_2}$	θ_2	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi b}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi b}}$
0,25	$\pi/6$	0,459	0,338
	$\pi/4$	0,703	0,365
	$\pi/3$	0,919	0,306
0,50	$\pi/6$	0,463	0,337
	$\pi/4$	0,704	0,365
	$\pi/3$	0,919	0,306
0,75	$\pi/6$	0,465	0,340
	$\pi/4$	0,705	0,366
	$\pi/3$	0,919	0,304
0,90	$\pi/6$	0,468	0,342
	$\pi/4$	0,707	0,359
	$\pi/3$	0,921	0,296

Таблица 3.12. **Значения КИН K_I ($K_{II} \approx 0$) для ломаной краевой трещины при $\theta_2 = \pi/2$ [36]**

$\frac{c_1}{c_2}$	θ_1	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi b}}$
0,25	$\pi/6$	1,123
	$\pi/4$	1,121
	$\pi/3$	1,121
0,50	$\pi/6$	1,122
	$\pi/4$	1,121
	$\pi/3$	1,121
0,75	$\pi/6$	1,116
	$\pi/4$	1,122
	$\pi/3$	1,122
0,90	$\pi/6$	1,098
	$\pi/4$	1,121
	$\pi/3$	1,125

Таблица 3.13. **Значения КИН для криволинейной трещины, выходящей под прямым углом на край полуплоскости, при действии на ее берегах постоянного давления [40]**

$\frac{\delta}{a}$	Окружность		Эллипс		Парабола	
	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$
0	1,1215	0	1,1215	0	1,1215	0
0,2	1,167	0,000	0,728	0,455	1,166	—0,007
0,5	1,402	0,000	1,238	0,345	1,394	—0,079
1,0	2,242	0,000	2,242	0,000	2,113	—0,390
1,5	3,64	0,00	3,49	—0,54	3,16	—0,91
2,0	5,59	0,00	5,00	—1,29	4,50	—1,66
2,5	8,11	0,00	6,78	—2,24	6,12	—2,61

σ и на бесконечности полуплоскость растягивается усилиями p (рис. 3.22). В случаях, когда контур трещины представляет собой дугу окружности, параболы или четверть эллипса (граница полуплоскости совпадает с осями параболы или эллипса), задача решена методом СИУ в работе

[40]. Эти данные приведены в табл. 3.13 (внутреннее давление) и в табл. 3.14 (растяжение полуплоскости). В работе [40] имеются также графические данные для КИН, когда на край полуплоскости выходит дугообразная трещина под произвольным углом.

В случае растяжения полуплоскости с краевой трещиной вдоль дуги окружности, когда отрезок OA, соединяющий центр окружности с

Таблица 3.14. **Значения КИН для криволинейной трещины, выходящей под прямым углом на край полуплоскости, при действии растягивающих усилий на бесконечности [40]**

$\frac{\delta}{a}$	Окружность		Эллипс		Парабола	
	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi a}}$
0	1,1215	0	1,1215	0	1,1215	0
0,2	1,045	0,257	0,253	0,516	1,050	0,248
0,5	0,741	0,479	0,263	0,494	0,838	0,438
1,0	0,280	0,447	0,280	0,447	0,611	0,437
1,5	0,072	0,297	0,282	0,418	0,505	0,472
2,0	—0,004	0,185	0,281	0,400	0,447	0,453
2,5	—0,030	0,116	0,279	0,388	0,411	0,437

вершиной трещины A, параллелен краю полуплоскости (рис. 3.23), задача решена методом СИУ [37, 40]. Ниже приведены значения КИН K_I ($K_{II} \approx 0$) [40]:

θ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
$K_I/(p\sqrt{\pi a})$	1,1215	1,115	1,096	1,065	1,020	0,964	0,901

3.3. Полуплоскость с перпендикулярными к ее границе внутренними трещинами

Произвольная самоуравновешенная нагрузка на берегах трещины. Пусть в упругой полуплоскости, связанной с декартовой системой координат xOy (ось Oy направлена по краю полуплоскости), вдоль отрезка $[a, b]$ оси Ox имеется трещина (рис. 3.24). Напряжения на границе полуплоскости и на бесконечности отсутствуют, а на берегах трещины задана самоуравновешенная нагрузка

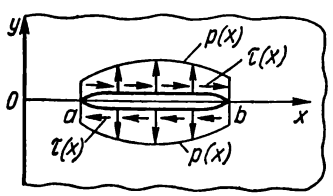


Рис. 3.24. Полуплоскость с внутренней произвольно нагруженной трещиной.

$$\sigma_y^{\pm} - i\tau_{xy}^{\pm} = -[p(x) - i\tau(x)],$$

$$a < x < b.$$

Замкнутое приближенное решение указанной задачи получено в работе [3] с помощью специальной аппроксимации ядра СИУ. КИН при этом определяются по формулам [1—3]

$$K_I(a) - iK_{II}(a) = \frac{b^c\sqrt{2c}}{\sqrt{\pi a(b^c - a^c)}} \int_a^b \left\{[p(x) - i\tau(x)]\left(\frac{a}{b}\right)^c \times\right.$$

$$\times \sqrt{\frac{b^c - x^c}{x^c (x^c - a^c)}} + \frac{c}{2}\left[\frac{E(k)}{K(k)} - \frac{a^c}{x^c}\right] \frac{\sqrt{x^c}\, Q(x)}{x \sqrt{(x^c - a^c)(b^c - x^c)}} \Bigg\} dx,$$

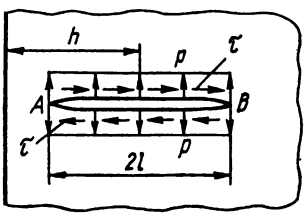
$$K_{\mathrm{I}}(b) - iK_{\mathrm{II}}(b) = \frac{b^c \sqrt{2c}}{\sqrt{\pi b (b^c - a^c)}} \int_a^b \Bigg\{ [p(x) - i\tau(x)] \sqrt{\frac{x^c - a^c}{x^c (b^c - x^c)}} -$$

$$- \frac{c}{2}\left[\frac{E(k)}{K(k)} - \frac{a^c}{x^c}\right] \frac{\sqrt{x^c}\, Q(x)}{x \sqrt{(x^c - a^c)(b^c - x^c)}} \Bigg\} dx,$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем $k = \sqrt{(b^c - a^c)/b^c}$, $Q(x) = \int_a^x [p(t) - i\tau(t)]\, dt$, $c = 2\pi^2/(\pi^2 - 4)$.

В работах [1, 2, 47, 48] приведены асимптотические выражения при большом удалении трещины от края полуплоскости для КИН при действии на трещине произвольной самоуравновешенной нагрузки.

Постоянная нагрузка на берегах трещины. Пусть берега трещины загружены постоянными нормальными (p) и касательными (τ) усилиями (рис. 3.25). Зависимость КИН от относительной длины трещины, полученная при численном



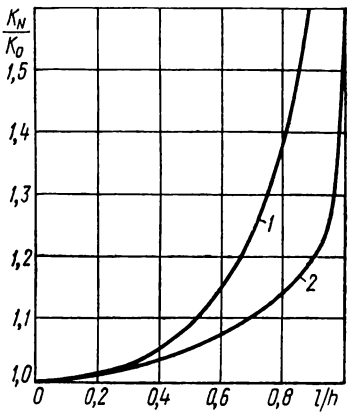


Рис. 3.25. Постоянная нагрузка на берегах трещины в полуплоскости.

Рис. 3.26. Зависимость КИН от относительной длины трещины в полуплоскости при действии постоянной нагрузки:
1 — $K_N(A)$ ($N = \mathrm{I}$; $K_0 = p\sqrt{\pi l}$; $N = \mathrm{II}$; $K_0 = \tau\sqrt{\pi l}$); *2* — $K_N(B)$ [2].

решении сингулярного интегрального уравнения [2], показана на рис. 3.26. Численные значения КИН приведены также в работах [1, 17, 27, 49—52].

В работах [1, 2, 48, 53] построены асимптотические выражения КИН для этого случая нагрузки при большом удалении трещины от края полуплоскости. Они имеют вид [53]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = (p - i\tau)\sqrt{\pi l}\,(1 + 0{,}25\lambda^2 \mp 0{,}125\lambda^3 +$$

$$+ 0{,}1328\lambda^4 \mp 0{,}0781\lambda^5 + 0{,}0967\lambda^6 \mp 0{,}0671\lambda^7 + 0{,}0836\lambda^8 \mp 0{,}0618\lambda^9 +$$

$$+ 0{,}0766\lambda^{10} \mp 0{,}0585\lambda^{11} + 0{,}0724\lambda^{12} \mp 0{,}0562\lambda^{13} + 0{,}0697\lambda^{14} \mp$$
$$\mp 0{,}0544\lambda^{15} + 0{,}0678\lambda^{16} \mp 0{,}0529\lambda^{17} + 0{,}0662\lambda^{18} \mp 0{,}0517\lambda^{19}) + O(\lambda^{20}),$$

где $K_N^{+} = K_N(B)$, $K_N^{-} = K_N(A)$, $\lambda = l/h$, $N = \mathrm{I}, \mathrm{II}$.

Построены также асимптотические формулы для КИН при приближении трещины к краю полуплоскости [54, 55]:

$$K_{\mathrm{I}}(A) - iK_{\mathrm{II}}(A) = -(K_{\mathrm{I}}^0 - iK_{\mathrm{II}}^0)[1 + 1/\ln\varepsilon + O(1/(\ln\varepsilon)^2)]/(\sqrt{\varepsilon}\ln\varepsilon),$$

$$K_{\mathrm{I}}(B) - iK_{\mathrm{II}}(B) = (K_{\mathrm{I}}^0 - iK_{\mathrm{II}}^0)[1 + 1/\ln\varepsilon + O(1/(\ln\varepsilon)^2)],$$

где $K_{\mathrm{I}}^0 = 1{,}1215p\sqrt{2\pi l}$, $K_{\mathrm{II}}^0 = 1{,}1215\tau\sqrt{2\pi l}$ — КИН у вершины B в случае краевой трещины ($h = l$); $\varepsilon = (h - l)/(h + l)$.

Действие нагрузки на краю полуплоскости с трещиной. Пусть берега трещины свободны от нагрузки, а на краю полуплоскости на отрезке

Таблица 3.15. **Значения КИН K_{I} при действии нагрузки на краю полуплоскости с трещиной [49]**

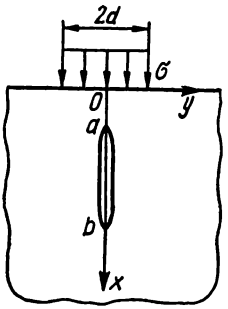
b/a	$10K_{\mathrm{I}}(a)/4\sigma\sqrt{\pi a}$			$10K_{\mathrm{I}}(b)/4\sigma\sqrt{\pi a}$		
	c/a			c/a		
	0,5	1,5	2,5	0,5	1,5	2,5
1,5	0,0394	0,3634	0,6241	0,0234	0,2697	0,5210
2,0	0,0463	0,4622	0,8305	0,0198	0,2642	0,5788
2,5	0,0487	0,5161	0,9631	0,0171	0,2389	0,5668
3,0	0,0492	0,5479	1,0567	0,0153	0,2157	0,5346
3,5	0,0489	0,5667	1,1251	0,0141	0,1975	0,4993
4,0	0,0482	0,5773	1,1759	0,0133	0,1839	0,4671

Таблица 3.16. **Значения КИН K_{I} при действии штампа на краю полуплоскости с трещиной [56]**

$\frac{a}{2L}$	$\frac{b}{2L}$	$\frac{K_{\mathrm{I}}(a)\sqrt{L}}{Q\sqrt{\pi}}$	$\frac{K_{\mathrm{I}}(b)\sqrt{L}}{Q\sqrt{\pi}}$	$\frac{a}{L}$	$\frac{b}{L}$	$\frac{K_{\mathrm{I}}(a)\sqrt{L}}{Q\sqrt{2\pi}}$	$\frac{K_{\mathrm{I}}(b)\sqrt{L}}{Q\sqrt{2\pi}}$	$\frac{3a}{2L}$	$\frac{3b}{2L}$	$\frac{K_{\mathrm{I}}(a)\sqrt{L}}{Q\sqrt{3\pi}}$	$\frac{K_{\mathrm{I}}(b)\sqrt{L}}{Q\sqrt{3\pi}}$
0,9	4,0	3,01	2,48	0,9	4,0	2,98	1,93	0,9	4,0	2,09	1,84
0,6	4,0	3,93	2,59	0,6	4,0	3,34	2,68	0,6	4,0	2,81	2,70
0,3	4,0	4,62	2,67	0,3	4,0	4,01	2,72	0,3	4,0	3,83	2,85

длиной $2d$, симметрично размещенном относительно линии трещины, заданы постоянные нормальные усилия σ (рис. 3.27). Значения КИН K_{I} ($K_{\mathrm{II}} = 0$), полученные методом СИУ [49], приведены в табл. 3.15. В работе [49] приведены также значения КИН, когда на краю полуплоскости задана нормальная нагрузка в виде $\sigma_x = -\sigma_0/(1 + y^2)$ ($\sigma_0 = \mathrm{const}$), $\tau_{xy} = 0$.

Действие жесткого штампа на краю полуплоскости с трещиной. Пусть жесткий штамп с плоским основанием без трения вдавливается в упругую полуплоскость, ослабленную перпендикулярной к границе трещиной (рис. 3.28). Предполагается, что штамп расположен симметрично относительно линии трещины, берега которой свободны от нагрузки. Значения КИН K_I ($K_{II} = 0$), полученные при численном решении системы



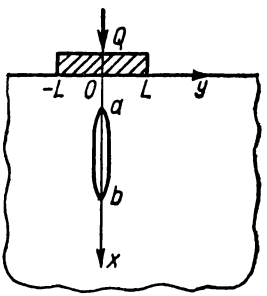
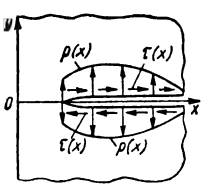


Рис. 3.27. Действие постоянной нормальной нагрузки на среднем участке края полуплоскости с трещиной.

Рис. 3.28. Действие жесткого штампа с плоским основанием на краю полуплоскости с трещиной.

двух СИУ [56], приведены в табл. 3.16. Известно также решение задачи при действии двух симметрично расположенных штампов на краю полуплоскости с внутренней трещиной [57].

Полубесконечная трещина в полуплоскости. Пусть полуплоскость ослаблена полубесконечной трещиной, перпендикулярной к ее границе.



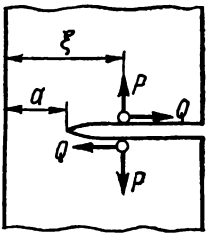


Рис. 3.29. Действие произвольной нагрузки на берегах полубесконечной трещины в полуплоскости.

Рис. 3.30. Действие сосредоточенных сил на берегах полубесконечной трещины в полуплоскости.

К берегам трещины приложена самоуравновешенная нагрузка, а на бесконечности напряжения и вращения отсутствуют (рис. 3.29). В работе [3] получено приближенное замкнутое решение этой задачи при использовании специальной аппроксимации ядра СИУ. КИН при этом выражаются формулами

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{\frac{2c}{\pi a}} \int_a^\infty \sqrt{\frac{x^c}{x^c - a^c}} [p(x) - i\tau(x)]\, dx, \qquad (3.7)$$

где $c = 2\pi^2/(\pi^2 - 4)$.

Таблица 3.17. Значения КИН K_I для периодической системы трещин бесконечности [60]

$\frac{l}{d}$	l/h = 0,5		l/h = 0,333		l/h = 0,2	
	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi l}}$
0,0	1,0914	1,0480	1,0346	1,0176	1,0112	1,0057
0,1	0,9888	0,9982	0,9608	0,9702	0,9564	0,9592
0,2	0,8594	0,8836	0,8528	0,8610	0,8481	0,8520
0,333	0,7089	0,7256	0,7015	0,7096	0,7007	0,7035
0,5	0,5735	0,5871	0,5708	0,5765	0,5708	0,5726

Если к берегам трещины приложена полиномиальная нагрузка

$$p(x) - i\tau(x) = (\sigma - i\tau)(x/a)^{-m} \quad (m > 1),$$

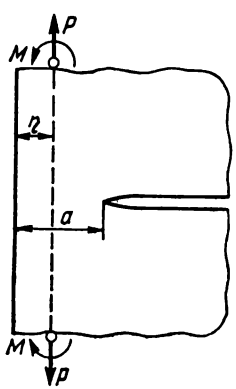
то из равенства (3.7) следует [1—3]

$$K_I - iK_{II} = (\sigma - i\tau)\sqrt{2a/c}\,\Gamma((m-1)/c)/\Gamma((m-1)/c + 1/2), \quad (3.8)$$

где $\Gamma(m)$ — гамма-функция. Из сравнения формул (3.2) и (3.8) следует, что между КИН для краевой и полубесконечной трещин в полуплоскости при действии на их берегах полиномиальной нагрузки имеется полное соответствие. Это справедливо и для точных решений [58].

При действии в точке $x = \xi$ ($\xi > a$) на противоположных берегах трещины нормальных P и сдвигающих Q сосредоточенных сил (рис. 3.30) формула (3.7) приводит к результату [1—3]

$$K_I - iK_{II} = (P - iQ)\sqrt{2c/\pi a}\sqrt{\xi^c/(\xi^c - a^c)}. \quad (3.9)$$



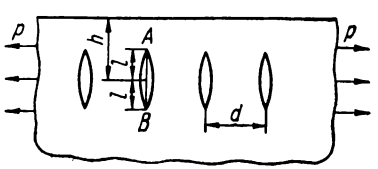


Рис. 3.31. Растяжение полуплоскости с полубесконечной трещиной.

Рис. 3.32. Периодическая система трещин в полуплоскости при растяжении на бесконечности.

Отсюда при $\xi \to \infty$ приходим к точным выражениям для КИН, когда полуплоскость на бесконечности растягивается и сдвигается силами P и Q при отсутствии вращения на бесконечности [1—3]:

$$K_I - iK_{II} = (P - iQ)\sqrt{2c/\pi a} = 2(P - iQ)\sqrt{\pi/a}/\sqrt{\pi^2 - 4}. \quad (3.10)$$

плоскости при растяжении на

0,1		0,0	
$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi l}}$
1,0026	1,0013	1,0000	1,0000
0,9541	0,9553	0,9541	0,9541
0,8479	0,8489	0,8479	0,8479
0,7007	0,7014	0,7005	0,7005
0,5708	0,5712	0,5703	0,5703

Графические данные для КИН при действии сосредоточенных сил на берегах полубесконечной трещины приведены в работе [17]. Учитывая эти результаты, с помощью формулы (3.9) можно записать приближенную формулу для КИН K_I (K_{II} остается таким же) в общем случае, когда не накладывается дополнительное условие отсутствия вращения на бесконечности:

$$K_I = (2P/\sqrt{\pi a}) \times$$

$$\times \{\sqrt{c/2}\sqrt{\xi^c/(\xi^c - a^c)} +$$

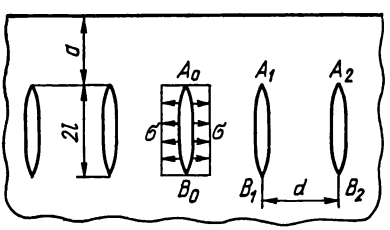
$$+ 3{,}52\,[\xi/a - 0{,}736]\}.$$

Задача о растяжении на бесконечности полуплоскости с полубесконечной трещиной (рис. 3.31, $M = 0$) рассматривалась в ряде работ [13, 15, 17, 18, 32, 58]. Как показано в работах [32, 58], вращение на бесконечности отсутствует, если расстояние между линией действия растягивающих сил P и краем полуплоскости $\eta = 0{,}736a$, т. е. в этом случае КИН K_I находится по формуле (3.10) при $Q = 0$.

В случае чистого изгиба, когда главный вектор растягивающих усилий $P = 0$ (см. рис. 3.31; $P = 0$), КИН K_I ($K_{II} = 0$) равен [17, 32, 59]

$$K_I = 3{,}975M/a\sqrt{a}. \qquad (3.11)$$

На основе формул (3.10) и (3.11) легко получить методом суперпозиции выражение для КИН K_I, когда полуплоскость на бесконечности



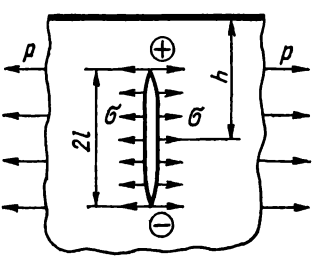


Рис. 3.33. Периодическая система трещин в полуплоскости при действии постоянного давления на одной из трещин.

Рис. 3.34. Трещина в полуплоскости с защемленным краем.

растягивается силами P (см. рис. 3.31; $M = 0$), линия действия которых удалена на любое расстояние η от края полуплоскости,

$$K_I = 7{,}044\,[\eta/a - 0{,}368]\,P/\sqrt{\pi a}.$$

Растяжение полуплоскости с периодической системой трещин. Полуплоскость, ослабленная периодической системой внутренних трещин одинаковой длины $2l$, растягивается на бесконечности усилиями P

(рис. 3.32). Значения КИН K_I ($K_{II} = 0$), полученные методом массовых сил [60], приведены в табл. 3.17.

Периодическая система трещин в полуплоскости при действии непериодической нагрузки. Если в полуплоскости с периодической системой внутренних трещин постоянное давление действует только на одной из трещин (обобщенная периодическая задача) (рис. 3.33), то значения КИН K_I, полученные методом СИУ [61], приведены в табл. 3.18. Этот результат может быть использован для построения решения, когда давление

Таблица 3.18. **Значения КИН для периодической системы трещин в полуплоскости при действии постоянного давления на одной из трещин [61]**

$\frac{d}{l}$	$\frac{a}{l}$	$\frac{K_I(A_0)}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B_0)}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(A_1)}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B_1)}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(A_2)}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B_2)}{\sigma\sqrt{\pi l}}$
1,5	0,5	1,38	1,28	—0,23	—0,27	—0,03	—0,02
	1	1,28	1,24	—0,26	—0,27	—0,03	—0,02
	3	1,22	1,21	—0,27	—0,27	—0,03	—0,03
	200	1,21	1,21	—0,27	—0,27	—0,03	—0,03
2	0,5	1,29	1,18	—0,15	—0,18	—0,05	—0,03
	1	1,18	1,15	—0,18	—0,19	—0,02	—0,02
	3	1,12	1,11	—0,19	—0,19	—0,03	—0,03
	200	1,10	1,10	—0,20	—0,20	—0,03	—0,03
4	0,5	1,23	1,11	—0,09	—0,06	—0,04	—0,03
	1	1,10	1,06	—0,06	—0,06	—0,03	—0,02
	3	1,03	1,03	—0,07	—0,07	—0,01	—0,01
	200	1,01	1,01	—0,07	—0,07	—0,02	—0,02
∞	0,5	1,20	1,10	...	...	...	...
	1	1,09	1,05	...	...	...	...
	3	1,04	1,02	...	...	...	...
	200	1,00	1,00	...	...	...	...

действует и на некоторых других трещинах. В частности, в работе [61] таким путем определены КИН, когда все трещины, расположенные справа от трещины с вершинами A_0 и B_0, загружены внутренним давлением с одинаковой интенсивностью, а слева — свободны от нагрузки.

Внутренние трещины в полуплоскости с жестко защемленным краем. Пусть в полуплоскости, на краю которой заданы нулевые смещения, имеется внутренняя прямолинейная трещина, загруженная постоянным давлением σ (рис. 3.34; $p = 0$). Асимптотические разложения КИН при большом удалении трещины от границы полуплоскости имеют вид [33]

$$K_I^{\pm} = \sigma\sqrt{\pi l}\,[1 - \lambda^2(1 \pm \lambda/2)(\varkappa^2 + 3)/16\varkappa + \\ + \lambda^4(\varkappa^4 - 9\varkappa^3 + 6\varkappa^2 - 9\varkappa + 9)/(256\varkappa^2)] + O(\lambda^5),$$

$$K_{II}^{\pm} = 0, \quad \lambda = l/h.$$

По этой же формуле при замене σ на p определяются КИН в случае, когда трещина свободна от нагрузки, а полуплоскость на бесконечности растягивается усилиями p (см. рис. 3.34; $\sigma = 0$).

Данные по КИН для рассматриваемой задачи приведены также в работах [17, 62] (см. также табл. 3.27). Случай периодической системы трещин в полуплоскости с защемленным краем изучался в [63].

3.4. Полуплоскость с внутренними трещинами различной конфигурации

Произвольно ориентированная прямолинейная трещина. Пусть в полуплоскости со свободным краем имеется внутренняя произвольно ориентированная прямолинейная трещина конечной длины $2l$. Полуплоскость растягивается на бесконечности параллельно краю, а берега трещины находятся под действием постоянной нормальной σ и сдвигающей τ нагрузки (рис. 3.35). Численные результаты для рассматриваемой задачи в случае продольной трещины ($\alpha = 0$) приведены в ряде работ [64—66]. Имеются также данные в общем случае ориентации трещины [1, 2, 67—70]. Значения КИН, полученные в работах [67, 70] при численном решении СИУ, приведены в табл. 3.19—3.21.

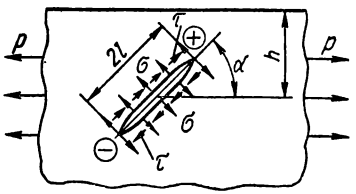


Рис. 3.35. Растяжение полуплоскости с произвольно ориентированной трещиной.

В работах [1, 2, 48, 71] построены асимптотические разложения КИН при действии произвольной самоуравновешенной нагрузки на берегах произвольно ориентированной трещины, находящейся на большом удалении от края полуплоскости. Приведем такие решения для случая, когда берега трещины подвержены постоянному давлению интенсивности σ (рис. 3.35; $\tau = p = 0$) [1, 2]:

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} = \sigma\sqrt{\pi l}\,[1 + (\lambda^2/4)(2 + \cos 2\alpha) \pm (\lambda^3/16)(3\sin\alpha + \sin 3\alpha) -$$
$$- (\lambda^4/128)(17 + 40\cos 2\alpha + 6\cos 4\alpha)] + O(\lambda^5),$$
$$K_{\mathrm{II}}^{\pm} = \sigma\sqrt{\pi l}\,(\lambda^2/8)\,[\sin 2\alpha \mp (\lambda/2)(5\cos\alpha + \cos 3\alpha) -$$

Таблица 3.19. **Значения КИН для произвольно ориентированной трещины под давлением в полуплоскости со свободным краем ($\delta = h/l$ — $-\sin\alpha$) [67]**

δ	α	$\frac{K_{\mathrm{I}}^{-}}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{\mathrm{I}}^{+}}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{\mathrm{II}}^{-}}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{\mathrm{II}}^{+}}{\sigma\sqrt{\pi l}}$
4,0	$\pi/2$	1,009	1,011	0	0
	$5\pi/12$	1,011	1,013	0,0028	0,0022
	$\pi/3$	1,015	1,017	0,0053	0,0037
	$\pi/4$	1,021	1,024	0,0071	0,0038
	$\pi/6$	1,029	1,032	0,0079	0,0022
	$\pi/12$	1,037	1,039	0,0075	—0,0010
	0	1,045	1,045	0,0055	—0,0055
1,0	$\pi/2$	1,054	1,091	0	0
	$5\pi/12$	1,062	1,104	0,0200	0,0097
	$\pi/3$	1,087	1,140	0,0410	0,0128
	$\pi/4$	1,132	1,199	0,0645	0,0029
	$\pi/6$	1,204	1,281	0,0925	—0,0271
	$\pi/12$	1,317	1,383	0,1290	—0,0856
	0	1,511	1,511	0,1849	—0,1849

Продолжение табл. 3.19

δ	α	$\frac{K_I^-}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I^+}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}^-}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}^+}{\sigma\sqrt{\pi l}}$
0,4	π/2	1,112	1,254	0	0
	5π/12	1,128	1,284	0,0446	0,0103
	π/3	1,178	1,375	0,0950	0,0029
	π/4	1,277	1,533	0,1599	—0,0429
	π/6	1,456	1,773	0,2575	—0,1571
	π/12	1,821	2,149	0,4410	—0,4004
	0	2,905	2,905	0,9940	—0,9940
0,1	π/2	1,211	1,758	0	0
	5π/12	1,237	1,829	0,0826	—0,0133
	π/3	1,326	2,053	0,1815	—0,0723
	π/4	1,513	2,473	0,3250	—0,2420
	π/6	1,913	3,223	0,5882	—0,6554
	π/12	3,027	4,829	1,300	—1,756
	0	14,01	14,01	8,812	—8,812

$$- (\lambda^2/4)\,(3\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)] + O(\lambda^5),$$

$$\lambda = l/h.$$

Для $\alpha = 0$ аналогичные разложения построены также в работе [72].

При растяжении полуплоскости на бесконечности усилиями p параллельно границе (см. рис. 3.35; $\sigma = \tau = 0$) решение имеет вид [1, 2]

$$K_I^{\pm} = (1/2)\,p\sqrt{\pi l}\,[1 - \cos 2\alpha + (\lambda^2/16)\,(5 - 4\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) \mp$$

$$\mp (\lambda^3/32)\,(\sin 5\alpha + 7\sin 3\alpha - 2\sin \alpha) - (\lambda^4/256)\,(12 +$$

$$+ 39\cos 2\alpha - 46\cos 4\alpha - 5\cos 6\alpha)] + O(\lambda^5),$$

$$K_{II}^{\pm} = -(1/2)\,p\sqrt{\pi l}\,[\sin 2\alpha + (\lambda^2/16)\,(\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha) \pm$$

$$\pm (\lambda^3/32)\,(6\cos \alpha - 5\cos 3\alpha - \cos 5\alpha) - (\lambda^4/256)\,(15\sin 2\alpha +$$

$$+ 40\sin 4\alpha + 5\sin 6\alpha)] + O(\lambda^5), \quad \lambda = l/h.$$

Полубесконечная прямолинейная трещина. Пусть полуплоскость содержит полубесконечную трещину, параллельную ее краю. Трещина раскрывается под действием сосредоточенной силы P и изгибающего момента M (рис. 3.36), приложенных далеко от вершины трещины ($a \gg h$). Приближенное выражение для КИН K_I, полученное при решении задачи в балочном приближении [17], имеет вид

$$K_I = \sqrt{6}\,(Pa + M)/h^{3/2} \quad (a \gg h).$$

Точное решение задачи в случае произвольно ориентированной полубесконечной трещины приведено в работе [73].

Криволинейные трещины. Пусть в полуплоскости со свободным от нагрузки краем имеется симметричная криволинейная трещина, ось симметрии которой перпендикулярна ее границе. Берега трещины находятся под действием постоянного давления σ, а на бесконечности полуплоскость растягивается усилиями p. Рассматриваются два случая, когда трещина обращена к краю полуплоскости вогнутостью (рис. 3.37) или

выпуклостью (рис. 3.38). В работе [74] методом СИУ найдено решение этой задачи для трещины, расположенной вдоль дуги окружности, параболы или полуэллипса. Полученные значения КИН в вершине A приведены в табл. 3.22—3.25 ($K_{\mathrm{I}}(A) = K_{\mathrm{I}}(B)$ и $K_{\mathrm{II}}(A) = -K_{\mathrm{II}}(B)$). В указанной работе имеются также данные для КИН, когда полуплоскость ослаблена произвольно ориентированной дугообразной трещиной. Общий случай ориентации криволинейной трещины вдоль дуги окружности, параболы или полуэллипса рассмотрен в работе [70].

Данные по КИН для анизотропной полуплоскости с трещиной вдоль дуги эллипса имеются в работе [75].

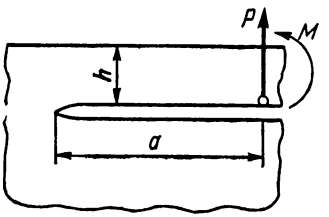
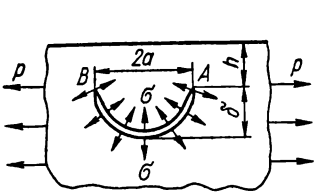


Рис. 3.36. Полуплоскость с параллельной границе полубесконечной трещиной.

Внутренняя и краевая трещины в полуплоскости. Пусть в растягиваемой на бесконечности полуплоскости имеется произвольно ориентированная краевая и перпендикулярная к ее краю внутренняя трещины. Край полуплоскости и берега трещин свободны от нагрузки (рис. 3.39). Значения КИН при $l = 0{,}1b$, полученные в работе [27] методом массовых сил, приведены в табл. 3.26. Рассматривались также случаи взаимодействия внутренней и краевой параллельных [11, 34] или коллинеарных [76] трещин, ортогональных границе полуплоскости.



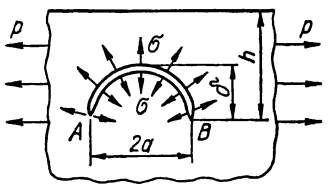
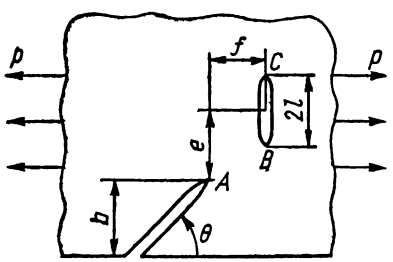


Рис. 3.37. Полуплоскость с симметричной криволинейной трещиной, обращенной вогнутостью к ее краю.

Рис. 3.38. Полуплоскость с симметричной криволинейной трещиной, обращенной выпуклостью к ее краю.



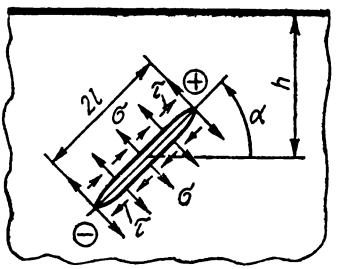


Рис. 3.39. Система внутренней и краевой трещин в полуплоскости.

Рис. 3.40. Произвольно ориентированная трещина под действием постоянной нагрузки в полуплоскости с защемленным краем.

Произвольно ориентированная прямолинейная трещина в полуплоскости с жестко защемленным краем. Пусть в полуплоскости, граница которой жестко защемлена, имеется произвольно ориентированная прямолинейная трещина, на берегах которой действует постоянная нормальная σ и сдвигающая τ нагрузка (рис. 3.40). Задача решена методом СИУ [67]. Эти результаты для $\varkappa = 2$ приведены в табл. 3.27 и 3.28. В случае продольной трещины ($\alpha = 0$) данные по КИН приведены также в работах [65, 77].

Таблица 3.20. **Значения КИН для произвольно ориентированной трещины под действием сдвигающей нагрузки в полуплоскости со свободным краем ($\delta = h/l - \sin\alpha$) [67]**

δ	α	$\frac{K_I^-}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I^+}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}^-}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}^+}{\tau\sqrt{\pi l}}$
4,0	$\pi/2$	0	0	1,009	1,011
	$5\pi/12$	0,0019	0,0035	1,009	1,011
	$\pi/3$	0,0032	0,0064	1,010	1,012
	$\pi/4$	0,0034	0,0084	1,010	1,012
	$\pi/6$	0,0022	0,0090	1,011	1,012
	$\pi/12$	0,0007	0,0080	1,012	1,013
	0	—0,0053	0,0053	1,014	1,014
1,0	$\pi/2$	0	0	1,054	1,091
	$5\pi/12$	0,0078	0,0361	1,055	1,091
	$\pi/3$	0,0127	0,0710	1,057	1,090
	$\pi/4$	0,0110	0,1028	1,062	1,087
	$\pi/6$	—0,0034	0,1285	1,068	1,084
	$\pi/12$	—0,0421	0,1417	1,076	1,081
	0	—0,1331	0,1331	1,087	1,087

δ	α	$\frac{K_I^-}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I^+}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}^-}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}^+}{\tau\sqrt{\pi l}}$
0,4	$\pi/2$	0	0	1,112	1,254
	$5\pi/12$	0,0139	0,1128	1,114	1,249
	$\pi/3$	0,0235	0,2237	1,119	1,231
	$\pi/4$	0,0222	0,3281	1,128	1,199
	$\pi/6$	—0,0025	0,4154	1,138	1,154
	$\pi/12$	—0,0855	0,4610	1,148	1,109
	0	—0,3876	0,3876	1,133	1,133
0,1	$\pi/2$	0	0	1,211	1,758
	$5\pi/12$	0,0267	0,3418	1,215	1,726
	$\pi/3$	0,0506	0,6730	1,228	1,630
	$\pi/4$	0,0670	0,9797	1,251	1,470
	$\pi/6$	0,0647	1,236	1,291	1,253
	$\pi/12$	—0,0012	1,375	1,359	1,026
	0	—0,8709	0,8709	1,384	1,384

Таблица 3.21. **Значения КИН для произвольно ориентированной трещины в полуплоскости со свободным краем при растяжении на бесконечности [70]**

l/h	α	$K_I^+/(p\sqrt{\pi l})$	$K_{II}^+/(p\sqrt{\pi l})$	$K_I^-/(p\sqrt{\pi l})$	$K_{II}^-/(p\sqrt{\pi l})$
0,5	$\pi/6$	0,2621	—0,4580	0,2813	—0,4398
	$\pi/4$	0,5370	—0,5291	0,5454	—0,5007
	$\pi/3$	0,8139	—0,4569	0,8024	—0,4284
	$\pi/2$	1,0913	0	1,0539	0
0,7	$\pi/6$	0,2648	—0,4800	0,3069	—0,4388
	$\pi/4$	0,5651	—0,5642	0,5827	—0,4944
	$\pi/3$	0,8859	—0,4984	0,8483	—0,4190
	$\pi/2$	1,2378	0	1,1074	0
1,0	$\pi/6$	0,2642	—0,5209	0,3492	—0,4320
	$\pi/4$	0,6267	—0,6601	0,6508	—0,4779
	$\pi/3$	1,1642	—0,6971	0,9534	—0,3980

Таблица 3.22. **Значения КИН для симметричной криволинейной трещины, обращенной вогнутостью к краю полуплоскости, при растяжении на бесконечности [74]**

$\frac{a}{h}$	$\frac{\delta}{a}$	Окружность		Эллипс		Парабола	
		$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(A)}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(A)}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(A)}{p\sqrt{\pi a}}$
0,5	0,2	0,078	—0,181	0,368	—0,056	0,074	—0,179
	0,5	0,347	—0,274	0,531	—0,080	0,284	—0,292
	1,0	0,657	—0,063	0,657	—0,063	0,533	—0,284
	1,5	0,718	0,194	0,765	—0,045	0,693	—0,244
	2,0	0,690	0,376	0,864	—0,033	0,816	—0,210
	2,5	0,645	0,500	0,956	—0,023	0,922	—0,184
0,7	0,2	0,082	—0,181	0,370	—0,053	0,078	—0,179
	0,5	0,354	—0,270	0,534	—0,075	0,291	—0,290
	1	0,663	—0,060	0,663	—0,060	0,541	—0,281
	1,5	0,730	0,194	0,776	—0,045	0,704	—0,244
	2,0	0,713	0,377	0,881	—0,036	0,833	—0,213
	2,5	0,680	0,505	0,981	—0,030	0,946	—0,190
1,0	0,2	0,090	—0,183	0,377	—0,050	0,086	—0,181
	0,5	0,368	0,266	0,540	—0,066	0,305	—0,287
	1,0	0,673	—0,051	0,673	—0,051	0,558	—0,275
	1,5	0,747	0,201	0,794	—0,039	0,726	—0,239
	2,0	0,741	0,385	0,909	—0,032	0,863	—0,211
	2,5	0,717	0,519	1,020	—0,028	0,985	0,191
2,0	0,2	0,116	—0,193	0,407	—0,040	0,111	—0,191
	0,5	0,410	—0,258	0,565	—0,043	0,348	—0,284
	1,0	0,708	—0,027	0,708	—0,027	0,609	—0,262
	1,5	0,794	0,231	0,854	—0,018	0,796	—0,227
	2,0	0,807	0,430	0,997	—0,013	0,958	—0,202
	2,5	0,798	0,583	1,137	—0,011	0,109	—0,184
4,0	0,2	0,152	—0,209	0,458	—0,029	0,147	—0,207

Продолжение табл. 3.22

$\frac{a}{h}$	$\frac{\delta}{a}$	Окружность		Эллипс		Парабола	
		$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(A)}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(A)}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(A)}{p\sqrt{\pi a}}$
4,0	0,5	0,448	—0,251	0,587	—0,024	0,387	—0,282
	1,0	0,747	—0,012	0,747	—0,012	0,658	—0,256
	1,5	0,861	0,257	0,926	—0,006	0,874	—0,226
	2,0	0,899	0,480	1,105	—0,004	1,070	—0,205
	2,5	0,906	0,659	1,280	—0,002	1,257	—0,191

Таблица 3.23. **Значения КИН для симметричной криволинейной трещины под действием давления, обращенной вогнутостью к краю полуплоскости [74]**

$\frac{a}{h}$	$\frac{\delta}{a}$	Окружность		Эллипс		Парабола	
		$\frac{K_I(A)}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(A)}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I(A)}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(A)}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I(A)}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(A)}{\sigma\sqrt{\pi a}}$
0,5	0,2	1,103	0,216	0,352	0,531	1,107	0,208
	0,5	0,838	0,461	0,358	0,548	0,927	0,405
	1,0	0,472	0,573	0,472	0,573	0,808	0,477
	1,5	0,281	0,582	0,592	0,569	0,818	0,486
	2,0	0,173	0,578	0,697	0,566	0,867	0,489
	2,5	0,101	0,572	0,794	0,565	0,930	0,492
0,7	0,2	1,233	0,219	0,404	0,596	1,238	0,209
	0,5	0,923	0,518	0,375	0,634	1,024	0,452
	1,0	0,485	0,654	0,485	0,654	0,872	0,546
	1,5	0,252	0,663	0,610	0,651	0,872	0,559
	2,0	0,116	0,654	0,723	0,647	0,919	0,563
	2,5	0,023	0,655	0,828	0,645	0,985	0,566

Таблица 3.24. **Значения КИН для симметричной криволинейной трещины, обращенной выпуклостью к краю полуплоскости, при растяжении на бесконечности [74]**

$\frac{a}{h}$	$\frac{\delta}{a}$	Окружность		Эллипс		Парабола	
		$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(A)}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(A)}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(A)}{p\sqrt{\pi a}}$
0,5	0,2	0,073	—0,184	0,369	—0,059	0,069	—0,182
	0,5	0,348	—0,284	0,539	—0,086	0,282	—0,303
	1,0	0,685	—0,060	0,685	—0,060	0,558	—0,295
0,7	0,2	0,072	—0,187	0,371	—0,060	0,068	—0,185
	0,5	0,356	—0,291	0,550	—0,086	0,289	—0,311
	1,0	0,725	—0,045	0,725	—0,045	0,605	—0,294

Таблица 3.25. **Значения КИН для симметричной криволинейной трещины под действием давления, обращенной выпуклостью к краю полуплоскости [74]**

$\frac{a}{h}$	$\frac{\delta}{a}$	Окружность		Эллипс		Парабола	
		$\frac{K_I(A)}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(A)}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I(A)}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(A)}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I(A)}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(A)}{\sigma\sqrt{\pi a}}$
0,5	0,2	1,066	0,275	0,285	0,518	1,072	0,267
	0,5	0,786	0,473	0,320	0,532	0,876	0,428
	1,0	0,447	0,545	0,447	0,545	0,773	0,473
0,7	0,2	1,153	0,355	0,250	0,570	1,161	0,347
	0,5	0,808	0,554	0,285	0,582	0,915	0,512
	1,0	0,422	0,599	0,422	0,599	0,801	0,551

Таблица 3.26. **Значения КИН для системы внутренней и краевой трещин в полуплоскости при $l = 0{,}1b$ ($a = b$ cosec θ) [27]**

θ	$\frac{l}{b}$	$\frac{e}{b}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(A)}{p\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_{II}(B)}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_I(C)}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_{II}(C)}{p\sqrt{\pi c}}$
$\pi/2$	0	0,2	1,223	0,000	2,322	0,000	1,831	0,000
	0	0,4	1,146	0,000	1,572	0,000	1,438	0,000
	0	1,0	1,126	0,000	1,169	0,000	1,146	0,000
	0,2	0,2	1,188	—0,028	2,216	0,066	1,917	0,214
	0,2	0,4	1,152	0,006	1,660	0,217	1,499	0,184
	0,2	1,0	1,126	0,001	1,182	0,074	1,156	0,064
$\pi/4$	—0,2	0,2	0,715	0,407	2,225	—0,058	1,913	—0,194
	—0,2	0,4	0,726	0,375	1,655	—0,192	1,496	—0,164
	—0,2	1,0	0,709	0,366	1,182	—0,066	1,157	—0,057
	0	0,2	0,773	0,391	2,332	—0,004	1,840	0,005
	0	0,4	0,721	0,371	1,580	0,006	1,444	0,007
	0	1,0	0,708	0,366	1,171	0,005	1,148	0,004
	0,2	0,2	0,754	0,397	2,121	0,015	1,869	0,168
	0,2	0,4	0,715	0,382	1,641	0,186	1,491	0,165
	0,2	1,0	0,707	0,367	1,183	0,074	1,158	0,064
$\pi/6$	0	0,2	0,512	0,361	2,325	—0,049	1,856	0,006
$\pi/3$	0	0,2	0,990	0,330	2,229	0,074	1,903	0,205
$5\pi/12$	0	0,2	1,166	0,186	2,322	—0,001	1,830	—0,004

Таблица 3.27. **Значения КИН для произвольно ориентированной трещины под давлением в полуплоскости с защемленным краем ($\varkappa = 2$; $\delta = h/l - \sin\alpha$) [67]**

δ	α	$\frac{K_I^-}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I^+}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}^-}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}^+}{\sigma\sqrt{\pi l}}$
4,0	$\pi/2$	0,9921	0,9903	0	0
	$5\pi/12$	0,9914	0,9895	—0,0014	—0,0009
	$\pi/3$	0,9893	0,9873	—0,0027	—0,0015
	$\pi/4$	0,9862	0,9840	—0,0037	—0,0014
	$\pi/6$	0,9822	0,9801	—0,0041	—0,0005
	$\pi/12$	0,9778	0,9764	—0,0040	0,0011
	0	0,9735	0,9735	—0,0032	0,0032
1,0	$\pi/2$	0,9572	0,9273	0	0
	$5\pi/12$	0,9538	0,9228	—0,0090	—0,0004
	$\pi/3$	0,9435	0,9100	—0,0179	0,0021
	$\pi/4$	0,9265	0,8915	—0,0267	0,0096
	$\pi/6$	0,9030	0,8706	—0,0358	0,0230
	$\pi/12$	0,8726	0,8506	—0,0460	0,0409
	0	0,8337	0,8337	—0,0606	0,0606
0,4	$\pi/2$	0,9281	0,8224	0	0
	$5\pi/12$	0,9169	0,8172	—0,0160	0,0125
	$\pi/3$	0,9024	0,8037	—0,0317	0,0295
	$\pi/4$	0,8794	0,7871	—0,0470	0,0527
	$\pi/6$	0,8486	0,7729	—0,0627	0,0795
	$\pi/12$	0,8095	0,7629	—0,0824	0,1046
	0	0,7532	0,7532	—0,1228	0,1228
0,1	$\pi/2$	0,8858	0,6147	0	0
	$5\pi/12$	0,8808	0,6193	—0,0198	—0,0564
	$\pi/3$	0,8664	0,6320	—0,0387	0,1074
	$\pi/4$	0,8432	0,6591	—0,0567	0,1486
	$\pi/6$	0,8114	0,6659	—0,0759	0,1789
	$\pi/12$	0,7681	0,6785	—0,1051	0,1994
	0	0,6793	0,6793	—0,2117	0,2117

Таблица 3.28. **Значения КИН для произвольно ориентированной трещины под действием сдвигающей нагрузки в полуплоскости с защемленным краем ($\varkappa = 2$, $\delta = h/l - \sin\alpha$) [67]**

δ	α	$\frac{K_{\mathrm{I}}^{-}}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{\mathrm{I}}^{+}}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{\mathrm{II}}^{-}}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{\mathrm{II}}^{+}}{\tau\sqrt{\pi l}}$
4,0	$\pi/2$	0	0	0,9921	0,9903
	$5\pi/12$	—0,0008	—0,0018	0,9920	0,9902
	$\pi/3$	—0,0013	—0,0033	0,9917	0,9900
	$\pi/4$	—0,0013	—0,0044	0,9912	0,9897
	$\pi/6$	—0,0006	—0,0047	0,9903	0,9892
	$\pi/12$	0,0010	—0,0044	0,9892	0,9885
	0	0,0033	—0,0033	0,9876	0,9876
1,0	$\pi/2$	0	0	0,9572	0,9273
	$5\pi/12$	—0,0015	—0,0168	0,9567	0,9273
	$\pi/3$	—0,0011	—0,0325	0,9549	0,9271
	$\pi/4$	0,0031	—0,0460	0,9513	0,9264
	$\pi/6$	0,0134	—0,0566	0,9452	0,9247
	$\pi/12$	0,0329	—0,0636	0,9344	0,9211
	0	0,0664	—0,0664	0,9135	0,9135

δ	α	$\frac{K_{\mathrm{I}}^{-}}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{\mathrm{I}}^{+}}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{\mathrm{II}}^{-}}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{\mathrm{II}}^{+}}{\tau\sqrt{\pi l}}$
0,4	$\pi/2$	0	0	0,9218	0,8224
	$5\pi/12$	0,0006	—0,0424	0,9213	0,8247
	$\pi/3$	0,0045	—0,0805	0,9196	0,8308
	$\pi/4$	0,0149	—0,1106	0,9156	0,8388
	$\pi/6$	0,0355	—0,1300	0,9067	0,8452
	$\pi/12$	0,0709	—0,1375	0,8859	0,8444
	0	0,1342	—0,1342	0,8267	0,8267
0,1	$\pi/2$	0	0	0,8858	0,6147
	$5\pi/12$	0,0041	—0,0715	0,8855	0,6223
	$\pi/3$	0,0117	—0,1322	0,8840	0,6419
	$\pi/4$	0,0263	—0,1762	0,8789	0,6661
	$\pi/6$	0,0520	—0,2040	0,7649	0,6878
	$\pi/12$	0,0970	—0,2198	0,8294	0,7047
	0	0,2205	—0,2205	0,7075	0,7075

Имеются [33] также асимптотические разложения КИН при большом удалении произвольно ориентированной трещины от края полуплоскости, в частности, когда берега продольной трещины нагружены давлением σ (см. рис. 3.40; $\alpha = 0$, $\tau = 0$), имеем

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} = \sigma\sqrt{\pi l}\,[1 - (\lambda^2/(16\varkappa))\,(\varkappa^2 + 11) + (\lambda^4/(256\varkappa^2))\,(\varkappa^4 + 9\varkappa^3 + 22\varkappa^2 + 261\varkappa + 121)] + O(\lambda^6),$$

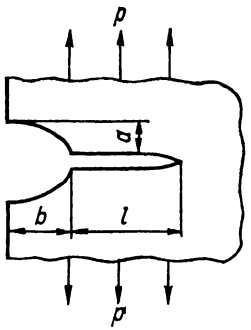
$$K_{\mathrm{II}}^{\pm} = \pm\sigma\sqrt{\pi l}\,(\lambda^3/(32\varkappa))\,(\varkappa^2 + 11) + O(\lambda^5),$$

$$\lambda = l/h.$$

Аналогичное решение построено также в работе [72].

3.5. Трещины в полуплоскости с краевыми вырезами, отверстиями или выступами

Краевой криволинейный вырез с выходящей на его контур трещиной. Пусть полуплоскость ослаблена краевым полуэллиптическим вырезом, на контур которого в его вершине выходит прямолинейная трещина. Полуплоскость на бесконечности растягивается усилиями p, а ее граница,



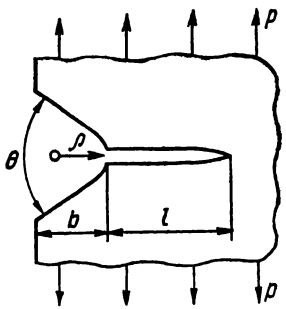


Рис. 3.41. Полуплоскость с полуэллиптическим вырезом и выходящей на его контур трещиной.

Рис. 3.42. Полуплоскость с треугольным вырезом с округлением в вершине, из которой исходит трещина.

край выреза и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 3.41). В работе [31] эта задача решена методом массовых сил. Значения КИН K_I ($K_{II} = 0$) приведены в табл. 3.29. Численные данные имеются также в работах [78, 79]. Отдельно изучался [80] случай полукругового выреза ($a = b$) с выходящей на его границу трещиной.

Таблица 3.29. **Значения КИН $K_I/p\sqrt{\pi(b+l)}$ ($K_{II} = 0$) для полуплоскости с полуэллиптическим вырезом и выходящей на его контур трещиной** [31]

b/a	l/b					
	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,5	0,654	0,831	1,000	1,068	1,098	1,111
1,0	0,862	1,017	1,102	1,118	1,121	1,122
2,0	1,053	1,109	1,122	1,122	1,121	1,121

Значения КИН, полученные методом массовых сил [34] для случая растяжения полуплоскости с треугольным вырезом с округлением радиуса ρ в вершине, из которой исходит трещина (рис. 3.42), приведены в табл. 3.30 и 3.31.

Для трещины, симметрично исходящей из вершины краевого симметричного гладкого выреза произвольной формы (см. рис. 3.41, 3.42), в

работе [81] для определения КИН предложена аппроксимационная формула

$$K_I = 1{,}1215p\sqrt{\pi(b+l)}\,s\{1+[(\alpha_0-1)^{-2,5}+(1/s-1)^{-2,5}]^{-0,4}\}, \quad (3.12)$$

где $s = \sqrt{l/(b+l)}$, α_0 — коэффициент концентрации напряжений в вершине выреза при отсутствии трещины. Формула (3.12) при малой ($l \ll b$)

Таблица 3.30. **Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi(b+l)})$ ($K_{II}=0$) для полуплоскости с треугольным вырезом с округлением в вершине, из которой исходит трещина, при $\rho/b = 0{,}5$ [34]**

θ	l/b			θ	l/b		
	0,2	0,4	1,0		0,2	0,4	1,0
0	1,084	1,119	1,121	π/2	1,080	1,118	1,121
π/6	1,084	1,119	1,121	2π/3	1,052	1,106	1,122
π/3	1,084	1,119	1,121	5π/6	0,921	1,028	1,107

Таблица 3.31. **Значения КИН $K_I/p\sqrt{\pi(b+l)}$ ($K_{II}=0$) для полуплоскости с треугольным вырезом с округлением в вершине, из которой исходит трещина, при $\theta = \pi/3$ [34]**

ρ/b	l/b					
	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,125	1,106	1,121	1,122	1,121	1,121	1,121
0,250	1,065	1,114	1,122	1,121	1,121	1,121
0,500	0,980	1,084	1,119	1,122	1,121	1,121
1,000	0,861	1,017	1,102	1,118	1,121	1,121

и большой ($l \gg b$) длинах трещины согласуется с асимптотическими значениями КИН

$$K_I = 1{,}1215p\alpha_0\sqrt{\pi l} \quad (l \ll b),$$

$$K_I = 1{,}1215p\sqrt{\pi(b+l)} \quad (l \gg b),$$

а для трещины средней длины имеет относительную погрешность, не превышающую 1,5 %. Для коэффициента концентрации напряжений также предложена аппроксимационная формула [81]

$$\alpha_0 = (1 + 2{,}48\sqrt{b/\rho} + 1{,}16b/\rho)/(1 + 0{,}517\sqrt{b/\rho}),$$

относительная погрешность которой меньше 1 %.

Несколько приближенных формул для определения КИН в вершине трещины, выходящей из краевого выреза, имеется в работах [82, 83].

Трещина, исходящая из треугольного надреза на границе полуплоскости. Пусть полуплоскость содержит краевой треугольный надрез, из вершины которого симметрично исходит трещина. Полуплоскость нахо-

дится под действием растяжения на бесконечности, а ее край, граница надреза и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 3.43). Значения КИН K_I ($K_{II} = 0$), полученные методом конформных отображений [84], приведены в табл. 3.32. Численные значения КИН имеются также в работах [11, 85]. Общий случай ориентации трещины, исходящей из треугольного надреза, рассмотрен в работе [11].

Трещина, исходящая из вершины квадратного надреза на границе полуплоскости. Полуплоскость содержит краевой квадратный вырез, из вершины угла которого исходит трещина. Полуплоскость растягивается

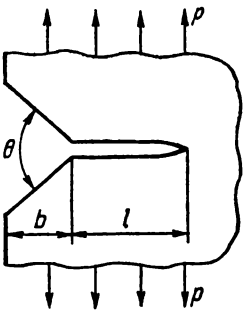


Рис. 3.43. Растяжение полуплоскости треугольным надрезом, из вершины которого исходит трещина.

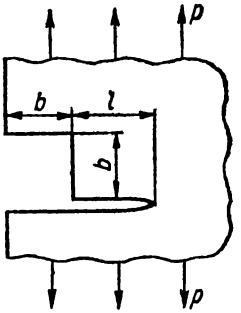


Рис. 3.44. Растяжение полуплоскости с квадратным надрезом, из вершины которого исходит трещина.

на бесконечности усилиями p, а ее край, граница выреза и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 3.44). Ниже приведены значения КИН $K_I/p\sqrt{\pi(b+l)} = F_I$ и $K_{II}/p\sqrt{\pi(b+l)} = F_{II}$, полученные в работе [11] методом последовательных приближений:

l/b	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
F_I	0,74	0,84	0,898	0,937	1,005	1,044	1,071
F_{II}	0,14	0,12	0,105	0,089	0,068	0,049	0,036

l/b	0,60	0,80	1,00	1,20	1,50	2,00
F_I	1,090	1,109	1,117	1,120	1,121	1,1215
F_{II}	0,022	0,009	0,002	0,002	0,001	0,000

В этой же работе имеются данные для случая прямоугольного выреза с трещиной, а также для квадратного выреза, из обеих вершин углов которого исходят трещины, или из вершины одного угла которого исходит произвольно ориентированная трещина.

Краевой криволинейный вырез с точкой возврата на контуре. Пусть область тела представляет собой полуплоскость с краевым остроконечным надрезом (рис. 3.45). Параметрическое уравнение границы тела в декартовой системе координат xOy имеет вид

$$x = a\xi^3/(\xi^2 + 1), \quad y = -a/(\xi^2 + 1),$$
$$-\infty < \xi < \infty.$$

Таблица 3.32. Значения КИН K_I для трещины, исходящей из треугольного надреза на границе полуплоскости [84]

θ	l/b	$K_I/(p\sqrt{\pi b})$	θ	l/b	$K_I/(p\sqrt{\pi b})$	θ	l/b	$K_I/(p\sqrt{\pi b})$
$\pi/9$	0,0017	1,1224	$4\pi/9$	0,0082	1,0668	$2\pi/3$	0,0286	0,9421
	0,0542	1,1514		0,0261	1,1082		0,0514	1,0088
	0,1087	1,1806		0,0655	1,1476		0,1701	1,1667
	0,3639	1,3094		0,2096	1,2272		0,3192	1,2883
	0,7453	1,4814		0,5769	1,4090		1,0531	1,6066
$2\pi/9$	0,0061	1,1234	$\pi/2$	0,0110	1,0424	$7\pi/9$	0,0622	0,8774
	0,0302	1,1389		0,0335	1,0975		0,1054	0,9781
	0,1407	1,1981		0,0814	1,1504		0,3189	1,2173
	0,4420	1,3463		0,1979	1,2256		0,7459	1,4659
	0,8769	1,5362		0,5389	1,3918		1,1402	1,6387
$\pi/3$	0,0047	1,1020	$5\pi/9$	0,0280	1,0541	$8\pi/9$	0,0185	0,4213
	0,0098	1,1139		0,0435	1,0781		0,1804	0,8800
	0,0164	1,1222		0,1022	1,1523		0,7971	1,4175
	0,1859	1,2225		0,4203	1,3371		1,3894	1,7270
	0,5482	1,3951		0,9306	1,5583		3,0459	2,2554

Основные граничные задачи теории упругости для такой области могут быть решены точно методом комформных отображений. Если граница свободна от нагрузки, а на бесконечности действуют растягивающие

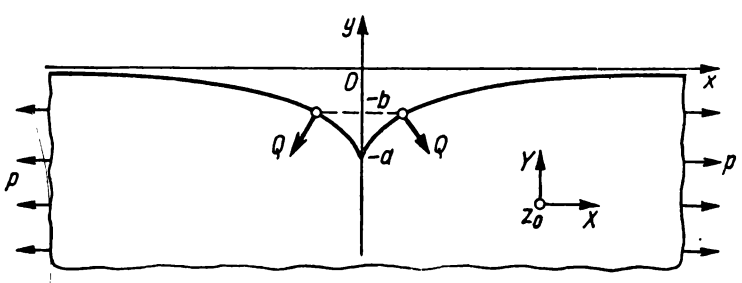


Рис. 3.45. Растяжение полуплоскости с краевым криволинейным вырезом с точкой возврата на контуре.

усилия (см. рис. 3.45); $Q = X = Y = 0$), то КИН определяются по формулам [86, 87]

$$K_I = (3\sqrt{2}/4)\, p\sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = 0.$$

Когда в симметричных точках края надреза приложены две нормальные растягивающие сосредоточенные силы Q (см. рис. 3.45; $p = X = Y = 0$), то КИН равны [87]

$$K_I = 4Q(1 - c^2)/[\sqrt{2\pi ac}\,(1 + c^2)\sqrt{c^2 + 4}], \quad K_{II} = 0, \quad c = \sqrt{(a - b)/b}.$$

При действии в произвольной точке $z_0 = x_0 + iy_0$ области тела сосредоточенной силы с проекциями X и Y (см. рис. 3.45; $Q = p = 0$)

КИН даются выражением [88]

$$K_I - iK_{II} = (i/(2(1+\varkappa)\sqrt{2\pi a}))\{(X+iY)((3\bar{\zeta}_0 + 2i)/(\bar{\zeta}_0 + i)) \times$$

$$\times [\varkappa/\bar{\zeta}_0 + (\bar{\zeta}_0 - i)/(\zeta_0(\zeta_0 - 2i))] + ((X - iY)/(\zeta_0 - i))[2(\bar{\zeta}_0 - \zeta_0)(\zeta_0 + \bar{\zeta}_0 +$$

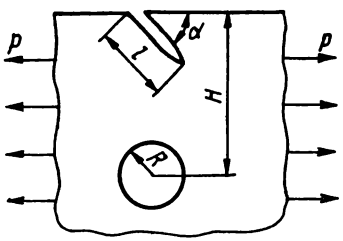
$$+ i\zeta_0\bar{\zeta}_0)/(\bar{\zeta}_0^3(\bar{\zeta}_0 + 2i)) + 3\zeta_0^2/\bar{\zeta}_0^2 + 3\varkappa]\},$$

где

$$\zeta_0 = (z - ia + \sqrt{z_0^2 - 6iaz_0 + 3a^2})/2a,$$

причем $\sqrt{z_0^2 - 6i\,az_0 + 3a^2}/z_0 \to 1$ при $|z_0| \to \infty$.

Взаимодействие между краевой прямолинейной трещиной и круговым отверстием. Пусть в растягиваемой на бесконечности полуплоскости имеется краевая произвольно ориентированная трещина и круговое отверстие (рис. 3.46; при $\alpha = \pi/2$ центр отверстия находится на линии трещины). Край полуплоскости, берега трещины и контур отверстия свободны от нагрузки. Значения КИН, полученные методом СИУ [89, 90], приведены в табл. 3.33. Данные по КИН для случая эллиптического отверстия



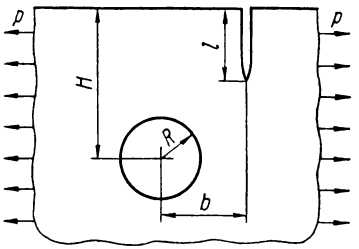


Рис. 3.46. Краевая произвольно ориентированная прямолинейная трещина и круговое отверстие в полуплоскости.

Рис. 3.47. Растяжение полуплоскости с краевой трещиной и произвольно размещенным круговым отверстием.

Таблица 3.33. **Значения КИН для взаимодействующей с круговым отверстием краевой произвольно ориентированной прямолинейной трещины при $H = 6R$ [89, 90]**

α	l/R = 0,5		1,0		1,5		2,0	
	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi l}}$
$\pi/12$	0,23	0,22	0,23	0,23	0,25	0,23	0,26	0,24
$\pi/6$	0,453	0,325	0,474	0,339	0,488	0,346	0,502	0,354
$\pi/4$	0,700	0,361	0,728	0,361	0,757	0,368	0,778	0,389
$\pi/3$	0,912	0,304	0,948	0,304	0,990	0,304	1,04	0,325
$5\pi/12$	1,061	0,170	1,10	0,170	1,15	0,170	1,24	0,184
$\pi/2$	1,12	0	1,15	0	1,20	0	1,32	0

и прямолинейной трещины, выходящей под прямым углом на край полуплоскости, имеются также в работе [78].

В случае, когда трещина выходит на край полуплоскости под прямым углом и центр кругового отверстия не находится на линии трещины (рис. 3.47), задача решена методом СИУ в работе [91]. Значения КИН приведены в табл. 3.34.

Таблица 3.34. **Значения КИН при растяжении полуплоскости с краевой трещиной и произвольно размещенным круговым отверстием для $R/l = 1$ [91]**

b/l	$H/l = 3{,}75$		$H/l = 4{,}25$	
	$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	$K_{II}/(p\sqrt{\pi l})$	$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	$K_{II}/(p\sqrt{\pi l})$
0	1,436	0	1,284	0
0,5	1,429	—0,576	1,290	—0,478
1,0	1,401	—0,546	1,298	—0,606
1,5	1,351	—0,140	1,292	—0,413
2,0	1,296	0,235	1,272	0,021
2,5	1,249	0,453	1,246	0,123
3,0	1,214	0,541	1,222	0,280
4,0	1,170	0,513	1,184	0,382
5,0	1,145	0,389	1,158	0,342
6,0	1,129	0,266	1,141	0,261

Взаимодействие между краевым полуэллиптическим надрезом и внутренней трещиной в полуплоскости. Полуплоскость с краевым полуэллиптическим надрезом и размещенной на оси симметрии внутренней трещиной растягивается на бесконечности усилиями p. Край полуплоскости, граница выреза и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 3.48). Значения КИН K_I ($K_{II} = 0$), полученные методом массовых сил [31, 78], приведены в табл. 3.35.

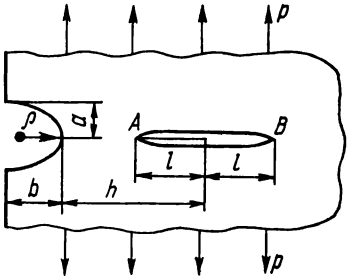


Рис. 3.48. Краевой полуэллиптический надрез и внутренняя трещина в полуплоскости.

Таблица 3.35. **Значения КИН K_I для внутренней трещины в полуплоскости с краевым полуэллиптическим надрезом [31]**

$\frac{l}{\rho}$	$\frac{b}{a}$	$h/l = 0{,}1$		$h/l = 0{,}2$		$h/l = 0{,}4$	
		$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi l}}$
0,1	0,5	1,036	1,029	1,159	1,113	1,466	1,304
	1,0	1,266	1,229	1,650	1,530	2,232	1,944
	2,0	2,014	1,924	2,820	2,587	3,859	3,358
0,5	0,5	1,003	1,003	1,013	1,010	1,075	1,040
	1,0	1,070	1,048	1,014	1,011	1,305	1,163
	2,0	1,145	1,123	1,417	1,323	2,055	1,697

Взаимодействие между внутренней прямолинейной трещиной и круговым отверстием в полуплоскости. Пусть полуплоскость ослаблена круговым отверстием и внутренней прямолинейной трещиной произвольной

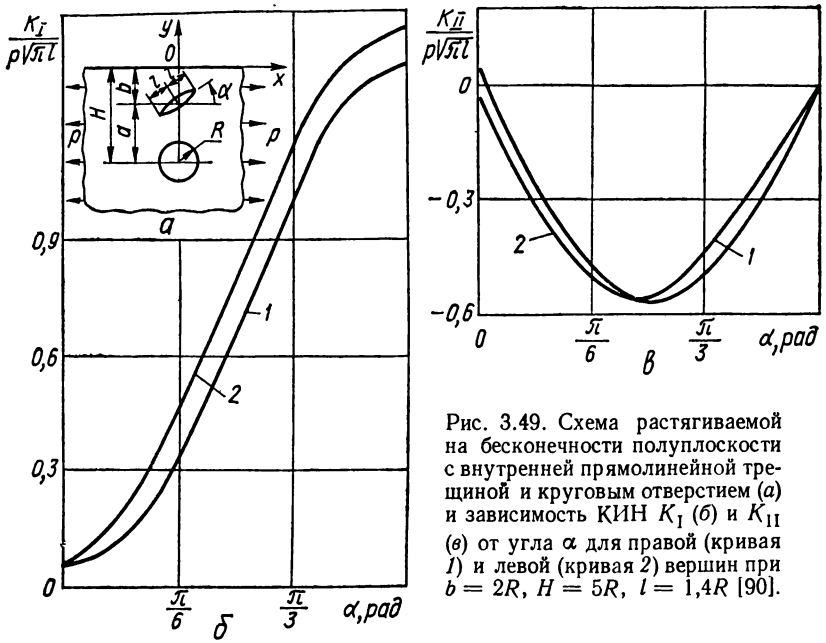


Рис. 3.49. Схема растягиваемой на бесконечности полуплоскости с внутренней прямолинейной трещиной и круговым отверстием (*а*) и зависимость КИН K_I (*б*) и K_{II} (*в*) от угла α для правой (кривая *1*) и левой (кривая *2*) вершин при $b = 2R$, $H = 5R$, $l = 1{,}4R$ [90].

Таблица 3.36. **Значения КИН для трещины, исходящей из вершины угла в полуплоскости со ступенькой [93]**

$\gamma = \pi/18$			$\gamma = \pi/6$		
$\frac{a}{l}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{a}{l}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi l}}$
0,898	1,304	0,048	0,938	1,335	0,067
0,816	1,293	0,046	0,776	1,303	0,057
0,657	1,269	0,042	0,517	1,249	0,039
0,542	1,249	0,037	0,250	1,187	0,020
0,237	1,184	0,019	0,114	1,152	0,009
0,002	1,122	0,000	0,001	1,122	0,000

$\gamma = \pi/3$			$\gamma = \pi/2$		
$\frac{a}{l}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{a}{l}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi l}}$
0,927	1,332	0,064	0,802	1,308	0,056
0,749	1,298	0,053	0,605	1,268	0,044
0,518	1,249	0,038	0,413	1,223	0,031
0,349	1,211	0,027	0,196	1,173	0,015
0,139	1,159	0,011	0,116	1,153	0,009
0,000	1,122	0,000	0,000	1,122	0,000

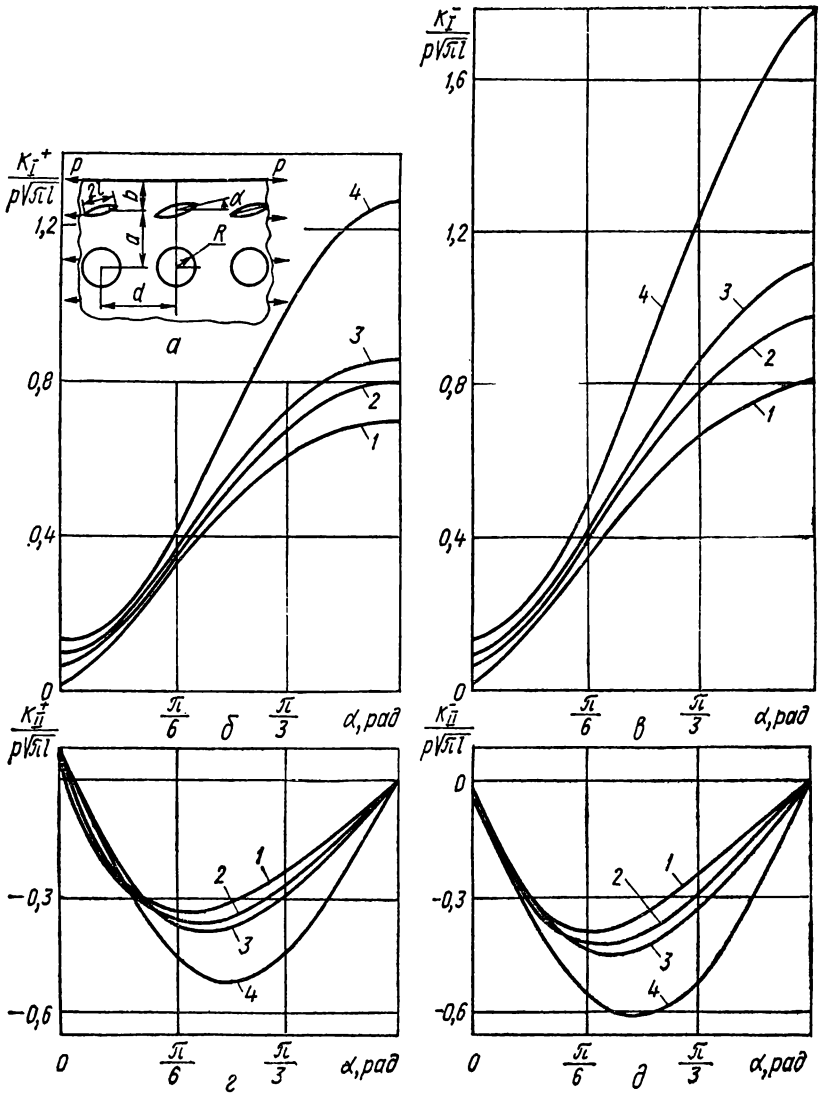
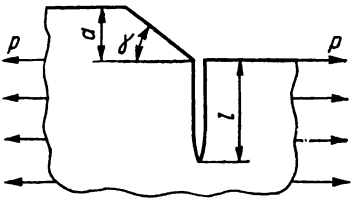


Рис. 3.50. Схема периодической системы отверстий и трещин в растягиваемой на бесконечности полуплоскости (*а*) и зависимость КИН K_I (*б*, *в*) и K_{II} (*г*, *д*) от угла α для правой (*б*, *г*) и левой (*в*, *д*) вершин при $l/R = 1$; $a/R = 2{,}25$; $b/R = 2{,}25$:

1 — $d/R = 3$; *2* — $d/R = 4$; *3* — $d/R = 5$; *4* — $d/R = 90$ [92].

ориентации. Центры трещины и отверстия находятся на прямой, перпендикулярной краю полуплоскости. Полуплоскость находится под действием растягивающих усилий на бесконечности, а ее край, берега трещины и контур отверстия свободны от нагрузки (рис. 3.49, *а*). Задача решена методом СИУ в работе [90]. Результаты расчета приведены на рис. 3.49, *б*, *в*.

Периодическая система отверстий и трещин в полуплоскости. Растягиваемая на бесконечности полуплоскость содержит периодическую си-



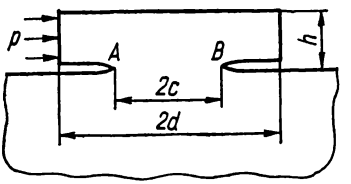


Рис. 3.51. Растяжение полуплоскости со ступенькой и выходящей из вершины угла трещиной.

Рис. 3.52. Полоса конечной длины, сцепленная с полуплоскостью из того же материала.

стему круговых отверстий и внутренних прямолинейных трещин произвольной ориентации. Центры трещины и отверстия в полосе периодов находятся на прямой, перпендикулярной краю полуплоскости. Берега трещин, контуры отверстий и край полуплоскости свободны от нагрузки (рис. 3.50, *а*). Зависимости КИН, полученные методом СИУ [92], от угла ориентации трещин α приведены на рис. 3.50, *б*, *в*, *г*, *д*.

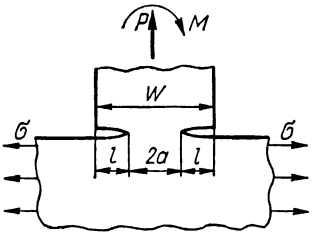


Рис. 3.53. Полубесконечная полоса, сцепленная на торце с полуплоскостью.

Трещина, исходящая из вершины угла в полуплоскости со ступенькой. Пусть полуплоскость со ступенькой и краевой трещиной, исходящей из вершины угла перпендикулярно границе полуплоскости, растягивается на бесконечности усилиями p. Берега трещины и край полуплоскости свободны от нагрузки (рис. 3.51). Значения КИН, полученные методом конформного отображения [93], приведены в табл. 3.36.

Трещины на линии соединения полосы конечной длины с полуплоскостью. Нижняя грань полосы конечной длины на среднем участке сцеплена с полуплоскостью из того же материала. По левой грани полосы приложены равномерно распределенные нормальные усилия, а остальная часть границы свободна от нагрузки (рис. 3.52). В работе [94] получено решение этой задачи методом СИУ; численные значения КИН приведены в табл. 3.37.

Трещины на линии соединения полубесконечной полосы с полуплоскостью. Полубесконечная полоса на среднем участке торцевой грани сцеплена с полуплоскостью из того же материала. Полоса на бесконечности нагружена растягивающей силой P и изгибающим моментом M, а полуплоскость на бесконечности растягивается усилиями σ. Край полуплоскости, грани полосы и берега трещин свободны от нагрузки (рис. 3.53). Значения КИН, полученные в работе [95] методом конформного отображения, приведены в табл. 3.38.

Таблица 3.37. Значения КИН для трещин между полосой конечной длины и сцепленной с ней полуплоскостью [94]

$\frac{c}{h}$	$\frac{d}{c}$	$\frac{K_{II}(A)}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_{II}(B)}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_{I}(A)}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_{I}(B)}{p\sqrt{\pi c}}$
0,5	1,25	0,648	0,458	1,349	—1,309
1,0	1,25	0,3671	0,1881	0,3979	—0,3253
	1,50	0,3845	0,1979	0,3896	—0,3205
	2,00	0,3872	0,1997	0,3895	—0,3204
	3,00	0,3872	0,1997	0,3895	—0,3204
2,0	1,25	0,232	0,066	0,188	—0,076
3,0	1,25	0,185	0,033	0,145	—0,033

Таблица 3.38. Значения КИН для левой трещины между полубесконечной полосой и сцепленной с ней полуплоскостью [95]

$\frac{l}{W}$	Растяжение полуполосы		Изгиб полуполосы		Растяжение полуплоскости	
	$\frac{2\sqrt{a}\,K_I}{P\sqrt{\pi}}$	$\frac{2\sqrt{a}\,K_{II}}{P\sqrt{\pi}}$	$\frac{2a\sqrt{a}\,K_I}{3M\sqrt{\pi}}$	$\frac{2a\sqrt{a}\,K_{II}}{3M\sqrt{\pi}}$	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$
0,500	$2/\pi$	0	$4/3\pi$	0	0	0,250
0,484	0,637	0,005	0,424	0,000	0,000	0,250
0,444	0,636	0,016	0,424	0,000	0,000	0,249
0,400	0,633	0,029	0,424	0,001	0,000	0,247
0,354	0,629	0,043	0,424	0,002	0,001	0,244
0,308	0,623	0,056	0,423	0,004	0,002	0,239
0,256	0,614	0,071	0,421	0,008	0,006	0,231
0,202	0,601	0,087	0,417	0,015	0,012	0,221
0,148	0,583	0,103	0,409	0,025	0,022	0,207
0,094	0,557	0,119	0,392	0,039	0,041	0,188
0,048	0,521	0,132	0,364	0,057	0,068	0,163
0,023	0,486	0,141	0,333	0,070	0,097	0,142
0,014	0,464	0,142	0,314	0,074	0,111	0,131
0,004	0,421	0,143	0,276	0,082	0,142	0,112

3.6. Бесконечная полоса с краевой трещиной

Растяжение полосы с трещиной. Полоса растягивается на бесконечности усилиями p, а ее грани и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 3.54). Ниже приведены значения КИН, полученные методом СИУ в работе [96]:

l/L	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	1,12	1,14	1,19	1,26	1,37	1,50	1,66	1,86	2,11	2,43
l/L	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	2,83	3,34	4,03	4,99	6,38	8,46	12,0	18,6	34,8	102

Данные по КИН приведены также в работах [1, 2, 17, 27, 32, 97—104]. На основе численных результатов, полученных методом граничной коллокации [97], построена аппроксимационная формула [105]

$$K_I = p\sqrt{\pi l}\,[1{,}12 - 0{,}231\,(l/L) + 10{,}55\,(l/L)^2 - 21{,}72\,(l/L)^3 + 30{,}39\,(l/L)^4],$$

относительная погрешность которой не превышает 0,5 % при $0 \leqslant l/L \leqslant 0{,}6$.

В работе [17] также приведены аппроксимационные формулы

$$K_I = p\sqrt{\pi l}\,[0{,}265\,(1 - l/L)^4 + (0{,}857 + 0{,}265 l/L)/(1 - l/L)^{3/2}],$$

$$K_I = p\sqrt{2L\,\mathrm{tg}\,(\pi l/(2L))}\,[0{,}752 + 2{,}02\,(l/L) + 0{,}37\,(1 - \sin(\pi l/(2L)))^3]/\cos(\pi l/(2L)),$$

относительные погрешности которых меньше 1 % при всех $0 \leqslant l/L \leqslant 1$, причем для первой формулы при $0{,}2 \leqslant l/L \leqslant 1$ эта погрешность не превышает 0,5 %. Известны и другие аппроксимационные формулы [99, 106—108].

Асимптотические решения для рассматриваемого случая имеют вид [32]

$$K_I = p\,[(L + 2l)\sqrt{\pi l L}/(L - l)^{3/2}]\,f\,(l/L),$$

где

$$f\,(l/L) = 1{,}122\,[1 - (^7/_2)\,(l/L) + O\,(l^2/L^2)] \text{ при } l/L \to 0,$$

$$f\,(l/L) = 3{,}374\,[1 + 0{,}431\,(l - l/L) + 0{,}294\,(1 - l/L)^2 + O((1 - l/L)^3)] \text{ при } l/L \to 1.$$

Приведенные выше результаты пригодны при растяжении полосы силами F, действующими вдоль средней линии полосы (при этом $p = F/L$). При растяжении полосы с эксцентриситетом значения КИН можно получить путем суперпозиции результатов для осевого растяжения и чистого изгиба.

КИН для произвольно ориентированной краевой трещины в растягиваемой на бесконечности полосе приведены в работе [18]. Случай ортотропной полосы с краевой трещиной рассмотрен в работах [104, 109, 110].

Чистый изгиб полосы с трещиной. Полоса на бесконечности изгибается моментами M или же находится под действием линейно распределенных по толщине растягивающих (сжимающих) усилий, равных $\pm\sigma = \pm 6\,M/L^2$ на гранях полосы. Грани полосы и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 3.55). Ниже приведены значения КИН, полученные методом СИУ в работе [96]:

l/L	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
$K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$	1,12	1,07	1,04	1,04	1,05	1,08	1,13	1,18	1,27	1,36
l/L		0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90
$K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$		1,50	1,67	1,92	2,25	2,73	3,46	4,68	6,97	12,4

Данные по КИН имеются также в работах [1, 2, 7, 17, 32, 59, 98, 99, 103, 104, 111, 112]. На основе численных результатов, полученных методом граничной коллокации [111], построена аппроксимационная формула [105]

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l}\,[1{,}122 - 1{,}40\,(l/L) + 7{,}33\,(l/L)^2 - 13{,}08\,(l/L)^3 + 14{,}0\,(l/L)^4],$$

относительная погрешность которой не превышает 0,2 % при $0 \leqslant l/L \leqslant 0{,}6$.

В работе [17] приведена аппроксимационная формула

$$K_I = \sigma \sqrt{2L \operatorname{tg}(\pi l/(2L))}\,[0{,}923 + 0{,}199\,(1 - \sin(\pi l/(2L)))^4]/\cos(\pi l/(2L)),$$

относительная ошибка которой меньше 0,5 % для всех значений $0 \leqslant l/L \leqslant 1$. Другие приближенные формулы для КИН имеются в работах [99, 107, 108, 113].

Асимптотические разложения K_I имеют вид [32]

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l}(L/(L-l))^{3/2} f(l/L),$$

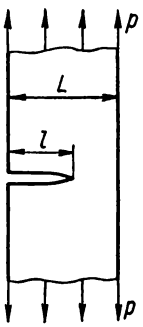
где

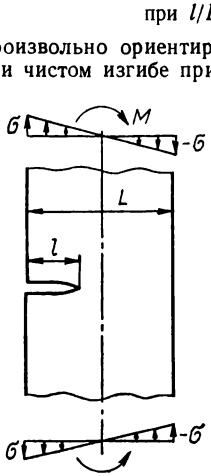
$$f(l/L) = 1{,}122\,[1 - 2{,}717\,(l/L) + O(l^2/L^2)] \text{ при } l/L \to 0,$$

$$f(l/L) = 0{,}374\,[1 + (1/2)(1 - l/L) + (3/8)(1 - l/L)^2 + O((1 - l/L)^3)]$$

при $l/L \to 1$.

КИН для произвольно ориентированной краевой трещины в бесконечной полосе при чистом изгибе приведены в работе [18].





Трехточечный изгиб полосы с трещиной. Пусть полоса со свободной от нагрузки трещиной симметрично ($K_{II} = 0$) изгибается тремя нормальными сосредоточенными силами (рис. 3.56). Задача решена методом интегральных уравнений в работах [104, 114]. Ниже при-

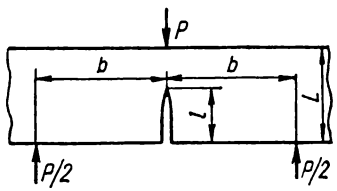


Рис. 3.54. Полоса с краевой трещиной при действии растяжения на бесконечности.

Рис. 3.55. Схема чистого изгиба полосы с краевой трещиной.

Рис. 3.56. Схема трехточечного изгиба полосы с трещиной.

ведены значения КИН $K_I/(\sigma_p \sqrt{\pi l})$ ($\sigma_p = 3Pb^2/L^2$) при $b = 2L$, полученные в работе [104]:

l/L	0,001	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$K_I/(\sigma_p\sqrt{\pi l})$	1,0738	0,9829	0,9801	1,0426	1,1758	1,4108	1,826	2,636	4,591

К рассмотренному случаю близка схема прямоугольного образца (конечной полосы) с боковой трещиной на трехточечный изгиб (см. п. 4.13)

Действие на одной из граней полосы с трещиной сосредоточенных сил. Полоса с краевой трещиной растягивается двумя сосредоточенными силами Q, приложенными в симметричных точках на ее грани. Остальная граница свободна от нагрузки (рис. 3.57). Задача решена методом СИУ в работе [104]. Ниже приведены значения КИН $K_I/(\sigma_q \sqrt{\pi l})$ ($\sigma_q = 4Q/L$) при $b = 2L$ [104]:

l/L	0,001	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$K_I/(\sigma_q\sqrt{\pi l})$	1,1203	1,0825	1,1331	1,2579	1,4734	1,8295	2,444	3,636	6,514

Изгиб полосы с трещиной под действием штампа. Бесконечная полоса с краевой симметричной трещиной ($K_{II} = 0$) одной гранью опирается в двух точках, а на другой грани действует плоский жесткий (рис. 3.58) или круглый упругий (рис. 3.59) штамп. Трение между штампом и по-

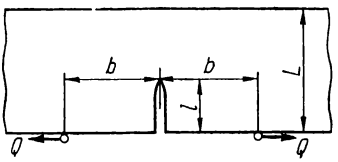


Рис. 3.57. Полоса с краевой трещиной при действии на одной ее грани сосредоточенных сил.

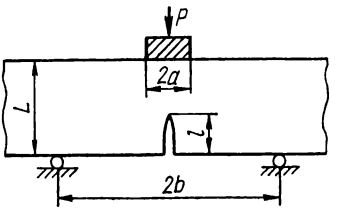


Рис. 3.58. Действие плоского жесткого штампа на полосу с краевой трещиной.

лосой отсутствует. Задачи решены методом СИУ [115], причем вторая задача решена приближенно при допущении, что зона контакта $2a$ намного меньше диаметра $2R$ штампа ($a \ll R$). Значения КИН при действии плоского штампа даны в табл. 3.39.

Таблица 3.39. **Значения КИН $K_I L/(P\sqrt{\pi l})$ при действии плоского жесткого штампа на полосу с трещиной [115]**

$a/L = 0{,}01$			$l/L = 0{,}1$		$a/L = 0{,}01$			$l/L = 0{,}1$	
l/L	$b/L = 2$	$b/L = 4$	a/L	$b/L = 2$	l/L	$b/L = 2$	$b/L = 4$	a/L	$b/L = 2$
0,01	6,345	13,00	0,01	5,883	0,50	8,448	17,44	0,25	5,681
0,10	5,883	12,17	0,05	5,876	0,60	10,92	22,42	0,30	5,570
0,20	5,867	12,20	0,10	5,856	0,70	15,77	32,12	...	...
0,30	6,243	12,99	0,15	5,819	0,80	27,40	55,51	...	...
0,40	7,041	14,61	0,20	5,762					

В табл. 3.40 даны значения КИН K_I и параметра $\lambda = RP/(a^2\beta_3)$ при действии упругого штампа для $b/L = 4$ в трех случаях: жесткий штамп ($\beta_2 = 1$), материалы штампа и полосы одинаковы ($\beta_2 = 0{,}5$), мягкий штамп ($\beta_2 = 5 \cdot 10^{-5}$). Здесь $\beta_2 = (\varkappa + 1)\, G_s/[(\varkappa + 1)\, G_s + (\varkappa_s + 1)\, G]$, $\beta_3 = 4GG_s/[(\varkappa + 1)\, G_s + (\varkappa_s + 1)\, G]$, G — модуль сдвига полосы; $\varkappa = 3 - 4\mu$ — для плоской деформации и $\varkappa = (3 - \mu)/(1 + \mu)$ — для плоского напряженного состояния, где μ — коэффициент Пуассона для полосы; G_s и $\varkappa_s$ — соответствующие упругие постоянные для штампа.

Действие произвольной нормальной нагрузки на берегах краевой трещины. Пусть к берегам трещины симметрично ($K_{II} = 0$) приложена про-

Таблица 3.40. **Значения КИН K_I и параметра λ при действии упругого круглого штампа на полосу с трещиной для $b/L = 4$ [115]**

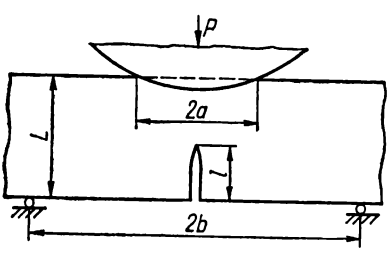
$\beta_3 = 1{,}0$				$\beta_3 = 0{,}5$				$\beta_3 = 5{,}0 \cdot 10^{-6}$			
$\frac{l}{L}$	$\frac{a}{L}$	$\frac{K_I L}{P\sqrt{\pi l}}$	$\frac{10^4 \lambda a^2}{L^2}$	$\frac{l}{L}$	$\frac{a}{L}$	$\frac{K_I L}{P\sqrt{\pi l}}$	$\frac{10^4 \lambda a^2}{L^2}$	$\frac{l}{L}$	$\frac{a}{L}$	$\frac{K_I L}{P\sqrt{\pi l}}$	$\frac{10^4 \lambda a^2}{L^2}$
0,1	0,01	12,17	1,567	0,1	0,01	12,17	1,569	0,1	0,10	12,16	157,1
0,1	0,03	12,17	13,87	0,1	0,03	12,17	14,00	0,1	0,50	11,88	3,926
0,1	0,05	12,17	37,25	0,1	0,10	12,16	141,8	0,1	1,0	11,27	15,690
0,1	0,10	12,16	129,2	0,1	0,20	12,12	440,3	0,5	0,10	17,42	157,1
0,1	0,15	12,14	238,3	0,5	0,03	17,44	13,29	0,5	0,50	16,94	3,923
0,5	0,01	17,44	1,549	0,5	0,05	17,44	33,38	0,5	1,0	16,05	15,660
0,5	0,03	17,44	12,54	0,5	0,10	17,42	92,81	...	...	...	...
0,5	0,05	17,44	29,02	0,5	0,20	17,34	175,9	...	...	...	...
0,7	0,01	32,11	1,469	0,7	0,03	32,11	10,80	...	...	...	...
...	...	...	...	0,7	0,05	32,09	21,27	...	...	...	...
...	...	...	...	0,7	0,10	32,03	37,07	...	...	...	...

извольная нагрузка, а на бесконечности и на гранях полосы напряжения отсутствуют (рис. 3.60). В работах [15, 98] методом СИУ получена формула для КИН

$$K_I = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l w(t)\, p(t)\, dt, \tag{3.13}$$

где весовая функция $w(t)$ аппроксимируется выражением

$$w(t) = [1 + m_1 (t/l) + m_2 (t/l)^2]/\sqrt{t}, \tag{3.14}$$



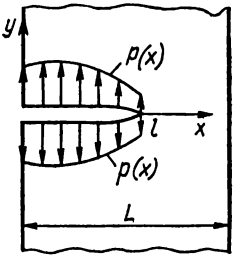


Рис. 3.59. Действие упругого круглого штампа на полосу с краевой трещиной.

Рис. 3.60. Полоса с краевой трещиной при действии произвольной нормальной нагрузки на ее берегах.

коэффициенты m_1 и m_2 являются функциями только параметра l/L и в интервале $0 \leqslant l/L \leqslant 0{,}5$ равны: $m_1 = 0{,}6147 + 17{,}1844\,(l/L)^2 + 8{,}7822\,(l/L)^4$, $m_2 = 0{,}2502 + 3{,}2889\,(l/L)^2 + 70{,}0444\,(l/L)^4$. Относительная погрешность аппроксимационной формулы в указанном интервале не превышает 1 %.

Если же на части берегов трещины действуют постоянные усилия (рис. 3.61), то из формул (3.13) и (3.14) получим [116]

$$K_I = 2\sigma\,(2l/\pi)\,(1 - b/l)^{1/2}\,[1 + m_1\,(1 - b/l)/3 + m_2\,(1 - b/l)^2/5].$$

Приближенные формулы для КИН при действии на берегах краевой трещины произвольной нагрузки имеются также в работах [96, 116, 117].

В работах [103, 118, 119] приведены данные для КИН, когда на берегах трещины действуют растягивающие сосредоточенные силы (рис. 3.62). Для этого же случая известна приближенная формула, построенная путем асимптотического интерполирования [17],

$$K_I = (2P/\sqrt{\pi l})\,\{3{,}52\,(1 - c/l)/(1 - l/L)^{3/2} - (4{,}35 - 5{,}28c/l)/(1 - l/L)^{1/2} + \\ + [(1{,}30 - 0{,}30\,(c/l)^{3/2})/\sqrt{1 - (c/l)^2} + \\ + 0{,}83 - 1{,}76c/l]\,[1 - (1 - c/l)\,l/L]\}.$$

Отсюда при $c = 0$ следует результат для случая, когда силы приложены в точках трещины, находящихся на краю полосы [17],

$$K_I = (2P/\sqrt{\pi l})\,[3{,}52/(1 - l/L)^{3/2} - 4{,}35/(1 - l/L)^{1/2} + 2{,}13\,(1 - l/L)].$$

В последнем случае (см. рис. 3.62; $c = 0$) получено решение задачи методом СИУ [99]. Ниже приведены соответствующие значения КИН $K_I\sqrt{L/\pi}\,/\,(2P) = F_I$:

l/L	0,025	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
F_I	2,610	1,846	1,460	1,365	1,375	1,454	1,571	1,756	1,997	2,298

l/L	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
F_I	2,683	3,181	3,845	4,763	6,100	8,168	11,652	18,314	34,420	95,441

В работе [99] на основе этих данных для КИН построены аппроксимационные формулы.

Действие касательных усилий на берегах трещины. Пусть на берегах трещины действуют постоянные сдвигающие усилия τ, а на бесконечности и на гранях полосы нагрузка отсутствует (рис. 3.63). КИН K_{II} определяется по приближенной формуле [17]

$$K_{II} = \tau\sqrt{\pi l}\,[1{,}122 - 0{,}561\,(l/L) + 0{,}085\,(l/L)^2 + 0{,}180\,(l/L)^3]/\sqrt{1 - l/L},$$

относительная погрешность которой меньше 2 % при всех $0 \leqslant l/L \leqslant 1$.

В работе [118] методом СИУ получено решение задачи, когда сдвигающая нагрузка на берегах трещины постоянна или распределена по линейному закону. Ниже приведены значения КИН для случая постоянной сдвигающей нагрузки τ на трещине:

l/L	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$K_{II}/(\tau\sqrt{\pi l})$	1,121	1,126	1,141	1,176	1,238	1,344	1,522	1,845	2,607

Если же к берегам трещины приложены сосредоточенные сдвигающие силы Q в точках выхода трещины на край полосы (рис. 3.64), то [17]

$$K_{II} = (2Q/\sqrt{\pi l})\,[1{,}30 - 0{,}65\,(l/L) + 0{,}37\,(l/L)^2 + 0{,}28\,(l/L)^3]/\sqrt{1 - l/L}.$$

Эта аппроксимационная формула имеет относительную погрешность, не превышающую 1 % при всех $0 \leqslant l/L \leqslant 1$.

Более общий случай, когда сосредоточенные сдвигающие силы действуют на берегах трещины в произвольной точке, рассмотрен в работе [118].

Краевая трещина в полосе с жестко защемленной гранью. Пусть одна грань полосы свободна от нагрузки, а другая жестко защемлена. Прямо-

линейная трещина, находящаяся под действием постоянного давления, выходит на одну из граней (рис. 3.65, *а* или 3.66, *а*). Задача решена методом СИУ в работе [120]. Зависимости КИН от геометрических параметров приведены на рис. 3.65, *б* и 3.66, *б*.

Трещина, исходящая из вершины угла в полосе со ступенькой. Пусть полоса со ступенькой и краевой трещиной, исходящей из вершины угла

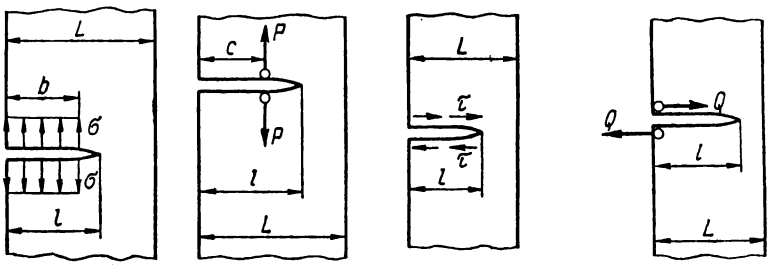


Рис. 3.61. Действие кусочно-постоянной нормальной нагрузки на берегах краевой трещины.

Рис. 3.62. Действие нормальных сосредоточенных сил на берегах краевой трещины в полосе.

Рис. 3.63. Постоянная сдвигающая нагрузка на берегах краевой трещины в полосе.

Рис. 3.64. Действие сосредоточенных сдвигающих сил на берегах трещины в точках ее выхода на край полосы.

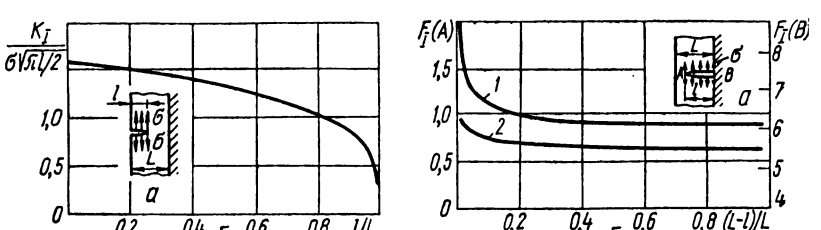


Рис. 3.65. Схема полосы с жестко защемленной гранью и трещиной под давлением, выходящей на свободную от нагрузки грань (*а*), и зависимость КИН от относительной длины трещины при $\varkappa = 2$ (*б*) [120].

Рис. 3.66. Схема трещины под давлением, выходящей на жестко защемленную грань полосы (*а*), и зависимость КИН $K_I(A)/(\sigma\sqrt{\pi l/2}) = F_I(A)$ (*1*) и $K_I(B)/(\sigma\sqrt{\pi}(l/2)^{\alpha}) = F_I(B)$ (*2*) от параметра $(L-l)/L$ при $\varkappa = 2$ ($\alpha = 0{,}255251$, $F_I(B) = 7{,}872$ при $l = L$) (*б*) [120].

перпендикулярно граням полосы, растягивается и изгибается на бесконечности силой P и моментом M. Берега трещины и грани полосы свободны от нагрузки (рис. 3.67). Задача решена методом конформного отображения в работе [121]. Значения КИН приведены в табл. 3.41 и 3.42.

Полубесконечная полоса с краевой трещиной. Пусть на торцевую кромку полубесконечной полосы симметрично выходит прямолинейная трещина. Берега трещины загружены растягивающими сосредоточенными

Таблица 3.41. Значения безразмерных КИН $F_I + iF_{II} = (L_2 - l)^{3/2} \times (K_I + iK_{II}) / (L_2 P\sqrt{\pi})$ при растяжении полосы со ступенькой и трещиной [121]

l/L_2	L_1/L_2					
	1,0	4/3	2,0	4,0	∞	
	F_I	F_I	F_I	F_I	F_I	F_{II}
0,05	0,236	0,261	0,271	0,271	0,286	0,008
0,10	0,321	0,341	0,346	0,347	0,350	0,002
0,20	0,438	0,447	0,447	0,447	0,449	0,002
0,30	0,532	0,533	0,536	0,536	0,538	0,002
0,40	0,621	0,621	0,620	0,622	0,623	0,001
0,50	0,706	0,704	0,709	0,706	0,707	0,000
0,60	0,790	0,790	0,789	0,790	0,791	0,000
0,70	0,873	0,874	0,877	0,873	0,874	0,000
0,80	0,956	0,957	0,956	0,956	0,957	0,000
0,90	1,039	1,039	1,039	1,039	1,039	0,000
1,00	1,122	1,122	1,122	1,122	1,122	0,000

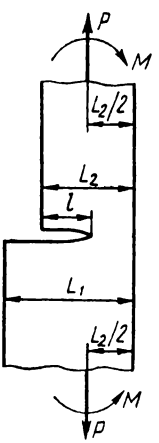
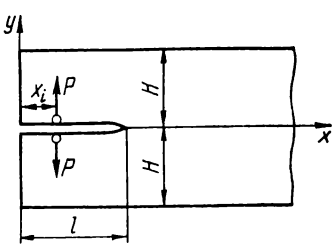


Рис. 3.67. Растяжение и изгиб полосы со ступенькой и трещиной.

Рис. 3.68. Действие сосредоточенных сил на берегах краевой трещины в полубесконечной полосе.



силами, а боковые грани и торец полосы свободны от нагрузки (рис. 3.68). Задача решена методом СИУ в работе [122]. В табл. 3.43 приведены численные значения КИН K_I, а также функции Грина $G(x_i)$, позволяющей находить КИН при произвольном нагружении трещины симметричной нормальной нагрузкой. Если на берегах трещины заданы напряжения $\sigma_y^{\pm} = -p(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$, то КИН определяется по формуле

$$K_1 = \sum_{i=1}^{n} G(x_i)\, p(x_i).$$

Расклинивание полубесконечной полосы. Берега краевой трещины, выходящей на торцевую кромку полубесконечной полосы, раскрываются

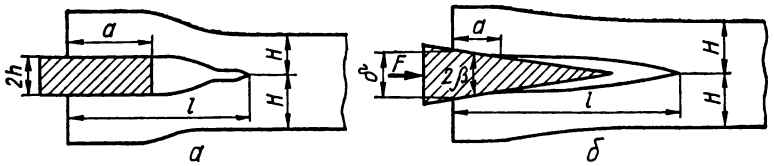


Рис. 3.69. Расклинивание полубесконечной полосы клином прямоугольной (*а*) или треугольной (*б*) формы.

Таблица 3.42. **Значения безразмерных КИН $F_I + iF_{II} = (L_2 - l)^{3/2} \times$ $\times (K_I + iK_{II})/(6M\sqrt{\pi})$ при изгибе полосы со ступенькой и трещиной [121]**

$\frac{l}{L_2}$	L_1/L_2								
	1,0	4/3		2,0		4,0		∞	
	F_I	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
0,05	0,222	0,296	0,047	0,307	0,063	0,308	0,067	0,307	0,067
0,10	0,283	0,326	0,037	0,333	0,051	0,333	0,054	0,333	0,054
0,20	0,338	0,355	0,023	0,357	0,033	0,357	0,035	0,357	0,035
0,30	0,360	0,367	0,014	0,368	0,020	0,367	0,021	0,367	0,021
0,40	0,371	0,373	0,008	0,372	0,011	0,372	0,012	0,372	0,012
0,50	0,374	0,375	0,004	0,374	0,006	0,374	0,006	0,374	0,006
0,60	0,375	0,375	0,002	0,375	0,002	0,374	0,002	0,375	0,002
0,70	0,375	0,375	0,000	0,374	0,001	0,374	0,000	0,374	0,001
0,80	0,374	0,374	0,000	0,374	0,000	0,373	0,000	0,374	0,000
0,90	0,374	0,374	0,000	0,374	0,000	0,373	0,000	0,374	0,000
1,00	0,374	0,374	0,000	0,374	0,000	0,374	0,000	0,374	0,000

Таблица 3.43. **Значения КИН K_I и функции Грина $G(x_i)$ при действии сосредоточенных сил на берегах краевой трещины в полубесконечной полосе для $l = H$ [122]**

i	x_i/l	$G(x_i)/(\sqrt{\pi}l/H^{3/2})$	$K_I/(\sqrt{\pi}lP/H^{3/2})$	i	x_i/l	$G(x_i)/(\sqrt{\pi}l/H^{3/2})$	$K_I/(\sqrt{\pi}lP/H^{3/2})$
1	0,0132	0,1029	5,919	10	0,5192	0,5102	6,690
2	0,0362	0,1690	5,923	11	0,5952	0,5252	7,009
3	0,0702	0,2313	5,930	12	0,6690	0,5316	7,400
4	0,1143	0,2890	5,951	13	0,7389	0,5426	8,092
5	0,1673	0,3411	5,986	14	0,8031	0,5493	9,050
6	0,2282	0,3884	6,063	15	0,8603	0,5513	10,416
7	0,2955	0,4296	6,169	16	0,9090	0,5326	12,13
8	0,3675	0,4658	6,329	17	0,9481	0,5334	15,75
9	0,4426	0,4925	6,495	18	0,9767	0,5368	23,31
				19	0,9941	0,5237	44,95

Таблица 3.44. Значения КИН K_I и главного вектора контактных напряжений P при расклинивании полубесконечной полосы клином прямоугольной формы для $h/H = 0{,}1$ [122]

$\frac{l}{H}$	$\frac{a}{H}$	$\frac{1+\varkappa}{4GH} P \cdot 10^3$	$\frac{K_I}{P\sqrt{\pi l}/H^{3/2}}$	$\frac{l}{H}$	$\frac{a}{H}$	$\frac{1+\varkappa}{4GH} P \cdot 10^3$	$\frac{K_I}{P\sqrt{\pi l}/H^{3/2}}$
1,0	0,1	1,60	5,928	2,0	0,1	0,494	4,670
1,0	0,2	1,86	5,983	3,0	0,1	0,209	4,272
1,0	0,3	2,13	6,051	4,0	0,1	0,107	4,055
1,0	0,37	2,35	6,149				

Таблица 3.45. Значения КИН K_I, главного вектора контактных напряжений P и силы F при расклинивании полубесконечной полосы клином треугольной формы [122]

$\frac{l}{H}$	$\frac{a}{H}$	β	$\frac{\delta}{H} \cdot 10^2$	$\frac{1+\varkappa}{4GH} P \cdot 10^3$	$\frac{1+\varkappa}{4GH} F \cdot 10^3$	$\frac{K_I}{P\sqrt{\pi l}/H^{3/2}}$
1,0	0,05	0,01	0,597	1,31	2,62	5,918
1,0	0,1	0,01	1,078	2,53	5,05	5,926
1,0	0,15	0,01	1,458	3,57	7,14	5,943
1,0	0,2	0,01	1,735	4,38	8,77	5,950
1,0	0,4	0,01	2,166	5,84	11,7	6,065
1,0	0,1	0,04	4,314	1,01	80,8	5,926
2,0	0,1	0,01	2,838	2,31	4,62	4,597
3,0	0,1	0,01	5,791	2,12	4,23	4,150
4,0	0,1	0,01	9,962	1,94	3,88	3,912
5,0	0,1	0,01	15,33	1,79	3,58	3,715

вставленной между ними жесткой пластиной постоянной толщины $2h$ (рис. 3.69, *а*) или при внедрении под действием силы F абсолютно жесткого треугольного клина (рис. 3.69, *б*). Трение между клином и берегами трещины отсутствует. Задача решена методом СИУ в работе [122]. Численные значения КИН в вершине трещины K_I, силы F и главного вектора контактных напряжений P приведены в табл. 3.44 и 3.45.

3.7. Бесконечная полоса с системой краевых трещин

Растяжение полосы с двумя симметричными краевыми трещинами. Бесконечная полоса с двумя коллинеарными симметрично размещенными краевыми трещинами растягивается на бесконечности усилиями p. Берега

трещин и грани полосы свободны от нагрузки (рис. 3.70). Ниже приведены значения K_I ($K_{II} = 0$), найденные методом СИУ [1, 2]:

l/L	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	1,121	1,116	1,112	1,115	1,132	1,169

l/L	0;60	0,70	0,80	0,90	0,95
$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	1,236	1,353	1,574	2,117	2,918

Эти результаты хорошо согласуются с данными работ [101, 102], полученными методом интегральных уравнений. Численные значения КИН для рассматриваемого случая имеются также в работах [17, 18, 27, 31, 35, 109, 123—127].

В работе [32] построены асимптотические разложения КИН

$$K_I = p\sqrt{\pi l} f(l/L)/\sqrt{1 - l/L}, \tag{3.15}$$

где

$$f(l/L) = 1{,}122\,[1 - (l/L)/2] + O(l^2/L^2) \quad \text{при} \quad l/L \to 0$$

и

$$f(l/L) = 2\,[1 + (1 - l/L)/2]/\pi + O((1 - l/L)^2) \quad \text{при} \quad l/L \to 1,$$

и на их основе интерполяционная формула

$$f(l/L) = 1{,}122\,(1 - (l/L)/2) - 0{,}015 l^2/L^2 + 0{,}091 l^3/L^3. \tag{3.16}$$

Относительная погрешность последней формулы меньше 2 % при всех $0 \leqslant l/L \leqslant 1$. В работе [17] предложены модификация формулы (3.16)

$$K_I = p\sqrt{\pi l}\,[1{,}122 - 0{,}561\,(l/L) - 0{,}205\,(l/L)^2 + 0{,}471\,(l/L)^3 - 0{,}190\,(l/L)^4]/\sqrt{1 - l/L}, \tag{3.17}$$

относительная ошибка которой не превышает 0,5 % при всех $0 \leqslant l/L \leqslant 1$, а также аппроксимационная формула такой же точности

$$K_I = p\sqrt{\pi l}\,[1 + 0{,}122\cos^4(\pi l/(2L))]\sqrt{(2L/(\pi l))\operatorname{tg}(\pi l/(2L))}. \tag{3.18}$$

В работе [105] построена приближенная формула

$$K_I = p\sqrt{\pi l}\,[1{,}12 + 0{,}203\,(l/L) - 1{,}197\,(l/L)^2 + 1{,}930\,(l/L)^3] \tag{3.19}$$

с относительной погрешностью, меньшей 2 % при $0 \leqslant l/L \leqslant 0{,}7$.

Имеются также и другие аппроксимационные формулы [107, 108, 126, 128, 129]. В работе [109] приведены данные по КИН в случае ортотропной полосы.

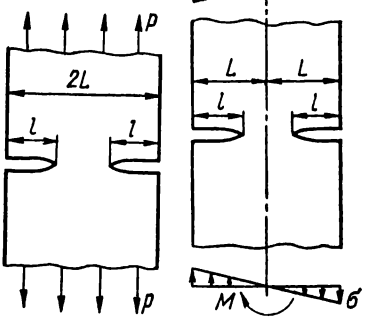


Рис. 3.70. Схема растяжения полосы с двумя симметричными краевыми трещинами.

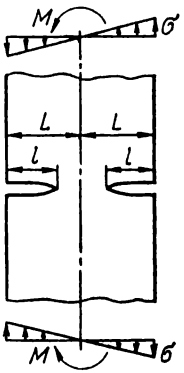


Рис. 3.71. Схема чистого изгиба полосы с двумя симметричными краевыми трещинами.

Чистый изгиб полосы с двумя симметричными краевыми трещинами. Полоса с трещинами находится под действием изгибающего момента M

на бесконечности, что соответствует также действию линейной растягивающей (сжимающей) нагрузки с равным нулю главным вектором ($\sigma = 3M/(2L^2)$) (рис. 3.71). Решение задачи получено в работе [126] методом конформного отображения. КИН представляется в виде

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l}\,(1 - l/L)^{-1/2} f\,(l/L), \tag{3.20}$$

где значения функции $f\,(l/L)$ равны:

l/L	0	0,1	0,2	0,3	0,6
$f\,(l/L)$	1,1215	0,935	0,809	0,711	0,545

На основе этих данных и известного предельного значения функции $f\,(l/L)$ при $l/L \to 1$ построена аппроксимационная формула [126]

$$f\,(l/L) = 1{,}1215 + 4{,}0185\,(l/2L) + 9{,}6365\,(l/2L)^2 - 8{,}7759\,(l/2L)^3,$$

относительная погрешность которой составляет около 1 % при $0 \leqslant l/L < 1$.

В работе [32] получены асимптотические разложения КИН K_I (3.20) при $l/L \to 0$

$$f\,(l/L) = 1{,}122\,(1 - 2{,}109 l/L) + O\,(l^2/L^2)$$

и при $l/L \to 1$

$$f\,(l/L) = (4/(3\pi))\,[1 + (1 - l/L)/2 + 3\,(1 - l/L)^2/8 + 5\,(1 - l/L)^3/16] + O\,((1 - l/L)^4)$$

и на их основе построена интерполяционная формула

$$f\,(l/L) = 4\,[1 + (1 - l/L)/2 + 3\,(1 - l/L)^2/8 + 5\,(1 - l/L)^3/16]/(3\pi) - 0{,}470\,(1 - l/L)^4 + 0{,}663\,(1 - l/L)^5,$$

относительная погрешность которой при всех $0 \leqslant l/L \leqslant 1$ не превышает 1 %.

Действие сосредоточенных сил на берегах симметричных краевых трещин в полосе. Пусть на бесконечности и на гранях полосы нагрузка

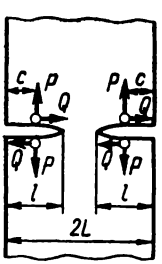


Рис. 3.72. Схема действия сосредоточенных сил на берегах симметричных краевых трещин в полосе.

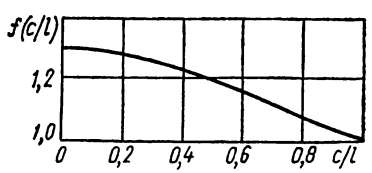


Рис. 3.73. Зависимость функции $f\,(c/l)$ от отношения c/l [17].

отсутствует, а берега трещины загружены сосредоточенными нормальными P и сдвигающими Q силами (рис. 3.72). В работе [17] с помощью асимптотической интерполяции получено соотношение

$$K_I - iK_{II} = (2\,(P - iQ)/\sqrt{2L})\,\{1 + f\,(c/l)\cos^2(\pi l/(2L))\} \times \times \sqrt{\operatorname{tg}(\pi l/(2L))}/\sqrt{1 - [\cos(\pi l/(2b))/\cos(\pi c/(2b))]^2}; \tag{3.21}$$

зависимость функции $f\,(c/l)$ от параметра c/l показана на рис. 3.73.

Таким же путем построены аппроксимационные формулы в предельном случае ($c = 0$), когда силы приложены в точках выхода трещин на край полосы [17]:

$$K_{\mathrm{I}} - iK_{\mathrm{II}} = (2(P - iQ)/\sqrt{\pi l})\,[1 + 0{,}30\cos^2(\pi l/(2L))]\,\sqrt{(\pi l/L)/\sin(\pi l/L)} \tag{3.22}$$

или

$$K_{\mathrm{I}} - iK_{\mathrm{II}} = (2(P - iQ)/\sqrt{\pi l})\,[1{,}30 - 0{,}65\,(l/L) - 0{,}10\,(l/L)^2 + 0{,}45\,(l/L)^3]/\sqrt{1 - l/L}. \tag{3.23}$$

Относительная погрешность формул (3.21) — (3.23) не превышает 2 % при всех $0 \leqslant l/L \leqslant 1$.

Из структуры соотношения (3.21) следует, что при действии на берегах трещины симметричной и антисимметричной относительно линии трещины нагрузок КИН K_{I} и K_{II} определяются приближенно по одинаковым зависимостям. В частности, если на берегах трещин действуют постоянные сдвигающие усилия τ, то K_{II} можно приближенно найти по формулам (3.15) — (3.19), в которых p следует заменить на τ.

Действие сосредоточенных сил на средней линии полосы с двумя симметричными краевыми трещинами. Пусть на бесконечности, на гранях полосы и на берегах трещин нагрузка отсутствует, а на средней линии полосы в симметричных точках приложены сосредоточенные силы (рис. 3.74). Формула для КИН, полученная асимптотической интерполяцией [17], имеет вид

$$K_{\mathrm{I}} - iK_{\mathrm{II}} = \{[1 + 0{,}122\cos^2(\pi l/(2L))]\,\{P - iQ + 2((P + iQ)/(1 + \varkappa)) \times (\pi b/(2L))\,\mathrm{cth}\,(\pi b/(2L))/[1 + [\mathrm{sh}\,(\pi b/(2L))/\mathrm{ch}\,(\pi l/(2L))]^2]\} \times \sqrt{\mathrm{tg}\,(\pi l/(2L))/\sqrt{1 + (\cos(\pi \times l/(2L))/\mathrm{sh}\,(\pi b/(2L)))^2}}\}/\sqrt{2L}.$$

Ее относительная погрешность менее 2 % при всех $0 \leqslant l/L \leqslant 1$ и $0 \leqslant b/L < \infty$.

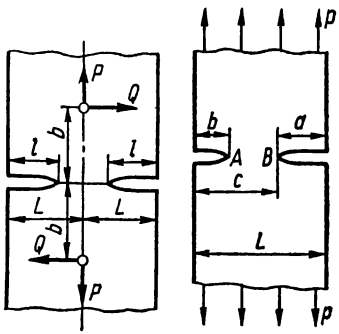


Рис. 3.74. Схема действия сосредоточенных сил на средней линии полосы с двумя симметричными краевыми трещинами.

Рис. 3.75. Схема растяжения полосы с двумя коллинеарными краевыми трещинами различной длины.

Растяжение полосы с двумя коллинеарными краевыми трещинами различной длины. Бесконечная полоса ослаблена двумя поперечными краевыми коллинеарными трещинами различной длины. Берега трещин и грани полосы свободны от нагрузки, а на бесконечности действуют растягивающие усилия p (рис. 3.75). Значения КИН K_{I} ($K_{\mathrm{II}} = 0$), полученные методом СИУ [127], показаны на рис. 3.76.

Растяжение полосы с системой параллельных краевых трещин. Пусть полоса содержит систему параллельных краевых трещин равной длины, выходящих под прямым углом на одну ее грань. Берега трещин и грани полосы свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы растягивающие усилия (рис. 3.77, *а* и 3.78, *а*). В работе [130] получены значения КИН

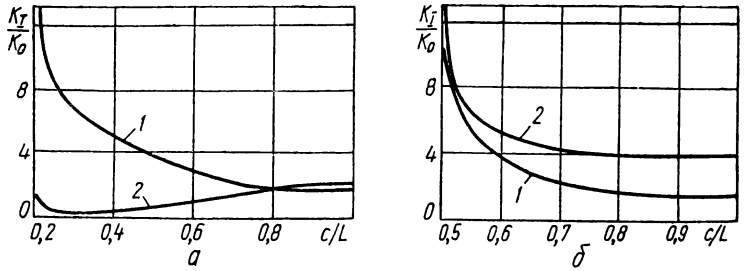


Рис. 3.76. Зависимость КИН K_I/K_0 ($K_0=p\sqrt{\pi b/2}$) от параметра c/L в вершинах B (*1*) и A (*2*) двух коллинеарных краевых трещин различной длины в полосе при растяжении на бесконечности для $b = 0{,}2L$ (*а*) и $b = 0{,}5L$ (*б*) [127].

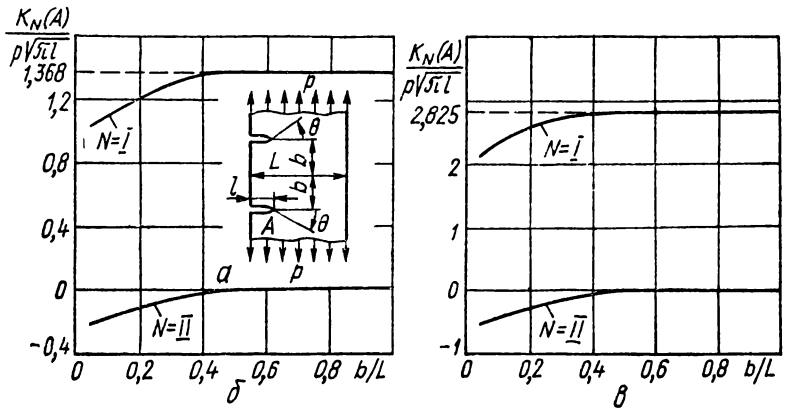
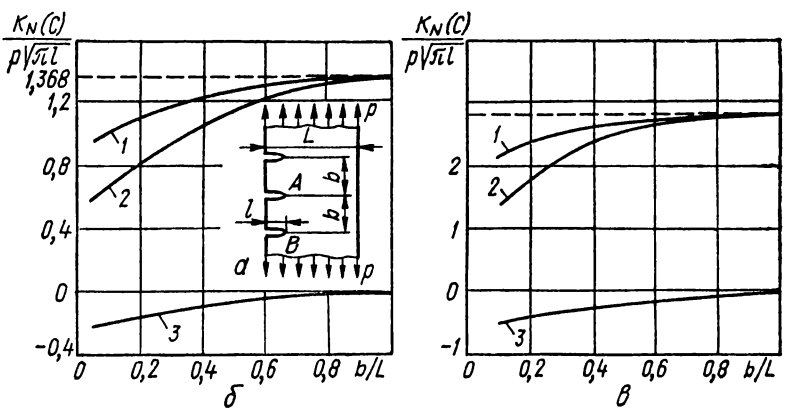


Рис. 3.77. Схема двух параллельных краевых трещин в растягиваемой полосе (*а*) и зависимость КИН от параметра b/L при $l = 0{,}2L$ (*б*) и $l = 0{,}5L$ (*в*) [130].



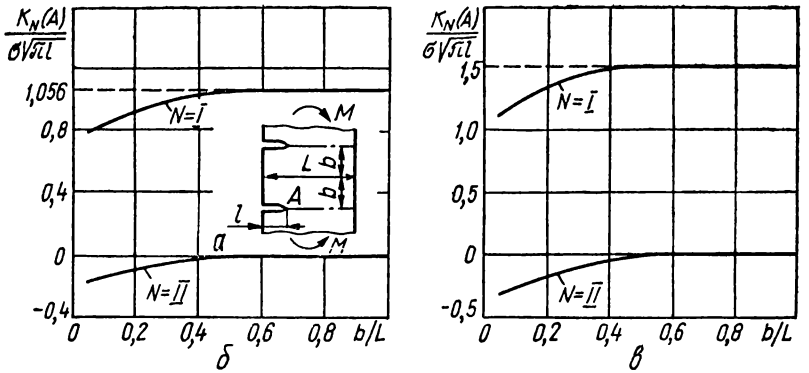


Рис. 3.79. Схема изгиба полосы с двумя параллельными краевыми трещинами (*а*) и зависимость КИН $K_N(A)/\sigma\sqrt{\pi l}$ ($N = I, II$; $\sigma = 6M/L^2$) от параметра b/L при $l = 0{,}2L$ (*б*) и $l = 0{,}5L$ (*в*) [130].

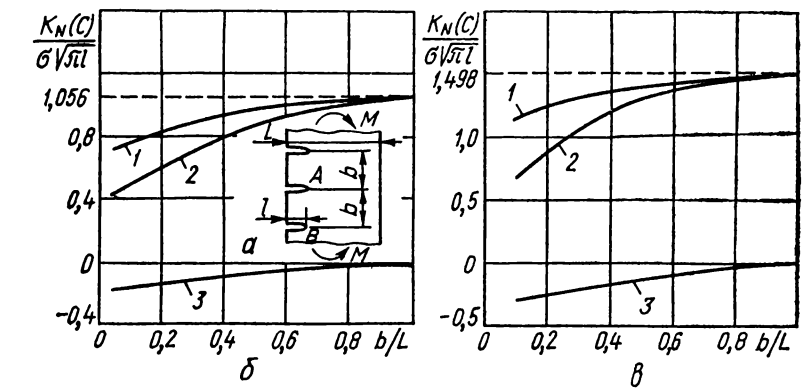


Рис. 3.80. Схема изгиба полосы с тремя параллельными краевыми трещинами (*а*) и зависимость КИН $K_N/\sigma\sqrt{\pi l}$ ($\sigma = 6M/L^2$) от параметра b/L при $l = 0{,}2L$ (*б*) и $l = 0{,}5L$ (*в*):
1 — $N = I$, $C = B$; *2* — $N = I$, $C = A$; *3* — $N = II$, $C = B$ [130].

на основе численного решения системы СИУ, когда в полосе имеется две или три трещины. Эти результаты приведены на рис. 3.77 и 3.78.

Изгиб полосы с системой параллельных краевых трещин. Бесконечная полоса ослаблена системой параллельных краевых трещин, выходящих на одну грань. Берега трещин и грани полосы свободны от нагрузки, а на бесконечности задан изгибающий момент (рис. 3.79, *а* и 3.80, *а*). Значения КИН для случаев двух и трех трещин, полученные в работе [130], приведены на рис. 3.79 и 3.80.

Рис. 3.78. Схема грех параллельных краевых трещин в растягиваемой полосе (*а*) и зависимость КИН от параметра b/L при $l = 0{,}2L$ (*б*) и $l = 0{,}5L$ (*в*):
1 — $N = I$, $C = B$; *2* — $N = I$, $C = A$; *3* — $N = II$, $C = B$ [130].

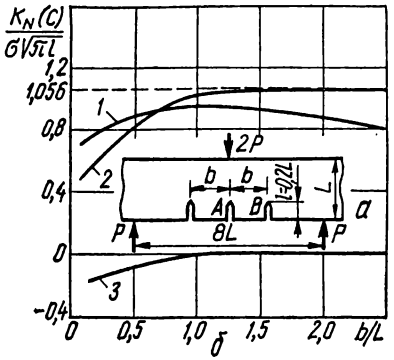


Рис. 3.81. Схема трехточечного изгиба полосы с тремя параллельными краевыми трещинами (*а*) и зависимость КИН $K_N/\sigma\sqrt{\pi l}$ ($\sigma = 24P/L$) от параметра b/L для $l = 0{,}2L$:
1 — $N = I$; $C = B$; *2* — $N = I$; $C = A$; *3* — $N = II$, $C = B$ [130].

Известны [130] также данные для КИН в случае трехточечного изгиба полосы с тремя краевыми трещинами (рис. 3.81).

Растяжение полосы с системой наклонных краевых трещин. Пусть полоса содержит три краевых трещины, выходящие на одну ее грань. Средняя трещина перпендикулярна грани, а крайние трещины одинаковой длины размещены симметрично относительно нее. Берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности действуют растягивающие усилия (рис. 3.82).

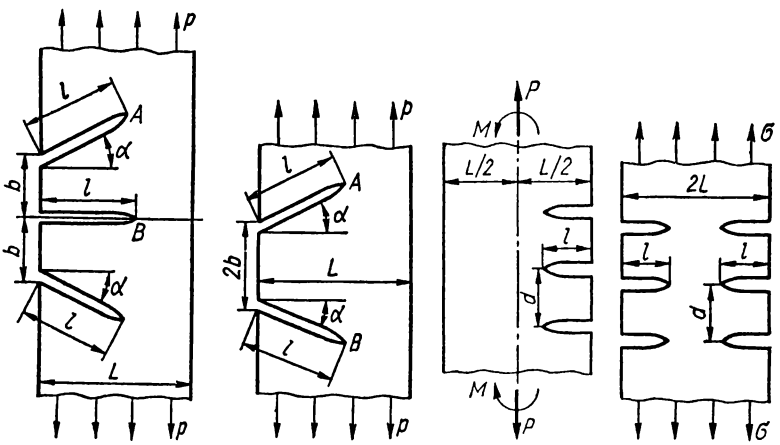


Рис. 3.82. Растяжение полосы с тремя симметричными наклонными краевыми трещинами одинаковой длины.

Рис. 3.83. Растяжение полосы с двумя симметричными наклонными краевыми трещинами.

Рис. 3.84. Полоса с периодической системой односторонних краевых трещин при осевом растяжении и чистом изгибе.

Рис. 3.85. Схема растяжения полосы с периодической системой двухсторонних краевых трещин.

Решение задачи получено методом СИУ в работе [131]. Значения КИН для случаев трех (рис. 3.82) и двух (рис. 3.83) трещин приведены в табл. 3.46 и 3.47.

Осевое растяжение полосы с периодической системой односторонних краевых трещин. Полоса, ослабленная бесконечным рядом краевых тре-

Таблица 3.46. **Значения КИН при растяжении полосы с тремя симметричными наклонными краевыми трещинами одинаковой длины при $b/L = 0{,}2$ [131]**

α	$\frac{l}{L}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	α	$\frac{l}{L}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}(B)}{p\sqrt{\pi l}}$
0	0,01	1,1100	1,1149	0,0005	$\frac{\pi}{12}$	0,01	1,1112	1,0625	0,1727
	0,11	0,7923	0,9849	—0,1080		0,11	0,8566	0,9815	0,0745
	0,21	0,8311	1,1134	—0,1740		0,21	0,9466	1,1265	0,0388
	0,31	0,9929	1,3656	—0,2398		0,31	1,1886	1,3947	0,0283
	0,41	1,2902	1,7747	—0,3251		0,41	1,6102	1,8251	0,0355
	0,51	1,8205	2,4480	—0,4452		0,51	2,3360	2,5372	0,0764
$\frac{\pi}{36}$	0,01	1,1102	1,1091	0,0592	$\frac{\pi}{6}$	0,01	1,1136	0,9145	0,3049
	0,11	0,8089	0,9987	—0,0485		0,11	0,9488	0,8573	0,2227
	0,21	0,8618	1,1394	—0,1031		0,21	1,0913	0,9707	0,2113
	0,31	1,0481	1,4080	—0,1462		0,31	1,3933	1,1781	0,2393
	0,41	1,3874	1,8432	—0,1950		0,41	1,8832	1,5011	0,3059
	0,51	1,9915	2,5624	—0,2485		0,51	2,6784	2,0131	0,4375

Таблица 3.47. **Значения КИН $K_I(A) = p\sqrt{\pi l}F_I$ и $K_{II}(A) = p\sqrt{\pi l}F_{II}$ при растяжении полосы с двумя симметричными наклонными краевыми трещинами при $b/L = 0{,}2$ [131]**

α	l/L					
	0,1		0,2		0,3	
	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
0	1,1101	—0,0323	1,2123	—0,1083	1,4693	—0,1694
$\pi/36$	1,1149	0,0319	1,2343	—0,0266	1,5071	—0,0642
$\pi/18$	1,1058	0,0953	1,2358	0,0551	1,5128	0,0416
$\pi/12$	1,0831	0,1560	1,2169	0,1333	1,4870	0,1422
$\pi/6$	0,9408	0,3032	1,0521	0,3188	1,2531	0,3697

α	l/L					
	0,4		0,5		0,6	
	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
0	1,8967	—0,2280	2,5980	—0,2937	3,8235	—0,3597
$\pi/36$	1,9576	—0,0854	2,6960	—0,0880	3,9936	—0,0463
$\pi/18$	1,9647	0,0526	2,7002	0,1087	3,9974	0,2302
$\pi/12$	1,9210	0,1875	2,6201	0,2822	3,8559	0,4631
$\pi/6$	1,5591	0,4603	2,0314	0,6047	2,8337	0,8460

Таблица 3.48. Значения КИН $K_I L/(P\sqrt{\pi l})$ при осевом растяжении полосы с периодической системой односторонних краевых трещин [132, 133]

$\frac{d}{L}$	l/L							
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0,5	1,1215	0,920	0,743	0,687	0,691	0,733	0,820	0,982
1,0	1,1215	1,062	0,990	0,932	0,921	0,964	1,068	1,262
2,0	1,1215	1,113	1,138	1,181	1,224	1,292	1,416	1,601
3,0	1,1215	1,133	1,180	1,279	1,397	1,530	1,686	1,845
∞	1,1215	1,187	1,361	1,643	2,071	2,728	3,787	...

Таблица 3.49. Значения КИН $K_I L\sqrt{L/\pi}/(4M)$ при чистом изгибе полосы с периодической системой односторонних краевых трещин [134]

$\frac{l}{L}$	d/L				
	3/2	1	2/3	1/2	1/4
0,025	0,258	0,258	0,258	0,257	0,232
0,05	0,354	0,353	0,346	0,334	0,301
0,10	0,498	0,496	0,462	0,439	0,405
0,15	0,615	0,612	0,570	0,537	0,470
0,20	0,720	0,716	0,671	0,630	0,526
0,25	0,836	0,830	0,772	0,729	0,580
0,35	1,090	1,057	0,984	0,942	0,712
0,45	1,425	1,384	1,300	1,218	0,902
0,55	1,909	1,881	1,806	1,698	1,239
0,65	2,738	2,733	2,694	2,595	2,019
0,75	4,500	4,504	4,508	4,468	3,995
0,95	48,625	47,996	47,673	47,555	46,604

Таблица 3.50. Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$ при растяжении полосы с периодической системой двухсторонних краевых трещин [132, 133]

$\frac{d}{L}$	l/L							
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0,5	1,1215	0,921	0,743	0,687	0,691	0,733	0,820	0,979
1,0	1,1215	1,062	0,988	0,930	0,917	0,954	1,044	1,202
2,0	1,1215	1,094	1,098	1,104	1,119	1,152	1,218	1,338
3,0	1,1215	1,106	1,092	1,108	1,131	1,170	1,238	1,346
∞	1,1215	1,117	1,112	1,115	1,132	1,169	1,236	1,353

щин, находится под действием растягивающих усилий на бесконечности, равнодействующая которых P расположена по оси полосы (рис. 3.84; $M = 0$). Значения КИН K_I ($K_{II} = 0$), полученные методом граничной коллокации [132, 133], приведены в табл. 3.48. Численные результаты для рассматриваемой задачи имеются также в работе [134].

Чистый изгиб полосы с периодической системой односторонних краевых трещин. Для случая, когда полоса с односторонними краевыми трещинами находится под действием изгибающего момента M на бесконечности (см. рис. 3.84; $P = 0$), числовые значения КИН K_I ($K_{II} = 0$), полученные методом СИУ [134], приведены в табл. 3.49.

Осевое растяжение полосы с периодической системой двухсторонних краевых трещин. Полоса, ослабленная двумя бесконечными рядами трещин, выходящими на обе ее грани, находится под действием растягивающих усилий на бесконечности (рис. 3.85). Значения КИН K_I ($K_{II} = 0$), полученные методом граничной коллокации [132, 133], приведены в табл. 3.50. Численные результаты для данной схемы имеются также в работе [129].

3.8. Бесконечная полоса с центральной поперечной трещиной

Растяжение полосы на бесконечности. Бесконечная полоса, ослабленная центральной поперечной трещиной, растягивается на бесконечности усилиями p. Берега трещин и грани полосы свободны от нагрузки (рис. 3.86). В ряде работ [1, 53, 135, 136] построено асимптотическое решение задачи. Формула для КИН получена в работе [136] в виде ряда по степеням параметра $\lambda = l/L$ с точностью до величин $O(\lambda^{72})$:

$$K_I = p\sqrt{\pi l}\,(1 + 0{,}5948\lambda^2 + 0{,}4812\lambda^4 + 0{,}3963\lambda^6 + 0{,}3367\lambda^8 + 0{,}2963\lambda^{10} + 0{,}2684\lambda^{12} + 0{,}2478\lambda^{14} + 0{,}2318\lambda^{16} + 0{,}2186\lambda^{18} + 0{,}2076\lambda^{20} + 0{,}1980\lambda^{22} + 0{,}1897\lambda^{24} + 0{,}1823\lambda^{26} + 0{,}1757\lambda^{28} + 0{,}1698\lambda^{30} + 0{,}1644\lambda^{32} + 0{,}1595\lambda^{34} + 0{,}1550\lambda^{36} + 0{,}1509\lambda^{38} + 0{,}1471\lambda^{40} + 0{,}1436\lambda^{42} + 0{,}1403\lambda^{44} + 0{,}1372\lambda^{46} + 0{,}1341\lambda^{48} + 0{,}1307\lambda^{50} + 0{,}1255\lambda^{52} + 0{,}1158\lambda^{54} + 0{,}0976\lambda^{56} + 0{,}0660\lambda^{58} + 0{,}0188\lambda^{60} - 0{,}0413\lambda^{62} - 0{,}1054\lambda^{64} - 0{,}1593\lambda^{66} - 0{,}1889\lambda^{68} - 0{,}1847\lambda^{70}) + O(\lambda^{72}). \quad (3.24)$$

На основе аналогичного результата [53], однако полученного с точностью до величин $O(\lambda^{20})$, У. Браун и Дж. Сроули [105] с помощью метода наименьших квадратов получили следующие компактные выражения:

$$K_I = p\sqrt{\pi l}\,(1 + 0{,}128\lambda - 0{,}288\lambda^2 + 1{,}525\lambda^3), \quad (3.25)$$

$$K_I = p\sqrt{\pi l}\,(1 - 0{,}1\lambda + \lambda^2). \quad (3.26)$$

Первое из этих выражений имеет относительную погрешность не более 0,5 % при изменении λ от 0 до 0,7; относительная погрешность второго для $0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}6$ не превышает 1 %.

Феддерсеном (см. [105]) предложена эмпирическая формула

$$K_I = p\sqrt{\pi l}\,\sqrt{\sec \pi\lambda/2},$$

которая аппроксимирует решение [53] в более широком диапазоне (при $\lambda \leqslant 0{,}8$ ее погрешность меньше 1 %), чем формулы (3.25) и (3.26).

В работе [137] построена уточненная формула Феддерсена

$$K_I = p\sqrt{\pi l}\,(1 - 0{,}025\lambda^2 + 0{,}06\lambda^4)\sqrt{\sec \pi\lambda/2},$$

обеспечивающая хорошую точность (погрешность около 0,1 %) при всех значениях параметра λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$.

Койтером [138] (см. также [32]) дана формула

$$K_I = p\sqrt{\pi l}\,(1 - 0{,}5\lambda + 0{,}326\lambda^2)/\sqrt{1-\lambda},$$

которая хорошо согласуется при $\lambda \leqslant 0{,}8$ с данными Исиды [53] и при $\lambda \to 1$ стремится к точному результату.

В работе [1] методом асимптотической интерполяции получено соотношение

$$K_I = p\sqrt{\pi l}\,(1 + 0{,}0948\lambda^2 + 0{,}0588\lambda^4 + 0{,}0138\lambda^6)/\sqrt{1-\lambda^2},$$

которое с точностью до величин $O(\lambda^6)$ эквивалентно решению (3.24), а при $\lambda \to 1$ также стремится к точному результату.

Известны также другие аппроксимационные формулы [17, 107, 108] для рассматриваемого решения.

Ниже приведены значения КИН, полученные методом СИУ [139]:

l/L	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	1	1,0060	1,0246	1,0577	1,1094	1,1867

l/L	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	1,3033	1,4884	1,8169	2,585	4,252

Данные по КИН имеются также в работах [16—18. 50, 125, 137, 140—143]. Ортотропная полоса с центральной поперечной трещиной изучалась в работах [104, 109, 110, 144, 145].

Изгиб полосы на бесконечности. Полоса находится под действием изгибающего момента на бесконечности, что соответствует также действию линейной растягивающей (сжимающей) нагрузки с главным вектором, равным нулю ($\sigma = 3M/(2L^2)$) (рис. 3.87). Ниже приведены значения КИН, полученные методом СИУ [139]:

l/L	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$	0	0,0500	0,1001	0,1505	0,2022	0,2572

l/L	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$	0,3196	0,3984	0,5185	0,7777	1,114

Известно также аналитическое решение, построенное методом асимптотической интерполяции [32]. Аппроксимационная формула для КИН K_I ($K_{II} = 0$) для правой вершины трещины получена в виде

$$K_I = (3lM/(4\,(L^3 - l^3)))\sqrt{\pi l\,(L-l)/L}\,[1 + l/(2L) +$$
$$+ 3\,(l/L)^2/8 - 11\,(l/L)^3/16 + 0{,}464\,(l/L)^4].$$

Относительная погрешность формулы не превышает 1 % при всех $0 \leqslant l/L \leqslant 1$. Известны и другие приближенные зависимости для КИН [17, 18, 108].

Действие нагрузки на берегах трещин. Пусть к противоположным берегам трещины в точке, удаленной вправо от ее центра на расстояние c, приложены противоположно направленные нормальные P и сдвигающие Q силы (рис. 3.88). Приближенная формула для КИН, полученная методом асимптотической интерполяции [17], имеет вид

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = ((P - iQ)/\sqrt{2L})\,\{1 + 0{,}297\sqrt{1 - (c/l)^2}\,[1 - \cos(\pi l/(2L))]\} \times$$

$$\times \sqrt{\operatorname{tg}(\pi l/(2L))}\,[1 \pm$$

$$\pm \sin(\pi c/(2L))/\sin(\pi l/(2L))]/\sqrt{1 - (\cos(\pi l/(2L))/\cos(\pi c/(2L)))^2}. \quad (3.27)$$

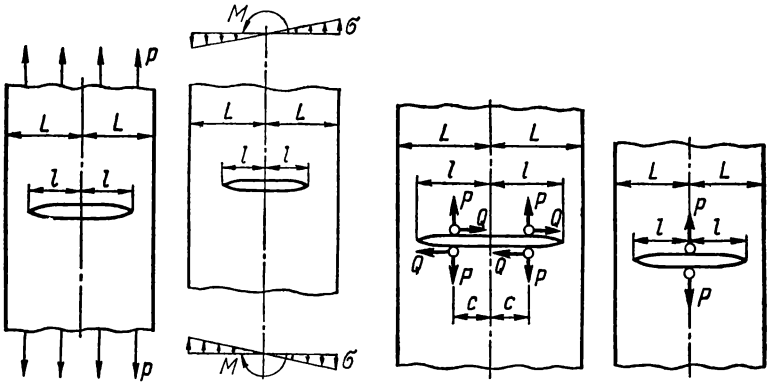


Рис. 3.86. Полоса с центральной поперечной трещиной при растяжении на бесконечности.

Рис. 3.87. Полоса с центральной трещиной при изгибе на бесконечности

Рис. 3.88. Полоса с центральной поперечной трещиной при действии сосредоточенных сил на ее берегах.

Рис. 3.89. Действие растягивающих сил в центре поперечной трещины в полосе.

Если же, кроме того, в симметричной точке слева от центра приложена такая же система сил, то [17]

$$K_{\mathrm{I}} - iK_{\mathrm{II}} = \sqrt{2/L}\,(P - iQ)\,[1 + 0{,}297\sqrt{1 - (c/l)^2}\,[1 - \cos(\pi l/(2L))]] \times$$

$$\times \sqrt{\operatorname{tg}(\pi l/(2L))}/\sqrt{1 - (\cos(\pi l/(2L))/\cos(\pi c/(2L)))^2}. \quad (3.28)$$

Из формулы (3.27) при $c = 0$ и $Q = 0$ следует решение для случая, когда в центре трещины приложены растягивающие силы P (рис. 3.89):

$$K_{\mathrm{I}} = (P/\sqrt{\pi l})\sqrt{\pi\lambda/\sin(\pi\lambda)}\,[1 + 0{,}297\,(1 - \cos(\pi\lambda/2))] \quad (\lambda = l/L). \quad (3.29)$$

Для этого же, случая в работе [1] получена иная аппроксимационная формула:

$$K_{\mathrm{I}} = P\,(1 + 0{,}6896\lambda^2 + 0{,}2144\lambda^4 - 0{,}0702\lambda^6)/\sqrt{\pi l\,(1 - \lambda^2)}, \quad (3.30)$$

имеющая при малых значениях λ такую же асимптотическую точность, как и решение [1, 135]

$$K_{\mathrm{I}} = P\,(1 + 1{,}1896\lambda^2 + 0{,}9342\lambda^4)/\sqrt{\pi l} + O\,(\lambda^6);$$

при $\lambda \to 1$ формула (3.30) соответствует точному решению.

Ниже приведены значения КИН для последнего случая нагрузки, полученные методом СИУ [146]:

l/L	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$K_I\sqrt{\pi l}/P$	1	1,0120	1,0491	1,1152	1,2174
l/L	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$K_I\sqrt{\pi l}/P$	1,3688	1,5935	1,9400	2,5300	3,8310

Сравнение этих данных с результатами, полученными из соотношений (3.29) и (3.30), показывает, что их относительная ошибка не пре-

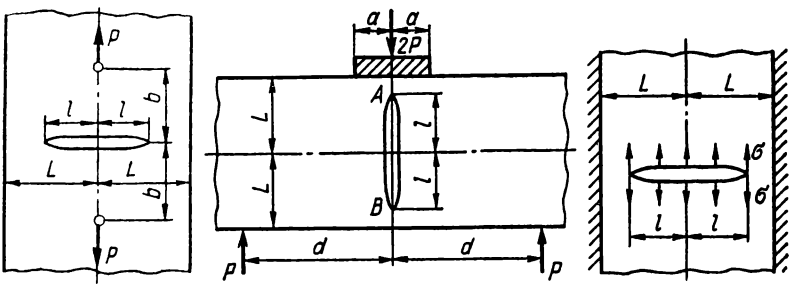


Рис. 3.90. Схема действия растягивающих сил во внутренних точках полосы.

Рис. 3.91. Действие жесткого плоского штампа на верхнюю грань полосы с центральной трещиной.

Рис. 3.92. Действие постоянного давления на берегах центральной поперечной трещины в полосе с защемленными гранями.

вышает 1,5 % и 0,5 % соответственно. Формулы (3.27) и (3.28) можно использовать как фундаментальное решение при вычислении КИН для произвольной нагрузки.

Приближенные формулы для КИН при действии на берегах трещины произвольной нормальной нагрузки приведены также в работах [116, 117].

Действие сосредоточенных сил на средней линии полосы. Пусть берега трещины и грани полосы свободны от нагрузки, а на средней линии в симметричных точках приложены растягивающие сосредоточенные силы P (рис. 3.90). В работе [17] методом асимптотической интерполяции для КИН получено выражение

$$K_I = P\{\{1 + [0{,}297 + 0{,}115[1 - \operatorname{sch}(\pi b/(2L))]\sin(\pi l/L)] \times$$
$$\times [1 - \cos(\pi l/(2L))]\}\{1 + (1/(1+\varkappa))(\pi b/L) \times$$
$$\times \operatorname{th}(\pi b/(2L))/[(\operatorname{ch}(\pi b/(2L))/\cos(\pi l/(2L)))^2 - 1]\} \times$$
$$\times \sqrt{\operatorname{tg}(\pi l/(2L))}/\sqrt{1 - (\cos(\pi l/(2L))/\operatorname{ch}(\pi b/(2L)))^2}\}/\sqrt{2L}.$$

Изгиб полосы под действием жесткого штампа. Пусть на верхней грани полосы действует симметрично размещенный плоский жесткий штамп ширины $2a$ при отсутствии трения в зоне контакта. Нижняя грань полосы опирается в двух симметричных точках. Берега трещины свободны

от нагрузки (рис. 3.91). Задача решена методом СИУ в работе [115]. Ниже приведены значения КИН $K_I/((P/L)\sqrt{\pi l}) = F_I$ при $a/L = 0{,}02$ и $d/L = 8$:

l/L	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
F_I (A)	—0,2876	—0,8205	—1,3540	—1,8975	—2,4714
F_I (B)	0,7892	1,3365	1,8954	2,4780	3,1095
l/L	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
F_I (A)	—3,1177	—3,9294	—5,1552	—7,8157	—11,668
F_I (B)	3,8405	4,7822	6,2281	9,3547	13,738

Полоса с защемленными гранями. Берега трещины загружены постоянными нормальными усилиями, а грани полосы жестко защемлены (рис. 3.92). Для КИН в работе [136] получено разложение по степеням параметра $\lambda = l/L$ ($\mu = 0{,}3$; плоское напряженное состояние):

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l}\,(1 - 0{,}4102\lambda^2 - 0{,}0051\lambda^4 - 0{,}0701\lambda^6 - 0{,}0332\lambda^8 - 0{,}0288\lambda^{10} - 0{,}0210\lambda^{12} - 0{,}0170\lambda^{14} - 0{,}0140\lambda^{16} - 0{,}0119\lambda^{18} - 0{,}0104\lambda^{20} - 0{,}0091\lambda^{22} - 0{,}0082\lambda^{24} - 0{,}0073\lambda^{26} - 0{,}0067\lambda^{28} - 0{,}0061\lambda^{30} - 0{,}0056\lambda^{32} - 0{,}0052\lambda^{34} - 0{,}0048\lambda^{36} - 0{,}0045\lambda^{38} - 0{,}0042\lambda^{40} - 0{,}0039\lambda^{42} - 0{,}0037\lambda^{44} - 0{,}0035\lambda^{46} - 0{,}0032\lambda^{48} - 0{,}0028\lambda^{50} - 0{,}0017\lambda^{52} + 0{,}0006\lambda^{54} + 0{,}0049\lambda^{56} + 0{,}0113\lambda^{58} + 0{,}0191\lambda^{60} + 0{,}0257\lambda^{62} + 0{,}0284\lambda^{64} + 0{,}0248\lambda^{66} + 0{,}0145\lambda^{68} - 0{,}0005\lambda^{70}) + O(\lambda^{72}).$$

Данные по КИН имеются также в работах [17, 62, 143].

3.9. Бесконечная полоса с трещинами на средней линии

Действие постоянной нормальной нагрузки на берегах трещины конечной длины. Пусть грани полосы свободны от нагрузки, а на трещине задано постоянное давление (рис. 3.93, $\tau = 0$). Асимптотическое решение задачи при малых значениях относительной длины трещины $\lambda = l/L$ имеет вид [1]

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l}\,(1 + 1{,}1418\lambda^2 - 0{,}6048\lambda^4) + O(\lambda^6). \qquad (3.31)$$

Такого же типа асимптотические решения приведены также в работах [16, 147—149].

Известно асимптотическое решение и при больших значениях параметра λ [150]:

$$K_I = 2\sigma\sqrt{3l/\lambda}\,f(\lambda), \quad f(\lambda) = [0{,}0957 + 0{,}4533\lambda + 0{,}6733\lambda^2 + \lambda^3/3]/(0{,}6733 + \lambda). \qquad (3.32)$$

Формулу (3.31) можно использовать при $\lambda \leqslant 0{,}5$, а соотношение (3.32) при $\lambda \geqslant 0{,}5$.

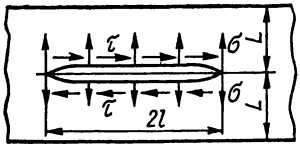
В работе [1] приведено замкнутое приближенное решение

$$K_I = 2\sigma\sqrt{3l/\lambda}\,\operatorname{tg}\sqrt{\pi\lambda/3}f_1(\lambda),$$

$$f_1(\lambda) = f(\lambda) + (0{,}2409 + 0{,}4052\lambda + 0{,}1621\lambda^2 + \\ + 0{,}3601\lambda^3)\exp(-\lambda)/(0{,}6733 + \lambda), \qquad (3.33)$$

которое эквивалентно с точностью до величин $O(\lambda^4)$ при малых значениях λ результату (3.31), а при больших значениях λ согласуется с асимптотическим решением (3.32). Относительная погрешность решения (3.33) не превышает 2 % при всех $0 \leqslant \lambda < \infty$.

Численное решение задачи, полученное методом СИУ [151], приведено в табл. 3.51. Данные по КИН имеются также в работах [17, 18, 50,



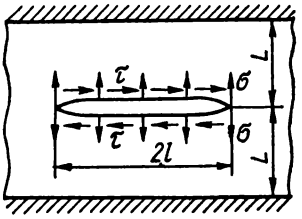


Рис. 3.93. Полоса с центральной продольной трещиной, нагруженной постоянными усилиями.

Рис. 3.94. Действие постоянной нагрузки на берегах продольной трещины в полосе с защемленными гранями.

65, 152—155]. Ортотропная полоса с продольной трещиной изучалась в работах [145, 156, 157].

Пусть грани полосы защемлены, т. е. на них заданы нулевые смещения, а берега трещины находятся под действием давления (рис. 3.94; $\tau =$

Таблица 3.51. **Значения КИН для полосы с центральной продольной трещиной, нагруженной постоянными нормальными (σ) и сдвигающими (τ) усилиями, а также сосредоточенными нормальными силами (P) [151]**

L/l	$K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$	$K_I/[(P/l)\sqrt{\pi l}]$	$K_{II}/(\tau\sqrt{\pi l})$	L/l	$K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$	$K_I/[P/l)\sqrt{\pi l}]$	$K_{II}/(\tau\sqrt{\pi l})$
0,2	9,376	6,249	2,629	1,0	1,816	0,892	1,365
0,4	4,146	2,511	1,934	1,2	1,611	0,745	1,289
0,6	2,758	1,536	1,640	1,6	1,377	0,581	1,192
0,8	2,149	1,128	1,473	3,0	1,122	0,404	1,067

$= 0$). Асимптотическое решение при малой относительной длине трещины $\lambda = l/L$ получено в работе [148]. В случае плоской деформации при $\mu =$ $= 0{,}3$ имеем:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l}\,(1 - 1{,}738\lambda^2 + 4{,}423\lambda^4 - 10{,}93\lambda^6 + \\ + 26{,}54\lambda^8 - 63{,}97\lambda^{10}) + O(\lambda^{12}), \qquad (3.34)$$

Асимптотическое решение при больших значениях λ имеет вид [148, 158]:

$$K_I = 2\sigma\sqrt{2l(\varkappa - 1)/\lambda}/(1 + \varkappa). \qquad (3.35)$$

Формулу (3.34) можно использовать при $0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5$, а решение (3.35) — при $0{,}5 \leqslant \lambda < \infty$.

В работе [152] получено численное решение задачи методом дуальных интегральных уравнений в случае плоской деформации при $\mu = 0$ и $\mu = 0{,}5$. Этот результат приведен на рис. 3.95. Подобные зависимости КИН от параметра L/l выполняются и в случае плоского напряженного

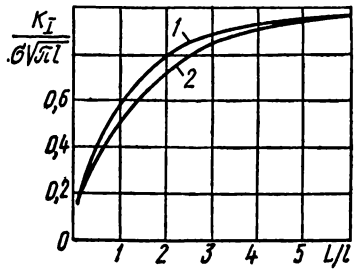


Рис. 3.95. Зависимость КИН $K_I/\sigma\sqrt{\pi l}$ от отношения L/l при действии постоянного давления на продольной трещине в полосе с защемленными гранями (плоская деформация):
1 — $\mu = 0$; *2* — $\mu = 0{,}5$ [152].

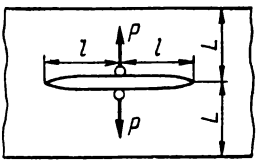


Рис. 3.96. Полоса с продольной трещиной, нагруженной в центре нормальными силами.

состояния, причем графики этих зависимостей находятся между кривыми *1* и *2* на рис. 3.95. Числовые значения КИН приведены также в работах [16, 17, 50, 65, 154].

Отметим, что кривая *1* ($\mu = 0$) на рис. 3.95 соответствует также значениям КИН для периодической системы параллельных трещин в бесконечной плоскости (см. п. 2.14), а также случаю, когда полоса зажата между двумя гладкими жесткими основаниями, т. е. при равенстве нулю на ее гранях нормальных смещений и касательных напряжений, или случаю, когда на верхней (+) и нижней (—) гранях заданы постоянные нормальные смещения $v^{\pm} = \pm(1 + \varkappa)\sigma L/(8G)$, а касательные напряжения отсутствуют.

Действие сосредоточенных растягивающих сил в центре трещины. Пусть к берегам трещины в ее середине приложены нормальные сосредоточенные силы, а грани полосы свободны от нагрузки (рис. 3.96). Асимптотическое решение при малой относительной длине трещины $\lambda = l/L$ имеет вид [1]

$$K_I = (P/\sqrt{\pi l})(1 + 2{,}2838\lambda^2 - 0{,}7854\lambda^4) + O(\lambda^6).$$

При больших значениях λ [17]

$$K_I = P\lambda\sqrt{3\lambda}/(2\sqrt{l}).$$

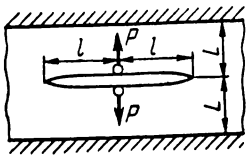
Численное решение задачи, полученное методом СИУ [151], приведено в табл. 3.51. Данные по КИН имеются также в работах [17, 152].

Пусть грани полосы защемлены, а в центре трещины действуют сосредоточенные силы (рис. 3.97). Численное решение получено методом

дуальных интегральных уравнений в работе [152]. На рис. 3.98 приведена зависимость КИН от отношения L/l в случае плоской деформации при $\mu = 0$ и $\mu = 0{,}5$.

Отметим, что кривая *1* ($\mu = 0$) на рис. 3.98 соответствует также значениям КИН для периодической системы параллельных трещин в бесконечной плоскости (см. п. 2.14), а также случаю, когда полоса зажата между двумя гладкими жесткими основаниями.

Расклинивание полосы клином конечной длины. Пусть бесконечная полоса толщиной $2L$ расклинивается тонким жестким гладким клином длиной $2a$. Клин расположен симметрично относительно граней полосы, толщина клина постоянна и равна $2h$. Вне клина, на его продолжении, образуются трещины (рис. 3.99). Грани полосы свободны от нагрузки (1), либо закреплены жестко (2) (смещения на гранях равны нулю), либо шарнирно (3) (отсутствуют на гранях касательные напряжения и нормальные смещения). Асимптотическое решение задачи при малой относительной длине трещины $\lambda = l/L$ получено в работах [159, 160]:



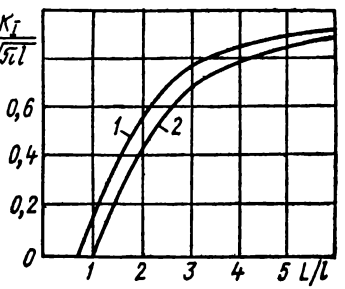


Рис. 3.97. Полоса с защемленными гранями при действии сосредоточенных сил в центре продольной трещины.

Рис. 3.98. Зависимость КИН $K_I\sqrt{\pi l}/P$ от параметра L/l при действии сосредоточенных сил в центре продольной трещины в полосе с защемленными гранями (плоская деформация):
1 — $\mu = 0$; *2* — $\mu = 0{,}5$ [152].

$$
\left.
\begin{aligned}
&K_I = 4Gh\sqrt{\pi l}\Omega^{-1}(l)\,\Phi(l)/[(\varkappa+1)\sqrt{l^2-a^2}],\\
&\Phi(l) = 2-(1-\varepsilon^2)c_0\lambda^2-(11-6\varepsilon^2-5\varepsilon^4)c_1\lambda^4/4+O(\lambda^6),\\
&\Omega(l) = 2K(k)+\chi(l)c_0\lambda^2+[(1+\varepsilon^2)\chi(l)+k^4K(k)/4]c_1\lambda^4+O(\lambda^6),\\
&\chi(l) = (1+\varepsilon^2)K(k)-2E(k),\quad k=\sqrt{1-\varepsilon^2},\quad \varepsilon = a/l.
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.36)
$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода; постоянные c_n ($n = 0$; 1) для граничных условий (1)—(3) на гранях полосы имеют значения: (1) $c_0 = -2{,}35$, $c_1 = 1{,}69$; (2) $c_0 = 3{,}48$, $c_1 = -1{,}25$ (при $\mu = 0{,}3$ в случае плоской деформации); (3) $c_0 = \pi^2/4$; $c_1 = -\pi^2/144$. Формулу (3.36) можно использовать при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1/2$.

Действие постоянной сдвигающей нагрузки на берегах трещины конечной длины. Пусть грани полосы свободны от нагрузки, а на берегах трещины действуют равномерно распределенные сдвигающие усилия (см. рис. 3.93; $\sigma = 0$). Известны асимптотические решения задачи при малых [1]

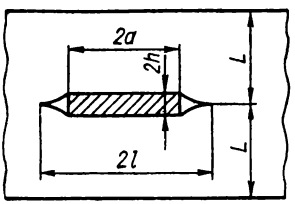
$$K_{II} = \tau\sqrt{\pi l}\,(1+0{,}6668\lambda^2-0{,}6430\lambda^4)+O(\lambda^6)$$

и больших [17]

$$K_{II} = \tau \sqrt{3l\lambda}\,(1{,}13 + 0{,}285/\lambda)$$

значениях относительной длины трещины $\lambda = l/L$. Значения КИН K_{II}, полученные методом СИУ [151], приведены в табл. 3.51. Численные результаты для K_{II} имеются также в работах [17, 50, 152].

Пусть грани полосы, находящейся в условиях плоского напряженного состояния, жестко защемлены (или же нормальные смещения равны нулю, а касательные смещения постоянны и равны $u^{\pm} = \pm \tau L/G$ соот-



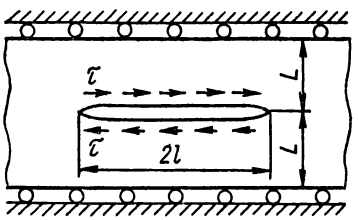


Рис. 3.99. Схема задачи о расклинивании полосы клином конечной длины.

Рис. 3.100. Действие сдвигающей нагрузки на берегах продольной трещины в полосе с шарнирно закрепленными гранями.

ветственно на верхней и нижней гранях), а берега трещины загружены сдвигающими усилиями (см. рис. 3.94; $\sigma = 0$). Значения КИН K_{II}, полученные методом дуальных интегральных уравнений [161], приведены в табл. 3.52.

Таблица 3.52. Значения $K_{II}/(\tau\sqrt{\pi l})$ для загруженной сдвигающими усилиями продольной трещины в полосе с защемленными гранями (плоское напряженное состояние) [161]

L/l	μ			L/l	μ		
	0	1/3	1/2		0	1/3	1/2
10	0,994	0,994	0,993	0,9	0,691	0,710	0,715
7	0,988	0,987	0,986	0,8	0,655	0,679	0,689
5	0,978	0,975	0,973	0,7	0,613	0,644	0,657
4	0,966	0,963	0,959	0,6	0,564	0,600	0,618
3	0,943	0,938	0,933	0,5	0,507	0,548	0,569
2	0,888	0,883	0,876	0,4	0,440	0,483	0,506
1,6	0,844	0,842	0,836	0,3	0,361	0,402	0,426
1,2	0,774	0,779	0,777	0,2	0,269	0,303	0,324
1,0	0,723	0,736	0,738	0,1	0,157	0,179	0,193

Пусть грани полосы шарнирно закреплены, т. е. на них отсутствуют касательные напряжения и нормальные смещения, а на трещине действуют постоянные сдвигающие усилия (рис. 3.100). Решение задачи получено методом дуальных интегральных уравнений в работе [152]. Зависимость КИН $K_{II}/(\tau\sqrt{\pi l})$ от параметра L/l показана на рис. 3.101. Численные результаты для КИН имеются также в работах [17, 50].

Случай, когда к берегам трещины приложена антисимметричная нагрузка, а на гранях полосы отсутствуют нормальные напряжения и касательные смещения, соответствует антисимметричному нагружению бесконечной плоскости с периодической системой параллельных трещин (см. п. 2.14).

Полубесконечная трещина в полосе. Пусть полоса ослаблена полубесконечной трещиной, на берегах которой действуют нормальные растягивающие силы P (рис. 3.102; $Q = M = 0$). Остальная граница свободна от нагрузки. Решение задачи в квадратурах получено в работе [162] методом Винера — Хопфа. При этом в граничных условиях дельта-функция Дирака, соответствующая действию сосредоточенных сил, приближалась некоторыми непрерывными функциями. Приведем асимптотиче-

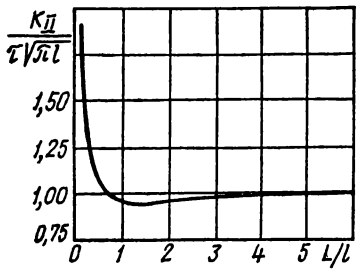


Рис. 3.101. Зависимость $K_{II}/\tau\sqrt{\pi l}$ от отношения L/l при действии сдвигающей нагрузки на берегах продольной трещины в полосе с шарнирно закрепленными гранями [152].

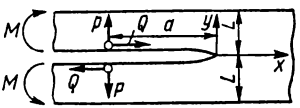


Рис. 3.102. Полоса с полубесконечной трещиной при действии сосредоточенных сил и изгибающих моментов.

ские формулы для КИН K_I ($K_{II} = 0$) при большом удалении сил от вершины трещины, полученные при нулевом ($\sigma_y^{\pm} = -(P/a)\exp(x/a)$) [162]

$$K_I = P\sqrt{12/L}\,(a/L + 0{,}6728 + 0{,}1264L/a + 0{,}0869L^2/a^2) + O(L^3/a^3)$$

и первом ($\sigma_y^{\pm} = (4Px/a^2)\exp(2x/a)$) приближениях

$$K_I = P\sqrt{12/L}\,(a/L + 0{,}6728 + 0{,}0377L^2/a^2) + O(L^3/a^3). \qquad (3.37)$$

В работе [163] методом граничной коллокации также получена приближенная формула для КИН

$$K_I = P\,(3{,}46a/L + 2{,}38)/\sqrt{L}. \qquad (3.38)$$

Ряд приближенных выражений для КИН построен при решении задачи в балочном приближении:

$$K_I = P\sqrt{12/L}\,(a/L + 0{,}64), \qquad (3.39)$$

$$K_I = P\sqrt{12\,[a^2/L^2 + \sqrt{5}a/(2L) + {}^1/_2]/L}. \qquad (3.40)$$

Формула (3.39) получена на основе элементарной теории изгиба балок и упругого основания винклеровского типа [164], а соотношение (3.40) построено [165] при использовании теории Тимошенко и обобщенного упругого основания. Подобные решения имеются также в работе [166].

Соотношения (3.37) — (3.40) в интервале $2 \leqslant a/L \leqslant 10$ дают результаты, отличающиеся между собой меньше, чем на 1 %.

В работе [167] методом Винера — Хопфа построено точное решение задачи и для КИН предложена аппроксимационная формула

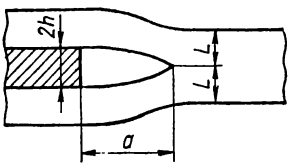
$$K_I = (P/\sqrt{L})\,\{\sqrt{12}\,(a/L + 0{,}673) + \sqrt{2L/(\pi a)} -$$

$$- [0{,}815\,(a/L)^{0{,}619} + 0{,}429]^{-1}\},$$

относительная погрешность которой во всем интервале $0 < a/L < \infty$ не превышает 1,1 %.

Если кроме сосредоточенных сил P полоса расклинивается еще изгибающими моментами M (рис. 3.102; $Q = 0$), то решение задачи в балочном приближении дает [16, 17, 158]

$$K_I = 2\sqrt{3}/(L\sqrt{L})\,(Pa + M) \quad (a \gg L).$$



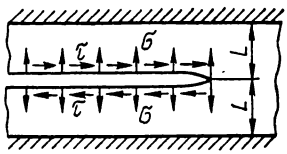


Рис. 3.103. Расклинивание полосы тонким полубесконечным клином.

Рис. 3.104. Действие постоянной нагрузки на берегах полубесконечной трещины в полосе с защемленными гранями.

При действии на берегах трещины сдвигающих сил Q (рис. 3.101; $P = M = 0$), когда точка их приложения значительно удалена от вершины трещины ($a \gg L$), имеем

$$K_I = Q/\sqrt{h} \quad (a \gg L).$$

Этот результат получен предельным переходом из точного замкнутого решения задачи для клина с трещиной [168].

Аналогичное решение в случае расклинивания полосы тонким полубесконечным клином (рис. 3.103) имеет вид [16]

$$K_I = GhL\sqrt{12L\,(7 - \varkappa)/(\varkappa + 1)}/a^2 \quad (a \gg L).$$

Пусть грани полосы жестко защемлены, а к берегам полубесконечной трещины приложены постоянные нормальные усилия σ (рис. 3.104; $\tau = 0$). Точное решение задачи имеет вид [16, 17, 158]

$$K_I = 2\sigma\sqrt{2L\,(\varkappa - 1)}/(\varkappa + 1). \tag{3.41}$$

Этот же результат соответствует случаю, когда берега трещины свободны от нагрузки и на верхней и нижней гранях касательные смещения отсутствуют, а нормальные $v^{\pm} = \pm\,\sigma L\,(\varkappa - 1)\,/\,[G\,(\varkappa + 1)]$.

Формула (3.41) при $\mu = 0$ ($\varkappa = 3$) определяет решение задачи, когда на гранях полосы отсутствуют нормальные смещения и касательные напряжения (что соответствует также периодической системе параллельных полубесконечных трещин в бесконечной плоскости (см. п. 2.14)), а также в случае, когда трещина свободна от нагрузки, на гранях касательные напряжения отсутствуют, а нормальные смещения $v^{\pm} = \pm\sigma L\,(1 + \varkappa)\,/\,(8G)$.

Когда берега полубесконечной трещины загружены постоянными касательными усилиями τ, а грани полосы жестко защемлены (см. рис. 3.104;

$\sigma = 0$), или же трещина свободна от нагрузки и на гранях полосы нормальные смещения равны нулю, а касательные $u^{\pm} = \pm \tau L/G$, то точное значение КИН K_{II} ($K_I = 0$) имеет вид [169]

$$K_{II} = 2\tau \sqrt{2L/(\varkappa + 1)}.$$

Две коллинеарные трещины равной длины. Пусть на средней линии полосы имеются две трещины равной длины $b - a$. Берега трещин находятся под действием постоянной нормальной нагрузки σ (рис. 3.105). Грани полосы свободны от нагрузки (1), либо закреплены жестко (2) (смещения на гранях равны нулю), либо шарнирно (3) (отсутствуют на гранях касательные напряжения и нормальные смещения). Асимптотическое решение задачи при малых значениях параметра $\lambda = b/L$ получено в работе [159]:

$$\left.\begin{aligned}
&K_I(a) = [P_0\Phi_1(a) + \Phi_2(a)]\,\sigma\sqrt{\pi/a}/(bk),\\
&K_I(b) = [P_0\Phi_1(b) + \Phi_2(b)]\,\sigma\sqrt{\pi/b}/(bk),\\
&\Phi_1(x) = 2 + (1 + \varepsilon^2 - 2x^2/b^2)\,c_0\lambda^2 + [1/4\,(5 - 2\varepsilon^2 + 5\varepsilon^4) +\\
&+ 2(1 + \varepsilon^2)\,x^2/b^2 - 6x^4/b^4]\,c_1\lambda^4 + O(\lambda^6),\\
&\Phi_2(x) = 1/2\,b^2\beta\,(1 + \varepsilon^2 - 2x^2/b^2) + O(\lambda^6),\\
&P_0 = -1/2\,b^2\beta\chi(b)\,\Omega^{-1}(b),\\
&\beta = 1 - 1/8\,c_1k^4\lambda^4,\quad \varepsilon = a/b,\quad k = \sqrt{1 - \varepsilon^2},\\
&\chi(b) = (1 + \varepsilon^2)\,K(k) - 2E(k),\\
&\Omega(b) = 2K(k) + \chi(b)\,c_0\lambda^2 +\\
&+ [(1 + \varepsilon^2)\,\chi(b) + 1/4\,k^4K(k)]\,c_1\lambda^4 + O(\lambda^6).
\end{aligned}\right\} \qquad (3.42)$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода; постоянные c_n ($n = 0; 1$) для граничных условий (1) — (3) на гранях полосы имеют значения: (1) $c_0 = -2{,}35$; $c_1 = 1{,}69$; (2) $c_0 = 3{,}48$, $c_1 = -1{,}25$ (при $\mu = 0{,}3$ в случае плоской деформации); (3) $c_0 = \pi^2/4$, $c_1 = -\pi^2/144$. Формулы (3.42) можно использовать при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1/2$.

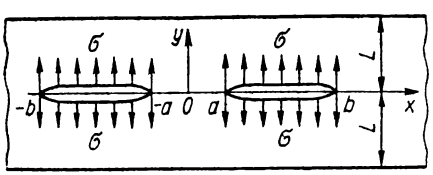


Рис. 3.105. Схема задачи для двух коллинеарных трещин равной длины на средней линии полосы.

Отметим, что соотношения (3.42) определяют решения задач также в случаях, когда берега трещин свободны от нагрузки, а к граням приложена равномерно распределенная растягивающая нагрузка интенсивностью σ при равных нулю касательных напряжениях (1) или грани полосы раздвинуты на заданную величину δ ($v^{\pm} = \pm\delta$) и отсутствуют касательные смещения (2) ($\delta = \sigma L(\varkappa - 1)/[G(\varkappa + 1)]$) или касательные напряжения (3) ($\delta = GL(\varkappa + 1)/(8G)$).

Аналогичные асимптотические решения приведены также в работах [170, 171] (граничные условия (1)) и [172] (условия (3)). Известны [151] численные значения КИН для двух равных трещин, загруженных постоянными нормальными и сдвигающими усилиями, в полосе со свободными от нагрузки гранями. При таких же условиях на гранях полосы в работе [173] получены КИН при действии постоянного давления на двух или трех коллинеарных продольных трещинах различной длины.

Таблица 3.53. **Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$ для периодической системы коллинеарных трещин под давлением, находящихся в полосе со свободными (а) или защемленными (б) ($\mu = 0{,}3$ — случай плоского напряженного состояния) гранями [132, 133]**

Условия на гранях	$\frac{2L}{W}$	l/W							
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
(а)	0,5	1,000	1,167	1,571	2,080	2,657	3,290	3,972	4,632
	1,0	1,000	1,046	1,168	1,347	1,555	1,761	1,922	1,999
	2,0	1,000	1,012	1,034	1,075	1,126	1,188	1,268	1,384
	3,0	1,000	1,006	1,016	1,042	1,080	1,133	1,213	1,339
(б)	0,5	1,000	0,868	0,720	0,663	0,663	0,702	0,785	0,939
	1,0	1,000	0,962	0,924	0,887	0,883	0,922	1,012	1,171
	2,0	1,000	0,991	1,006	1,022	1,051	1,100	1,181	1,314
	3,0	1,000	0,991	1,010	1,038	1,073	1,126	1,206	1,334

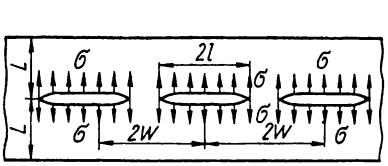


Рис. 3.106. Периодическая система коллинеарных трещин в полосе со свободными от нагрузки гранями.

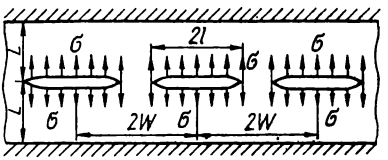


Рис. 3.107. Периодическая система коллинеарных трещин в полосе с защемленными гранями.

Периодическая система коллинеарных трещин. Пусть полоса со свободными от нагрузки (рис. 3.106) или защемленными (рис. 3.107) гранями ослаблена периодической системой коллинеарнным трещин, на берегах которых действует постоянное давление. Численное решение задачи получено в работах [132, 133] модифицированным методом граничной коллокации. Значения КИН K_I ($K_{II} = 0$) приведены в табл. 3.53.

Численные результаты для КИН имеются также в работах [174, 175].

3.10. Бесконечная полоса с произвольно размещенными трещинами

Эксцентрично расположенная поперечная трещина. Пусть полоса ослаблена произвольно расположенной поперечной внутренней трещиной. Берега трещины и грани полосы свободны от нагрузки. На бесконечности полоса находится под действием растягивающих усилий (рис. 3.108). Решение задачи получено методом рядов Лорана в работах [53, 176]. Числовые значения КИН K_I приведены в табл. 3.54. Случаи $f/L = 0$ и $f/L = 1$ относятся соответственно к полосе с центральной трещиной (см. п. 3.8) и к полуплоскости с внутренней трещиной (см. п. 3.3). В работе [107] получена приближенная формула для КИН в правой (K_I^+) и левой

Таблица 3.54. Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ для правой (над чертой) и левой (под чертой) вершин эксцентрично размещенной поперечной трещины в растягиваемой полосе [16, 53, 176]

$\frac{f}{L}$	$l/(L-f)$								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	1,0060	1,0246	1,0577	1,1094	1,1867	1,3033	1,4881	1,81	2,5
	1,0060	1,0246	1,0577	1,1094	1,1867	1,3033	1,4881	1,81	2,5
0,1	1,0053	1,0222	1,0530	1,1022	1,1770	1,2916	1,4758	1,81	2,5
	1,0050	1,0199	1,0452	1,0823	1,1340	1,2053	1,3051	1,45	1,7
0,2	1,0050	1,0212	1,0513	1,0999	1,1745	1,2898	1,4765	1,81	2,5
	1,0046	1,0179	1,0399	1,0709	1,1127	1,1680	1,2426	1,35	1,5
0,3	1,0049	1,0208	1,0507	1,0989	1,1732	1,2881	1,4743	1,81	2,5
	1,0045	1,0172	1,0380	1,0672	1,1058	1,1565	1,2249	1,32	1,5
0,4	1,0048	1,0205	1,0497	1,0969	1,1695	1,2912	1,4614	1,78	2,5
	1,0044	1,0170	1,0374	1,0660	1,1040	1,1540	1,2218	1,32	1,5
0,5	1,0046	1,0197	1,0476	1,0926	1,1613	1,2664	1,4344	1,73	2,4
	1,0042	1,0165	1,0364	1,0645	1,1018	1,1510	1,2177	1,31	1,5
0,6	1,0043	1,0183	1,0442	1,0855	1,1483	1,2436	1,3943	1,66	2,2
	1,0040	1,0155	1,0343	1,0608	1,0960	1,1424	1,2047	1,29	1,4
0,7	1,0039	1,0164	1,0395	1,0762	1,1316	1,2152	1,3460	1,57	2,0
	1,0036	1,0139	1,0309	1,0546	1,0860	1,1269	1,1813	1,26	1,4
0,8	1,0034	1,0142	1,0341	1,0659	1,1136	1,1854	1,2972	1,49	1,9
	1,0031	1,0120	1,0264	1,0465	1,0729	1,1068	1,1511	1,21	1,3
0,9	1,0029	1,0122	1,0295	1,0569	1,0985	1,1618	1,2583	1,43	1,8
	1,0026	1,0101	1,0222	1,0388	1,0603	1,0876	1,1227	1,17	1,2
1,0	1,0026	1,0112	1,0272	1,0528	1,0915	1,1497	1,2407	1,34	1,7
	1,0024	1,0092	1,0201	1,0349	1,0540	1,0779	1,1084	1,15	1,2

Таблица 3.55. Значения КИН K_I для полосы с эксцентрично размещенной трещиной при изгибе жестким штампом ($a/L = 0,02$, $c + b = 3L$) [115]

$\frac{c-b}{2L}$	$d/L = 4$		$d/L = 8$	
	$\frac{K_I(A)}{(P/L)\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B)}{(P/L)\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(A)}{(P/L)\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B)}{(P/L)\sqrt{\pi l}}$
0,05	2,6122	2,8784	5,4749	6,0423
0,10	2,5167	3,0562	5,2663	6,4155
0,20	2,3986	3,5429	4,9947	7,4265
0,30	2,4018	4,3492	4,9681	9,0895
0,40	2,6470	6,1001	5,4362	12,6981

(K_I^-) вершинах трещины

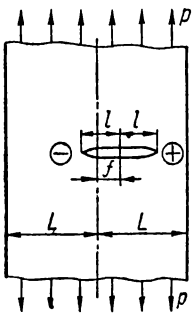
$$K_I^{\pm} = p\sqrt{\pi l}\pi\lambda\,(1-\cos\theta_1)\,(1+\cos\theta_2^{\pm})/[\theta_1\sin\theta_1\,(\cos\theta_1+$$

$$+\cos\theta_2^{\pm})\,\mathrm{tg}\,(\pi\lambda/2)\,(1-\lambda^{1,8})^{1,08}],$$

$$\lambda = l/(L-f),\quad \theta_1 = \pi\lambda\,(1-\varepsilon)/2,\quad \theta_2^{\pm} = \pi\lambda\,[(1-\varepsilon)\pm\varepsilon]/2,\quad \varepsilon = f/L,$$

аппроксимирующая приведенные в табл. 3.54 данные. Относительная погрешность этой формулы меньше 3 % при $0 \leqslant \lambda < 0{,}7$ и $0 \leqslant \varepsilon < 0{,}9$. Численные результаты для КИН приведены также в работах [17, 18, 50, 139].

Пусть на верхней грани полосы действует симметрично размещенный плоский жесткий штамп при отсутствии трения в зоне контакта. Нижняя грань полосы опирается в двух симметричных точках. Берега трещины



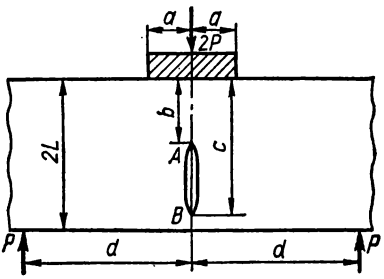


Рис. 3.108. Растяжение полосы с эксцентрично расположенной поперечной трещиной.

Рис. 3.109. Действие жесткого плоского штампа на верхнюю грань полосы с эксцентрично размещенной трещиной.

свободны от нагрузки (рис. 3.109). Задача решена методом СИУ в работе [115]. Числовые значения КИН приведены в табл. 3.55.

В работе [120] рассмотрен случай трещины под давлением, когда одна грань полосы свободна от нагрузки, а другая жестко защемлена.

Эксцентрично расположенная продольная трещина. Пусть полоса ослаблена произвольно расположенной продольной трещиной. Грани полосы свободны от нагрузки, а берега трещины загружены постоянными нормальными и сдвигающими усилиями (рис. 3.110). Решение задачи получено методом СИУ в работе [151]. Зависимости КИН от параметра L_1/L показаны на рис. 3.111.

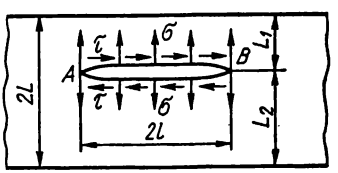


Рис. 3.110. Действие постоянной нагрузки на берега эксцентрично расположенной продольной трещины в полосе.

Центральная произвольно ориентированная трещина. Пусть в полосе имеется трещина произвольной ориентации, центр которой находится на средней линии. На берегах трещины заданы постоянные нормальные и касательные усилия (рис. 3.112; $L_1 = L_2 = L$, $p = 0$, $M = 0$). Напряжения на бесконечности и на гранях полосы отсутствуют. Асимптотическое решение задачи при малой относительной длине трещины $\lambda = l/L$

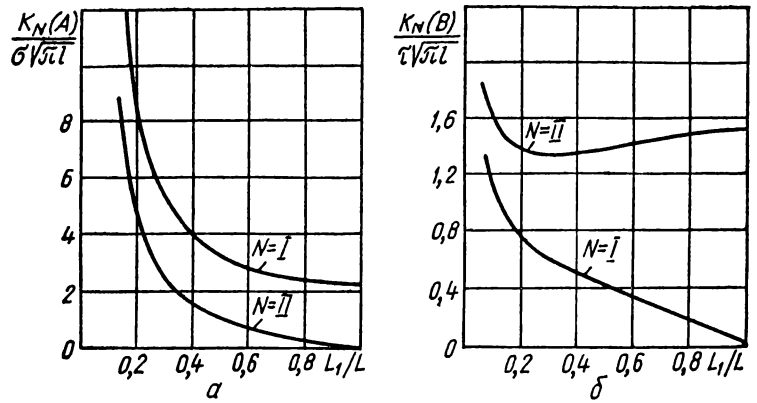


Рис. 3.111. Зависимость КИН от параметра L_1/L для полосы с продольной трещиной при действии на ее берегах постоянной нормальной ($а$ — $K_{\mathrm{I}}(B) = K_{\mathrm{I}}(A)$, $K_{\mathrm{II}}(B) = -K_{\mathrm{II}}(A)$) и сдвигающей ($б$ — $K_{\mathrm{I}}(A) = -K_{\mathrm{I}}(B)$, $K_{\mathrm{II}}(A) = K_{\mathrm{II}}(B)$) нагрузки при $L/l = 0{,}75$ [151].

имеет вид [1, 2, 177]

$$K_{\mathrm{I}} = \sqrt{\pi l}\,\{\sigma[1 + \lambda^2(0{,}9597 + 0{,}2735\cos 2\alpha - 0{,}0914\cos 4\alpha) +$$
$$+ \lambda^4(0{,}0624 - 0{,}5284\cos 2\alpha - 0{,}1242\cos 4\alpha - 0{,}0146\cos 6\alpha)] +$$
$$+ \tau[\lambda^2(0{,}1368\sin 2\alpha - 0{,}0914\sin 4\alpha) + \lambda^4(0{,}3033\sin 2\alpha -$$
$$- 0{,}0314\sin 4\alpha - 0{,}0146\sin 6\alpha)]\} + O(\lambda^6),$$
$$K_{\mathrm{II}} = \sqrt{\pi l}\,\{\tau[1 + \lambda^2(0{,}5754 + 0{,}0914\cos 4\alpha) +$$
$$+ \lambda^4(-0{,}1081 - 0{,}5629\cos 2\alpha + 0{,}0134\cos 4\alpha + 0{,}0146\cos 6\alpha)] +$$
$$+ 6[\lambda^2(0{,}1368\sin 2\alpha - 0{,}0914\sin 4\alpha) +$$
$$+ \lambda^4(-0{,}1412\sin 2\alpha - 0{,}1062\sin 4\alpha - 0{,}0146\sin 6\alpha)]\} + O(\lambda^6).$$

Положив здесь $\sigma = p(1 - \cos 2\alpha)/2$, $\tau = -(p/2)\sin 2\alpha$, получим КИН для случая, когда трещина свободна от нагрузки, а полоса растягивается на бесконечности усилиями p. В работах [1, 2, 177] приведены также асимптотические выражения КИН для произвольного нагружения трещины самоуравновешенными усилиями.

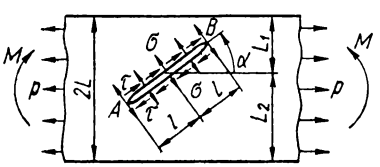


Рис. 3.112. Полоса с произвольно ориентированной трещиной.

В табл. 3.56 приведены значения КИН при растяжении и чистом изгибе полосы на бесконечности, когда берега трещины и грани полосы свободны от нагрузки, полученные методом СИУ. Числовые данные для КИН имеются также в работах [18, 68, 179, 180].

Эксцентрично размещенная трещина произвольной ориентации. Значения КИН для растягиваемой или изгибаемой полосы с нецентральной произвольно ориентированной трещиной (см. рис. 3.112; $\sigma = \tau = 0$) получены методом СИУ. Эти результаты приведены в табл. 3.57 и 3.58.

Таблица 3.56. **Значения КИН для центральной трещины (вершина A) в полосе при растяжении и изгибе ($\sigma_m = 3M/(2L^2)$) на бесконечности [139, 178]**

α	$\frac{l}{L}$	Растяжение		Изгиб	
		$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	$K_{II}/(p\sqrt{\pi l})$	$K_I/(\sigma_m\sqrt{\pi l})$	$K_{II}/(\sigma_m\sqrt{\pi l})$
$\frac{\pi}{6}$	0,1	0,2527	—0,4352	0,00625	—0,01083
	0,2	0,2605	—0,4416	0,01251	—0,02166
	0,3	0,2732	—0,4518	0,01882	—0,03254
	0,4	0,2900	—0,4654	0,02526	—0,04354
	0,5	0,3105	—0,4817	0,03197	—0,05479
	0,6	0,3341	—0,5002	0,03906	—0,06642
	0,7	0,3606	—0,5209	0,04669	—0,07861
	0,8	0,3900	—0,5435	0,05501	—0,09154
	0,9	0,4225	—0,5684	0,06415	—0,10540
$\frac{\pi}{3}$	0,1	0,7557	—0,4338	0,0325	—0,0187
	0,2	0,7729	—0,4364	0,0650	—0,0375
	0,3	0,8023	—0,4412	0,0978	—0,0563
	0,4	0,8452	—0,4488	0,1313	—0,0753
	0,5	0,9039	—0,4607	0,1665	—0,0948
	0,6	0,9827	—0,4787	0,2053	—0,1154
	0,7	1,0898	—0,5066	0,2507	—0,1384
	0,8	1,2417	—0,5510	0,3082	—0,1661
	0,9	1,4765	—0,6285	0,3907	—0,2047

Таблица 3.57. **Значения КИН в вершине A (над чертой) и в вершине B (под чертой) трещины в полосе при растяжении и изгибе ($\sigma_m = 3M/L^2$) на бесконечности при $L_2 = 0{,}8L$ [139, 178]**

α	$\frac{l}{L}$	Растяжение		Изгиб	
		$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	$K_{II}/(p\sqrt{\pi l})$	$K_I/(\sigma_m\sqrt{\pi l})$	$K_{II}/(\sigma_m\sqrt{\pi l})$
$\frac{\pi}{6}$	0,1	0,2528	—0,4356	0,0568	—0,0979
		0,2531	—0,4353	0,0444	—0,0762
	0,2	0,2605	—0,4436	0,0647	—0,1104
		0,2626	—0,4415	0,0400	—0,0666
	0,3	0,2721	—0,4569	0,0734	—0,1239
		0,2782	—0,4506	0,0370	—0,0575
	0,4	0,2866	—0,4752	0,0832	—0,1386
		0,2995	—0,4616	0,0351	—0,0486
	0,5	0,3039	—0,4979	0,0941	—0,1545
		0,3252	—0,4740	0,0341	—0,0397
	0,6	0,3239	—0,5245	0,1063	—0,1718
		0,3548	—0,4877	0,0337	—0,0308
	0,7	0,3471	—0,5554	0,1201	—0,1909
		0,3876	—0,5026	0,0337	—0,0216

Продолжение табл. 3.57

α	$\frac{l}{L}$	Растяжение		Изгиб	
		$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	$K_{II}/(p\sqrt{\pi l})$	$K_I/(\sigma_m\sqrt{\pi l})$	$K_{II}/(\sigma_m\sqrt{\pi l})$
$\frac{\pi}{3}$	0,1	0,7569	—0,4344	0,1839	—0,1056
		0,7566	—0,4340	0,1188	—0,0680
	0,2	0,7785	—0,4397	0,2208	—0,1254
		0,7758	—0,4363	0,0903	—0,0497
	0,3	0,8171	—0,4509	0,2619	—0,1465
		0,8077	—0,4393	0,0643	—0,0315
	0,4	0,8768	—0,4709	0,3091	—0,1696
		0,8526	—0,4429	0,0409	—0,0132
	0,5	0,9656	—0,5047	0,3665	—0,1965
		0,9122	—0,4473	0,0202	0,0054
	0,6	1,1006	—0,5619	0,4426	—0,2311
		0,9902	—0,4534	0,0027	0,0241
	0,7	1,3255	—0,6657	0,5577	—0,2830
		1,0955	—0,4627	—0,0097	0,0433

Таблица 3.58. **Значения КИН в вершине A (над чертой) и в вершине B (под чертой) нецентральной трещины в полосе при растяжении и изгибе ($\sigma_m = 3M/L^2$) на бесконечности при $L_2 = 0{,}6L$ [178].**

α	$\frac{l}{L}$	Растяжение		Изгиб	
		$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	$K_{II}/(p\sqrt{\pi l})$	$K_I/(\sigma_m\sqrt{\pi l})$	$K_{II}/(\sigma_m\sqrt{\pi l})$
$\frac{\pi}{6}$	0,1	0,2536	—0,4368	0,1077	—0,1856
		0,2545	—0,4360	0,0955	—0,1636
	0,2	0,2625	—0,4490	0,1176	—0,2013
		0,2685	—0,4430	0,0950	—0,1555
	0,3	0,2737	—0,4695	0,1290	—0,2204
		0,2914	—0,4516	0,0981	—0,1479
	0,4	0,2868	—0,4975	0,1419	—0,2429
		0,3212	—0,4607	0,1043	—0,1401
	0,5	0,3012	—0,5326	0,1567	—0,2690
		0,3564	—0,4702	0,1128	—0,1322
$\frac{\pi}{3}$	0,1	0,7609	—0,4360	0,3369	—0,1932
		0,7601	—0,4348	0,2716	—0,1552
	0,2	0,7962	—0,4483	0,3839	—0,2168
		0,7896	—0,4385	0,2511	—0,1378
	0,3	0,8627	—0,4763	0,4452	—0,2467
		0,8381	—0,4424	0,2387	—0,1203
	0,4	0,9765	—0,5317	0,5309	—0,2887
		0,9085	—0,4466	0,2361	—0,1026
	0,5	1,1826	—0,6427	0,6680	—0,3574
		1,0108	—0,4528	0,2485	—0,0853

В случае растяжения полосы данные по КИН имеются также в работе [180]. Ортотропная полоса с произвольно ориентированной внутренней трещиной изучалась в работе [110].

Две коллинеарные поперечные трещины. Пусть полоса ослаблена двумя поперечными произвольно размещенными коллинеарными трещинами. Грани полосы и берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы растягивающие усилия (рис. 3.113). Задача решена методом СИУ в работе [127]. Зависимости КИН K_I от параметров геометрии приведены на рис. 3.114 (внутренние трещины) и рис. 3.115 (внутренняя и краевая трещины). Значения КИН в случае внутренних симметрично расположенных трещин одинаковой длины имеются также в работах [124, 181].

Таблица 3.59. **Значения КИН при растяжении полосы с двумя параллельными симметричными трещинами [130]**

l/L	h/L	$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	$K_{II}/(p\sqrt{\pi l})$
0,1	0,5	0,7797	—0,1175
	1,0	0,8512	—0,0616
	1,5	0,9052	—0,0308
	2,0	0,9395	—0,0163
	5,0	0,9953	—0,0001
	10,0	1,0053	—0,00001
	20,0	1,0060	0,0000
0,2	0,5	0,7992	—0,1199
	1,0	0,8749	—0,0624
	1,5	0,9310	—0,0307
	2,0	0,9660	—0,0162
	5,0	1,0219	—0,0001
	10,0	1,0247	—0,00001
	20,0	1,0248	0,0000
0,4	0,5	0,8846	—0,2570
	1,0	0,9749	—0,0656
	1,5	1,0437	—0,0330
	2,0	1,0839	—0,0155
	5,0	1,1096	—0,0001
	10,0	1,1097	0,0000

Две параллельные симметричные трещины. Пусть полоса ослаблена

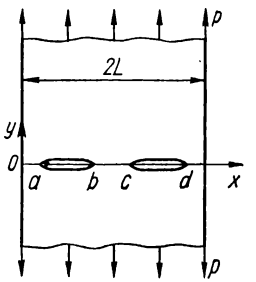


Рис. 3.113. Растяжение полосы с двумя коллинеарными поперечными трещинами.

двумя внутренними поперечными трещинами, симметрично расположенными относительно средней линии. Берега трещин и грани полосы свободны от напряжений, а на бесконечности задана растягивающая нагрузка

Таблица 3.60. **Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ при растяжении полосы с периодической системой параллельных трещин [154]**

$\frac{l}{L}$	h/L									
	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,5	1,8
0,1	0,966	0,983	0,993	0,998	1,002	1,003	1,005	1,006	1,006	1,006
0,2	0,899	0,948	0,978	0,996	1,008	1,015	1,019	1,024	1,025	1,025
0,3	0,853	0,922	0,970	1,002	1,025	1,039	1,048	1,056	1,059	1,058
0,4	0,847	0,925	0,986	1,030	1,061	1,082	1,095	1,108	1,111	1,110
0,5	0,889	0,970	1,038	1,090	1,129	1,155	1,171	1,186	1,189	1,188
0,6	0,987	1,073	1,146	1,202	1,244	1,272	1,289	1,304	1,307	1,304
0,7	1,17	1,263	1,339	1,395	1,436	1,462	1,478	1,492	1,49	1,49
0,8	...	1,61	1,69	1,74	1,78	1,80	1,81	1,82	...	...

(рис. 3.116). Задача решена методом СИУ в работе [130]. Значения КИН приведены в табл. 3.59. В работе [182] также имеются данные по КИН при растяжении полосы с двумя параллельными трещинами, когда на гранях полосы отсутствуют касательные напряжения и нормальные смещения или напряжения.

Периодическая система параллельных трещин. Полоса ослаблена периодической системой симметрично размещенных поперечных трещин.

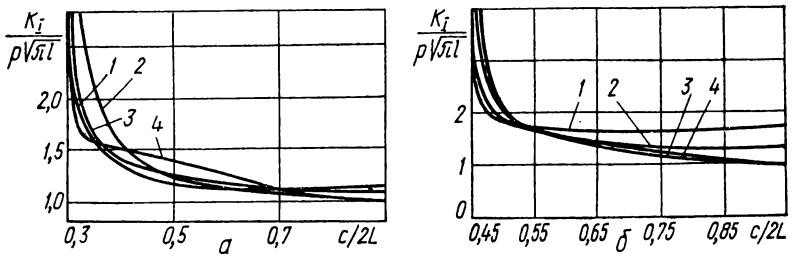


Рис. 3.114. Зависимость КИН K_I от параметра $c/2L$ при растяжении полосы с двумя внутренними трещинами при $a = 0{,}2L$, $b = 0{,}6L$, $d = 1{,}8L$ (*а*) и $a = 0{,}1L$, $b = 0{,}9L$, $d = 1{,}9L$ (*б*):

1 — $K_I\,(a)/p\sqrt{\pi\,(b-a)/2}$; *2* — $K_I\,(b)/p\sqrt{\pi\,(b-a)/2}$; *3* — $K_I\,(c)/p\sqrt{\pi\,(d-c)/2}$; *4* — $K_I\,(d)/p\sqrt{\pi\,(d-c)/2}$ [127].

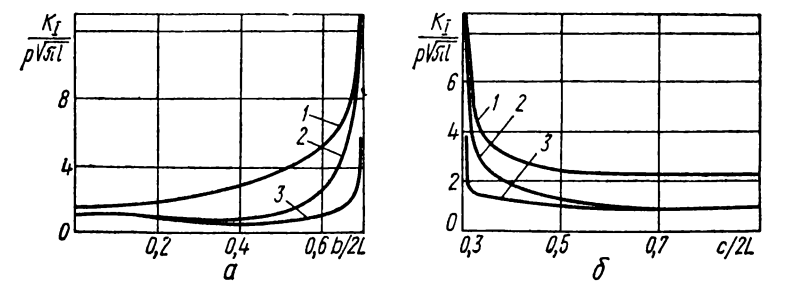


Рис. 3.115. Зависимость КИН K_I от параметров $b/2L$ и $c/2L$ при растяжении полосы с внутренней и краевой ($a = 0$) трещинами при $c = 1{,}4L$, $d = 1{,}8L$ (*а*) и $b = 0{,}6L$, $d = 1{,}8L$ (*б*):

1 — $K_I\,(b)/p\sqrt{\pi b/2}$; *2* — $K_I\,(c)/p\sqrt{\pi\,(d-c)/2}$; *3* — $K_I\,(d)/p\sqrt{\pi\,(d-c)/2}$ [127].

Берега трещин и грани полосы свободны от напряжений, а на бесконечности задана растягивающая нагрузка (рис. 3.117). Решение задачи, полученное методом рядов Лорана [154], приведено в табл. 3.60. Данные по КИН имеются также в работах [17, 176, 183, 184]. Построена аппроксимационная формула для КИН [108]. В работе [185] рассмотрено растяжение полосы с периодической системой параллельных эксцентрично размещенных трещин, а также с двумя бесконечными рядами параллельных трещин. Изучалась также ортотропная полоса с бесконечным рядом параллельных трещин [186].

Пусть грани полосы жестко защемлены, а на берегах трещин действует постоянное давление (рис. 3.118). Решение задачи построено методом

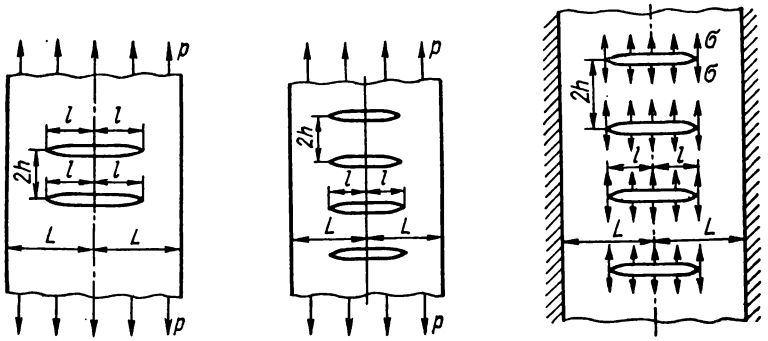


Рис. 3.116. Растяжение полосы с двумя параллельными симметричными трещинами.

Рис. 3.117. Растяжение полосы с периодической системой параллельных трещин.

Рис. 3.118. Периодическая система параллельных трещин в полосе с защемленными гранями.

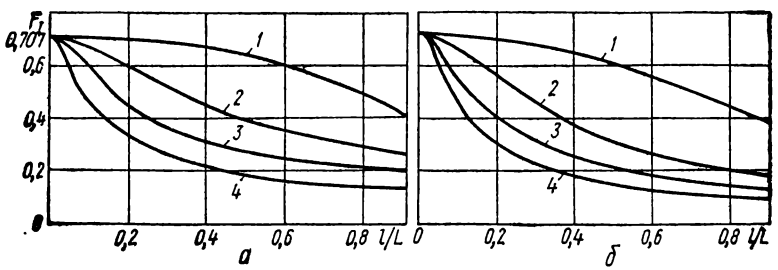


Рис. 3.119. Зависимость $F_1 = K_1/\sigma\sqrt{2\pi l}$ от параметра l/L при действии постоянного давления на берегах периодической системы параллельных трещин в полосе с защемленными гранями для $\mu = 0{,}2$ (*а*) и $\mu = 0{,}4$ (*б*): *1* — $h/L = \infty$; *2* — $h/L = 0{,}5$; *3* — $h/L = 0{,}25$; *4* — $h/L = 0{,}125$ [16, 187].

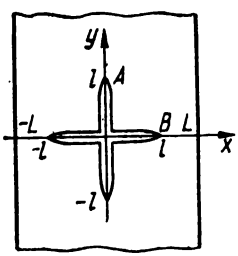


Рис. 3.120. Полоса с крестообразной трещиной.

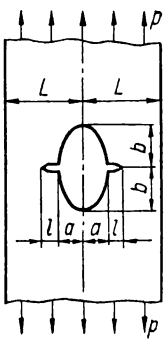


Рис. 3.121. Растяжение полосы с центральным эллиптическим отверстием и краевыми трещинами.

интегральных уравнений в работе [187]. Зависимость КИН от относительной длины трещины показана на рис. 3.119.

Крестообразная трещина. Пусть полоса ослаблена симметрично размещенной крестообразной трещиной с ветвями равной длины (рис. 3.120). Грани полосы свободны от нагрузки и напряжения на бесконечности отсутствуют. Берега трещин находятся под действием симметричной нормальной нагрузки $\sigma_y^{\pm}(x, 0) = -p \times (|x|/l)^m$ $(|x| \leqslant l)$, $\sigma_x^{\pm}(0, y) = -p(|y|/l)^m$ $(|y| \leqslant l)$. Задача решена методом интегральных уравнений в работе [188]. Результаты расчетов приведены в табл. 3.61. В работе [189] изучался также случай ортотропной полосы.

Таблица 3.61. Значения КИН для полосы с крестообразной трещиной при действии на ее берегах нормальной полиномиальной нагрузки [188]

l/L	m	$K_I(A)/(p\sqrt{2\pi l})$	$K_I(B)/(p\sqrt{2\pi l})$
10	0	0,6160	0,6123
	1	0,4093	0,4077
	2	0,3287	0,3282
	3	0,2336	0,2829
	4	0,2530	0,2525
	5	0,2307	0,2303
	6	0,2135	0,2132
	7	0,1996	0,1994
	8	0,1882	0,1879
	9	0,1785	0,1783
	10	0,1702	0,1700
8	0	0,6190	0,6132
6	0	0,6255	0,6155
4	0	0,6438	0,6223
2	0	0,7419	0,6838
1,5	0	0,8425	0,8205

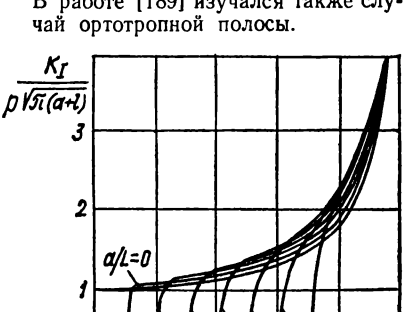


Рис. 3.122. Зависимость КИН K_I от параметра $(a + l)/L$ при растяжении полосы с центральным круговым отверстием ($a = b$) и краевыми трещинами [190].

Эллиптическое отверстие с краевыми трещинами. Полоса ослаблена центральным эллиптическим отверстием, на контур которого выходят две симметричные краевые трещины. Грани полосы, контур отверстия и берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы растягивающие напряжения (рис. 3.121). В работе [190] на основе численного решения задачи с помощью МКЭ для КИН построена аппроксимационная формула

$$K_I = p\sqrt{\pi(a + l)}F_I(\delta, \gamma, \alpha), \qquad (3.43)$$

где

$$F_I(\delta, \gamma, \alpha) = \varphi(\delta, \alpha)\psi(\delta, \gamma, \alpha), \quad \delta = b/a, \quad \alpha = (a + l)/L, \quad \gamma = a/L,$$

$$\varphi(\delta, \alpha) = [\pi\sqrt{(\operatorname{tg}\alpha_0 + g\sin 2\alpha_0)/\alpha_0}\,(1 + \varepsilon^2(2 - \varepsilon^2)/(1 - \varepsilon)) - \sqrt{1 + 2g}]/(\pi - 1),$$

$$\psi(\delta, \gamma, \alpha) = h(3\beta^{2/3\rho} - 2\sqrt{h}\beta^{\rho}), \quad g(\delta) = 0{,}13[(2/\pi)\operatorname{arctg}\delta]^2,$$

$$\varepsilon(\delta, \alpha) = \alpha(2/\pi)\operatorname{arctg}(0{,}6\sqrt[3]{\delta}), \quad \rho(\delta, \gamma) = \ln(h^{-3/2})/\ln[\gamma\delta/(\gamma(2\delta - 1) + 1)],$$

$$h(\delta) = 1 + (2/\pi)\,\mathrm{arctg}\,(1{,}5\sqrt{\delta}), \quad \alpha_0 = \pi\alpha/2, \quad \beta = (\alpha - \gamma)/(1 - \gamma),$$
$$0 \leqslant \delta \leqslant 10, \quad 0{,}1 \leqslant \gamma \leqslant 0{,}8, \quad \gamma \leqslant \alpha \leqslant 0{,}95.$$

Относительная погрешность формулы (3.43) при $F_I \geqslant 1{,}0$ не превышает 5 %.

Для кругового отверстия ($a = b$) на рис. 3.122 приведены полученные по формуле (3.43) зависимости КИН K_I от параметра α. Числовые значения КИН в этом случае имеются также в работах [17, 191—193]. Известны и данные для КИН, когда край кругового отверстия нагружен усилиями, главный вектор которых отличен от нуля [193].

3.11. Бесконечный клин с трещинами

Симметричная трещина в вершине клина. Пусть на биссектрисе угла бесконечного клина в его вершине имеется трещина, к берегам которой приложены постоянные нормальные усилия. Грани клина свободны от нагрузки (рис. 3.123). Точное решение задачи методом Винера — Хопфа построено в работах [194—197].

Ниже приведены значения КИН, полученные в работе [195]:

α/π	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$	2,8225	1,7927	1,3501	1,1215	0,9981

α/π	0,7	0,8	0,9	1,0
$K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$	0,9190	0,9091	0,9012	0,9001

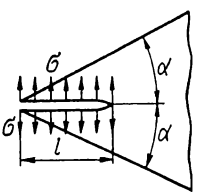


Рис. 3.123. Действие постоянной нормальной нагрузки на берегах симметричной трещины в вершине клина.

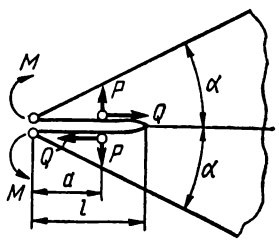


Рис. 3.124. Действие сосредоточенной нагрузки на берегах симметричной трещины в вершине клина.

При малых значениях угла α асимптотическая формула для КИН, полученная на основе решения задачи в балочном приближении, имеет вид [17]

$$K_I \to \sigma\sqrt{3l}/\alpha^{3/2} \text{ при } \alpha \to 0.$$

Пусть трещина раскрывается сосредоточенными моментами, приложенными в вершине клина (рис. 3.124; $P = Q = 0$). Значения КИН $K_I l\sqrt{l}/(M\sqrt{2\pi}) = F_I$ получены методом Винера — Хопфа в работе [198]:

α/π	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
F_I	1,6337	0,5787	0,1831	0	—0,0909

α/π	0,7	0,8	0,9	1,0
F_I	—0,1346	—0,1528	—0,1584	—0,1592

При действии на берегах трещины нормальных и сдвигающих сил, когда остальная граница тела свободна от нагрузки (см. рис. 3.124; $M = 0$), точное решение задачи методом Винера — Хопфа получено в работах [196, 199]. Численные результаты для КИН приведены на рис. 3.125. Данные по КИН для рассматриваемого вида нагрузки имеются также в работах [17, 166].

В случае действия сосредоточенных сил на берегах трещины в вершине клина (рис. 3.126) для КИН получены точные замкнутые выраже-

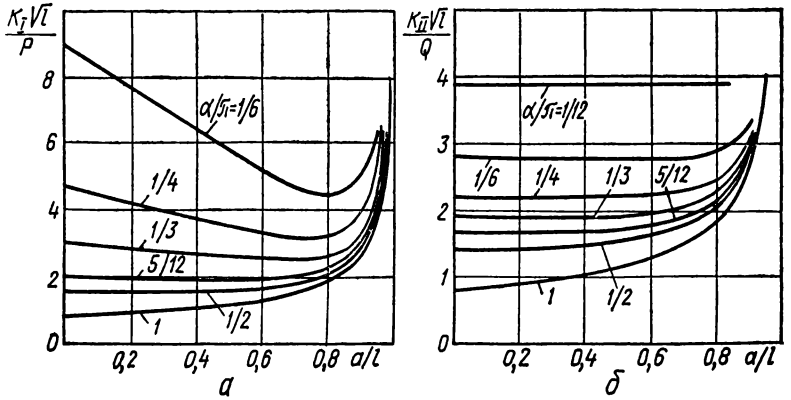


Рис. 3.125. Зависимости КИН от параметра a/l для клина с симметричной трещиной в вершине при действии на ее берегах сосредоточенных нормальных ($а$) и сдвигающих ($б$) сил [199].

ния. Когда сила приложена только к верхнему берегу трещины, то [197]

$$K_I = F/(2\sqrt{l})\,[\sin\varphi - 2\cos\varphi\sin^2\alpha/(2\alpha + \sin 2\alpha)] \times$$

$$\times \sqrt{(2\alpha + \sin 2\alpha)/(\alpha^2 - \sin^2\alpha)},$$

$$K_{II} = F/(2\sqrt{l})\,[\cos\varphi - 2\sin\varphi\sin^2\alpha/(2\alpha - \sin 2\alpha)] \times$$

$$\times \sqrt{(2\alpha - \sin 2\alpha)(\alpha^2 - \sin^2\alpha)}.$$

Если же, кроме того, на нижнем берегу трещины действует симметричная сила ($K_{II} = 0$), то [197, 200]

$$K_I = F/\sqrt{l}\,[\sin\varphi - 2\cos\varphi\sin^2\alpha/(2\alpha +$$

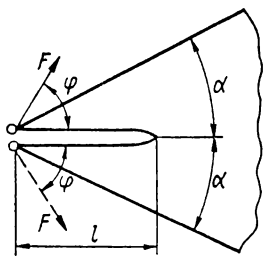
$$+ \sin 2\alpha)]\sqrt{(2\alpha + \sin 2\alpha)/(\alpha^2 - \sin^2\alpha)}.$$

В случае симметричной трещины в вершине клина, объемлющего полупространство ($\alpha > \pi/2$), в работах [168, 201] построено в квадратурах решение симметричной однородной задачи, когда берега трещины и грани клина свободны от нагрузки, однако известна асимптотика напряжений на бесконечности.

Пусть на гранях клина на симметричных участках, примыкающих к вершине, действуют постоянные нормальные усилия (касательные напряжения отсутствуют), а остальная граница тела свободна от нагрузки (рис. 3.127). Решение задачи получено методом дуальных интегральных уравнений в работе [85]. Числовые значения КИН приведены в

Таблица 3.62. **Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ для клина с симметричной трещиной в вершине при действии нормальной нагрузки на гранях [85]**

$\frac{\alpha\pi}{180}$	b/l				
	2	4	6	8	10
60	—2,0906	—2,2000	—2,1894	—2,1707	—2,1453
75	—1,2879	—1,4903	—1,5423	—1,5606	—1,5676
90	—0,7544	—0,9402	—1,0096	—1,0453	—1,0669
105	—0,3257	—0,3996	—0,4136	—0,4111	—0,4027
120	0,0476	0,1411	0,2386	0,3298	0,4138
135	0,3418	0,5955	0,8181	1,0099	1,1824
150	0,5346	0,9100	1,2184	1,4863	1,7263
165	0,6328	1,0697	1,4256	1,7336	2,0090
179,95	0,6601	1,1142	1,4832	1,8022	2,0873



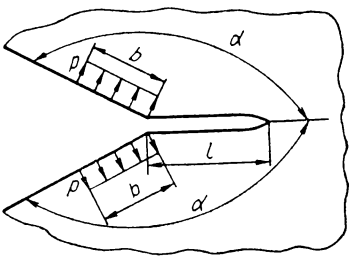


Рис. 3.126. Действие сосредоточенных сил в вершине клина с симметричной трещиной.

Рис. 3.127. Действие нормальной нагрузки на гранях клина с симметричной трещиной.

табл.3.62. В работе [202] приведены также значения КИН, когда симметричная нагрузка действует как на берегах трещины, так и на гранях клина.

Пусть грани клина жестко защемлены, а на берегах трещины заданы постоянные нормальные напряжения (рис. 3.128). Точное решение задачи построено методом Винера — Хопфа в работе [194]:

$$K_I = \sigma\sqrt{2l}\sqrt{1+D_1}/[(1+B_1)\,H_-(-i)], \tag{3.44}$$

где

$$\left.\begin{aligned} H_-(-i) &= \exp\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln H(z)\,dz}{1+z^2}\right], \\ H(z) &= z\sqrt{z^2+D_1^2}\,L(z,\alpha)/(z^2+B_1^2), \end{aligned}\right\} \tag{3.45}$$

$$L(u,\alpha) = [\varkappa \operatorname{ch} 2u\alpha + u^2(1-\cos 2\alpha) + 0{,}5(1+\varkappa^2)]/(\varkappa \operatorname{sh} 2u\alpha - u\sin 2\alpha). \tag{3.46}$$

Приближенное замкнутое решение получим, положив в формуле (3.44) $H_-(-i) \equiv 1$. Это соответствует тому, что функция $L(u, \alpha)$ (3.46)

аппроксимируется выражением

$$L(s, \alpha) \approx (s^2 + B_1^2)/(s\sqrt{s^2 + D_1^2}) \qquad (B_1^2/D_1 = (1 + \varkappa)^2/(4\varkappa\alpha - 2\sin 2\alpha)), \tag{3.47}$$

причем постоянную B_1 следует выбирать из условия наименьшего отклонения аппроксимации (3.47) от функции $L(s, \alpha)$ (3.46).

Пусть на гранях клина задано постоянное вертикальное смещение $v_y = \pm\delta$ и отсутствуют горизонтальные смещения: $v_x = 0$ (случай «а») или нормальные напряжения: $\sigma_x = 0$ (случай «б»). Берега трещины свободны от нагрузки (рис. 3.129). В работе [169] получены точные замкнутые выражения для КИН

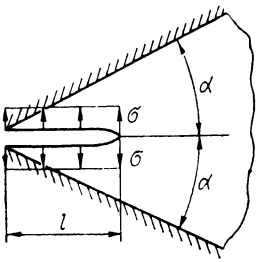


Рис. 3.128. Действие постоянного давления на берега симметричной трещины в клине с защемленными гранями.

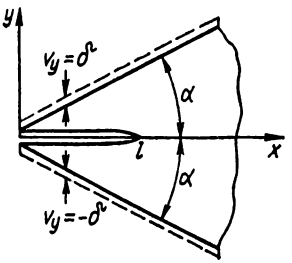


Рис. 3.129. Клин с симметричной трещиной в вершине при заданном постоянном вертикальном смещении граней $v_y = \pm\delta$.

$$K_I = 4G\delta/\sqrt{l(2\varkappa\alpha - \sin 2\alpha)}$$

в случае «а» и

$$K_I = 4G\delta\sqrt{(2\alpha + \sin 2\alpha)/(l\alpha^2)}/(\varkappa + 1)$$

в случае «б».

Если же на гранях клина заданы постоянные горизонтальные смещения $v_x = \pm\delta_1$, а вертикальные смещения отсутствуют: $v_y = 0$ (рис. 3.130), то [169]

$$K_{II} = 4G\delta_1/\sqrt{l(2\varkappa\alpha + \sin 2\alpha)}.$$

Пусть клин зажат между двумя гладкими жесткими основаниями, силы трения между основаниями и клином отсутствуют, а на берегах трещины заданы постоянные нормальные напряжения (рис. 3.131). Точное решение задачи построено методом Винера—Хопфа в работе [194]:

$$K_I = \sigma\sqrt{2l}\,(1 + B_2)/[\sqrt{1 + D_2}H_-(-i)], \tag{3.48}$$

где $H_-(-i)$ вычисляется по формуле (3.45), в которой функция $H(z)$ в данном случае имеет вид

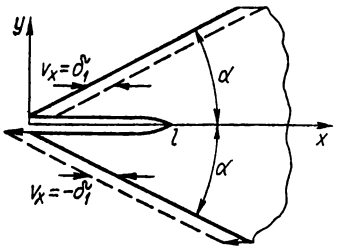
$$\left.\begin{aligned} H(z) &= (z^2 + B_2^2)\,L(z, \alpha)/\left[z\sqrt{z^2 + D_1^2}\right], \\ L(u, \alpha) &= (\operatorname{sh} 2u\alpha + u\sin 2\alpha)/(\operatorname{ch} 2u\alpha - \cos 2\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{3.49}$$

Приближенное замкнутое решение получим, положив в формуле (3.48) $H_{-}(-i) \equiv 1$. Это соответствует аппроксимации $L(u, \alpha)$ (3.49) выражением

$$L(s, \alpha) \approx \sqrt{s^2 + D_2^2}/(s^2 + B_2^2) \quad (D_2/B_2^2 = (1 - \cos 2\alpha)/(2\alpha + \sin 2\alpha)), \tag{3.50}$$

причем постоянную D_2 следует выбирать из условия наименьшего отклонения аппроксимации (3.50) от функции $L(s, \alpha)$ (3.49).

При $\alpha = \pi/n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ формула (3.48) определяет решение задачи в случае бесконечной плоскости, ослабленной звездообразной трещиной, при наличии циклической симметрии (см. п. 2.8).



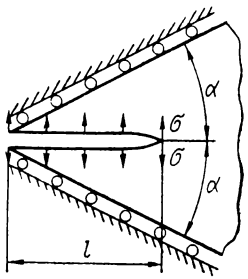
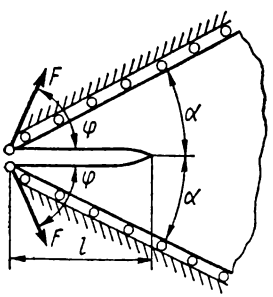


Рис. 3.130. Клин с симметричной трещиной в вершине при заданном постоянном горизонтальном смещении граней $v_x = \pm\delta_1$.

Рис. 3.131. Действие постоянного давления на берегах симметричной трещины в клине, зажатом между двумя гладкими жесткими основаниями.



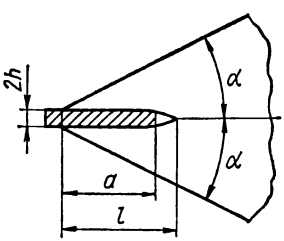


Рис. 3.132. Действие сосредоточенных сил на берегах симметричной трещины в вершине клина, зажатого между двумя гладкими жесткими основаниями.

Рис. 3.133. Расклинивание клина тонкой жесткой пластиной постоянной толщины.

Когда трещина раскрывается двумя симметричными сосредоточенными силами, приложенными в вершине клина зажатого между гладкими жесткими основаниями (рис. 3.132), точное замкнутое выражение для КИН K_I $(K_{II} = 0)$ имеет вид [200]

$$K_I = 2F \cos(\varphi - \alpha)/\sqrt{l(2\alpha + \sin 2\alpha)},$$

Расклинивание бесконечного упругого клина. Пусть в упругий клин вдоль биссектрисы его угла забивается тонкая абсолютно жесткая гладкая пластинка постоянной толщины. Впереди пластины образуется щель (рис. 3.133). Грани клина либо шарнирно закреплены (отсутствуют нормальные смещения и касательные напряжения («а»), либо свободны от напряжений («б»). Приближенное замкнутое решение задачи, полученное путем специальной аппроксимации ядра СИУ, построено в работе [23]:

$$K_I = 2Gh\sqrt{2\pi c}/[(1+\varkappa)\,kK(k)\sqrt{l}], \qquad (3.51)$$

где $c = \pi(1 - \cos 2\alpha)/(2\alpha + \sin 2\alpha)$ $(\alpha \neq \pi)$ в случае «а»; $c = \pi(2\alpha + \sin 2\alpha)/(2\alpha^2 - 2\sin^2\alpha)$ в случае «б»; $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $k = \sqrt{1-\lambda^c}$; $\lambda = a/l$.

Решение (3.51) для всех $0 < \alpha < \pi$ при $\lambda \to 0$ и $\lambda \to 1$ стремится к точному решению задачи. В работах [23, 160] построены также асимптотические решения задачи при малых значениях λ и при $\lambda \to 1$.

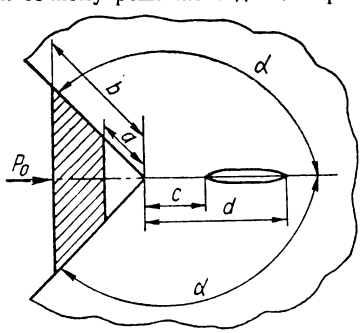


Рис. 3.134. Действие плоского штампа на грани клина с трещиной в биссекторной плоскости.

Действие жесткого штампа на грани клина. Пусть грани клина с углом раствора $2\alpha > \pi$ находятся под действием жесткого штампа с плоскими основаниями. Между штампом и клином возникает трение по закону Кулона, характеризуемое коэффициентом трения $\eta = \text{const}$. В биссекторной плоскости имеется трещина, берега которой свободны от нагрузки (рис. 3.134). Задача решена методом СИУ в работе [203]. Значения КИН приведены в табл. 3.63 и 3.64. В работе [203] получены также численные результаты для КИН, когда на грани клина с симметричной трещиной в вершине ($c = 0$) действует штамп с закругленным основанием.

Трещина на продолжении одной из сторон объемлющего полуплоскость клина. Пусть трещина выходит из вершины клина вдоль продолжения одной из его граней. Грани свободны от нагрузки, а на берегах трещины действует постоянная нагрузка (рис. 3.135) или в вершине клина приложены сосредоточенные силы (рис. 3.136). Решение задачи получено методом интегральных уравнений в работе [204]. Численные результаты

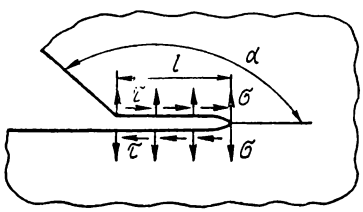


Рис. 3.135. Действие постоянной нагрузки на трещине, находящейся на продолжении одной из граней клина.

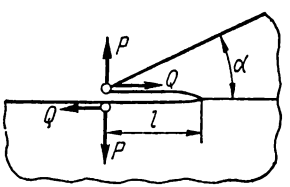


Рис. 3.136. Действие сосредоточенных сил на берегах трещины, находящейся на продолжении одной из граней клина.

Таблица 3.63. Значения КИН $K_I/(P/\sqrt{\pi h})$ ($P = P_0/[2 \sin(\pi - \alpha) + 2\eta \cos(\pi - \alpha)]$) для клина с краевой трещиной ($c = 0$) при действии на его гранях жесткого штампа ($\mu = 0{,}3$; $a/h = 1$; $b/h = 3$; $h = (b - a)/2$) [203]

$\frac{\pi\alpha}{180}$	$\frac{d}{h}$	η		
		0	0,2	0,5
150	0,001	0,8698	0,6950	0,4430
150	0,1	0,8803	0,6975	0,4336
150	0,2	0,8522	0,6729	0,4134
150	0,5	0,7767	0,6118	0,3712
120	1	0,1133	—0,1703	—0,5834
150	1	0,6876	0,5439	0,3323
165	1	0,8123	0,7426	0,6396
172,5	1	0,8391	0,8030	0,7495
180	1	0,8472	0,8419	0,8340
150	2	0,5803	0,4647	0,2930
150	3	0,5145	0,4163	0,2697
150	4	0,4683	0,3818	0,2525
150	5	0,4332	0,3553	0,2387
150	6	0,4053	0,3340	0,2270
150	7	0,3824	0,3162	0,2170
150	8	0,3630	0,3011	0,2082
150	9	0,3464	0,2880	0,2004
150	10	0,3319	0,2765	0,1934

Таблица 3.64. Значения КИН для клина с внутренней трещиной при действии на его гранях жесткого штампа ($\mu = 0{,}3$; $l = (d - c)/2$; $h = (b - a)/2$) [203]

$\frac{\pi\alpha}{180}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{c}{h}$	$\frac{d}{h}$	$\eta = 0{,}2$		$\eta = 0{,}5$	
					$\frac{K_I(c)}{P/\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(d)}{P/\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(c)}{P/\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(d)}{P/\sqrt{\pi l}}$
150	1	3	1	2	0,1249	0,0913	0,0796	0,0613
150	1	3	0,01	1,01	1,2239	0,2595	0,7520	0,1576
150	1	3	0,001	1,001	2,9296	0,2927	1,8088	0,1780
150	1	3	0	1	...	0,3846	...	0,2350
165	1	3	1	2	0,1774	0,1285	0,1570	0,1152
165	1	3	0,01	1,01	1,6319	0,3598	1,3898	0,3113
165	1	3	0,001	1,001	3,8886	0,4035	3,3126	0,3485
165	1	3	0	1	...	0,5251	...	0,4523
150	3	5	1	2	0,1106	0,0837	0,0660	0,0508
150	3	5	0,01	1,01	0,8750	0,2087	0,5493	0,1261
150	3	5	0,001	1,001	2,0836	2,2323	1,3119	0,1409
165	3	5	1	2	0,1548	0,1186	0,1344	0,1038
165	3	5	0,01	1,01	1,1486	0,2816	0,9852	0,2424
165	3	5	0,001	1,001	2,7282	0,3123	2,3407	0,2687

для КИН приведены на рис. 3.137 и 3.138. Случай действия сосредоточенных сил в произвольной точке берегов трещины рассмотрен в работе [41].

Внутренняя продольная трещина. Пусть в клине имеется внутренняя прямолинейная трещина вдоль биссекторной плоскости. Грани клина

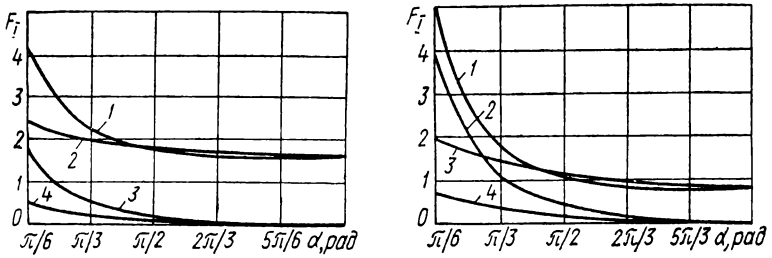


Рис. 3.137. Зависимость КИН от угла α при действии постоянной нагрузки на трещине, находящейся на продолжении одной из граней клина:

1 — $F_I = K_I/\sigma\sqrt{l}$; *2* — $F_I = K_{II}/\tau\sqrt{l}$; *3* — $F_I = -K_{II}/\sigma\sqrt{l}$; *4* — $F_I = -K_I/\tau\sqrt{l}$ [204].

Рис. 3.138. Зависимость КИН от угла α при действии сосредоточенных сил на берегах трещины, находящейся на продолжении одной из граней клина:

1 — $F_I = K_I\sqrt{l}/P$; *2* = $F_I = -K_I\sqrt{l}/P$; *3* — $F_I = K_{II}\sqrt{l}/Q$; *4* — $F_I = -K_I\sqrt{l}/Q$ [204].

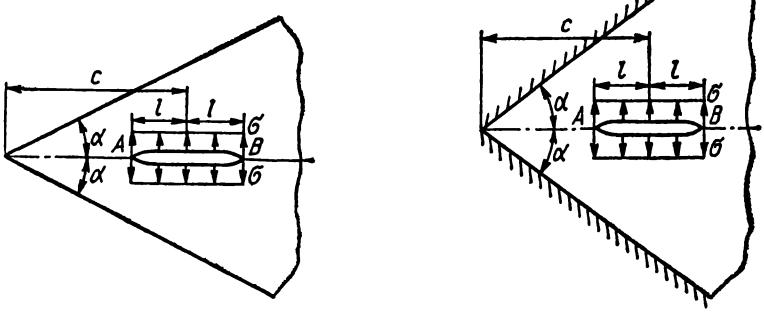


Рис. 3.139. Действие постоянного давления на берегах внутренней продольной трещины в клине со свободными гранями.

Рис. 3.140. Действие постоянного давления на берегах внутренней продольной трещины в клине с защемленными гранями.

свободны от нагрузки (рис. 3.139) или жестко защемлены (рис. 3.140). На берегах трещины заданы постоянные нормальные напряжения, а касательные напряжения отсутствуют. Решение задачи методом СИУ получено в работе [205]. Численные результаты приведены на рис. 3.141 и 3.142. В работе [148] построены асимптотические решения данных за-

дач, где также рассмотрен случай, когда на гранях клина отсутствуют нормальные смещения и касательные напряжения.

Полубесконечная трещина. Пусть в клине имеется в биссекторной плоскости прямолинейная полубесконечная трещина. Грани клина и берега трещины свободны от нагрузок. На бесконечности напряжения стремятся к нулю, но их главный вектор и главный момент отличны от нуля

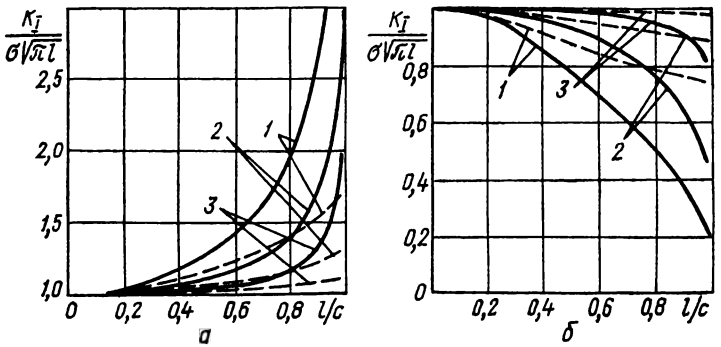


Рис. 3.141. Зависимость КИН от параметра l/c в вершинах A (сплошные линии) и B (штриховые линии) внутренней продольной трещины под давлением в клине со свободными ($а$) или защемленными ($б$; $\varkappa = 5/3$) гранями: $1 - \alpha = \frac{\pi}{3}$; $2 - \alpha = \frac{\pi}{2}$; $3 - \alpha = \frac{3\pi}{4}$ [205].

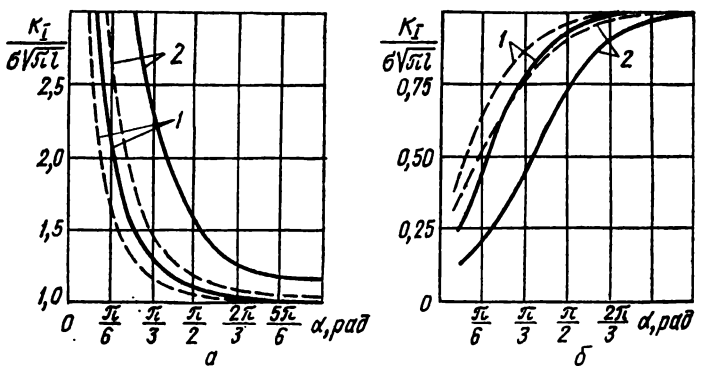


Рис. 3.142. Зависимость КИН от угла α в вершинах A (сплошные линии) и B (штриховые линии) внутренней продольной трещины под давлением в клине со свободными ($а$) и защемленными ($б$; $\varkappa = 5/3$) гранями: $1 - l/c = 0{,}5$; $2 - l/c = 0{,}85$ [205].

и считаются известными (рис. 3.143). Точное решение задачи может быть получено методом Винера — Хопфа [168, 206, 207]. КИН даются выражениями [168, 207]

$$\left.\begin{aligned} K_I &= 4\sqrt{2}\,G^{-}(1)\,M/(l\sqrt{\pi l}) + P\sqrt{(2\alpha + \sin 2\alpha)/(l(\alpha^2 - \sin^2\alpha))},\\ K_{II} &= Q\sqrt{(2\alpha - \sin 2\alpha)/(l(\alpha^2 - \sin^2\alpha))}, \end{aligned}\right\} \quad (3.52)$$

где $G^{-}(1)$ определяется формулами [168]

$$G^{-}(1) = \exp\left[-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G(it)}{t^2+1}\,dt\right],$$

$$G(it) = 2(\operatorname{sh}^2 t\alpha - t^2\sin^2\alpha)/[\operatorname{th}\pi t(\operatorname{sh} 2t\alpha + t\sin 2\alpha)].$$

Ниже приведены значения коэффициента $F_I = 4\sqrt{2/\pi}\,G^{-}(1)$ при различных углах α [168]:

$18\alpha/\pi$	1	2	3	4	5	6	7	8
F_I	52,826	20,805	12,457	8,849	6,898	5,702	4,911	4,364

$18\alpha/\pi$	9	10	11	12	13	14	15	16	17
F_I	3,979	3,699	3,505	3,372	3,287	3,236	3,208	3,196	3,192

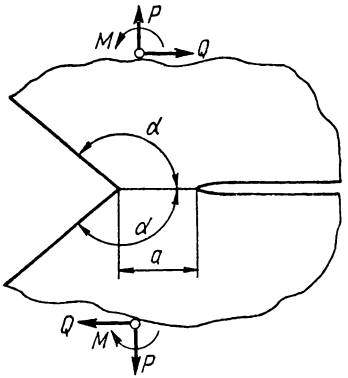
Решение (3.52) при действии растягивающих сил P и изгибающих моментов M приведено также в работе [206]. Известно [208] аналогичное решение и для клина, объемлющего полуплоскость и содержащего на продолжении одной из граней полубесконечную трещину.

Таблица 3.65. **Значения КИН при растяжении клина с краевой и полубесконечной трещинами [209]**

α	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{d}{a}$	$\frac{K_I(c)}{P/\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(b)}{P/\sqrt{\pi l}}$
$\pi/3$	10	12	11,277	1,5486	0,4414
	8	10	9,335	1,6632	0,3225
	6	8	7,424	1,8356	0,1428
	5	7	6,486	1,9579	0,0151
	4	6	5,569	2,1183	—0,1518
$\pi/2$	4	6	5,117	1,2265	0,7583
	2	4	3,192	1,3634	0,5958
	1	3	2,279	1,5151	0,4003
	0,5	2,5	1,858	1,6433	0,2238
	0	2	1,476	1,8436	...
$2\pi/3$	2	4	3,037	1,0684	0,9206
	1	3	2,056	1,1004	0,8731
	0,5	2,5	1,577	1,1319	0,8154
	0,2	2,2	1,301	1,1636	0,7350
	0	2	1,136	1,2005	...
$5\pi/6$	0,5	2,5	1,507	1,0121	0,9817
	0,2	2,2	1,210	1,0153	0,9720
	0	2	1,014	1,0198	...
π	0	2	1,0	1,0	1,0

Коллинеарные краевая и полубесконечная трещины. Пусть в клине вдоль биссекторной плоскости размещены краевая и полубесконечная трещины. Грани клина и берега трещин свободны от нагрузки. На бесконечности тело симметрично растягивается сосредоточенными силами P, линия действия которых проходит на расстоянии d от вершины клина, что обеспечивает отсутствие вращения на бесконечности (рис. 3.144). Решение задачи методом СИУ получено в работе [209]. Значения КИН приведены в табл. 3.65.

Трещина в четверти плоскости. Пусть клин, имеющий форму четверти плоскости, ослаблен внутренней трещиной, параллельной одной из граней. Берега трещины находятся под действием постоянного давления,



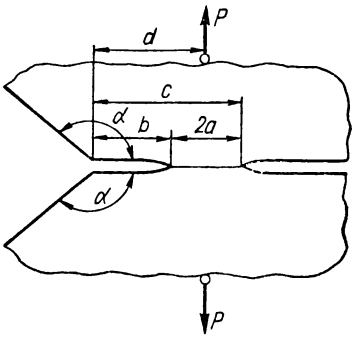
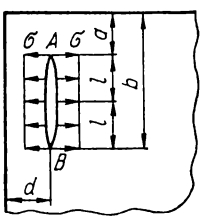


Рис. 3.143. Клин с полубесконечной трещиной в биссекторной плоскости.

Рис. 3.144. Клин с краевой и полубесконечной трещинами в биссекторной плоскости.



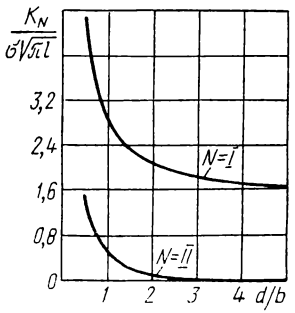


Рис. 3.145. Действие постоянного давления на берегах трещины в четверти плоскости.

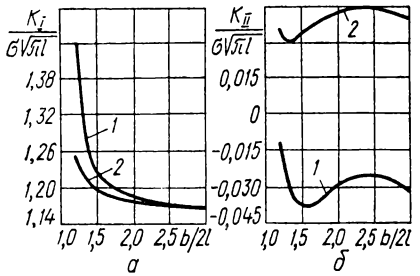
Рис. 3.146. Зависимость КИН от отношения d/b для четверти плоскости с краевой трещиной ($a = 0$) под давлением [210].

а грани клина свободны от нагрузки (рис. 3.145). Задача решена методом СИУ в работе [210]. Результаты расчетов представлены на рис. 3.146 и 3.147. В этой работе имеются также данные по КИН для внутренней трещины, наклоненной к грани под углом $\pi/4$.

3.12. Криволинейные отверстия с точками возврата на контуре в бесконечной плоскости

Остроугольные отверстия с одной точкой возврата на контуре. Пусть бесконечная плоскость ослаблена симметричным остроугольным отверстием с одной точкой возврата на контуре. Край отверстия свободен от нагрузки, а на бесконечности плоскость подвергнута растяжению внешними

напряжениями p и q, действующими во взаимно перпендикулярных направлениях, и сдвигу усилиями τ (рис. 3.148). Точное аналитическое решение такого рода задачи может быть построено методом конформных отображений в случае, когда внешность остроугольного отверстия отображается на внешность круга с помощью рациональной функции. Ниже приведены такие решения для некоторых конфигураций отверстий.



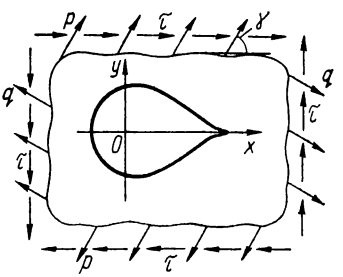


Рис. 3.147. Зависимость безразмерного КИН $K_I/\sigma\sqrt{\pi l}$ (*а*) и $K_{II}/\sigma\sqrt{\pi l}$ (*б*) в вершинах A (кривая *1*) и B (кривая *2*) внутренней трещины под давлением в четверти плоскости при $d/(2l) = 1$ [210].

Рис. 3.148. Симметричное остроугольное отверстие с одной точкой возврата на контуре при действии нагрузки на бесконечности.

Если параметрическое уравнение контура отверстия имеет вид

$$z = x(\theta) + iy(\theta) = R[\sigma_0 + (1-b)\sigma_0^{-1} + b\sigma_0^{-2}/2],$$

$$\sigma_0 = \exp(i\theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant b \leqslant 1)$$

(R — действительный параметр, имеющий размерность длины) и на бесконечности задана только растягивающая нагрузка (см. рис. 3.148; $\tau = 0$), то КИН в вершине остроугольного отверстия даются выражениями [211]

$$K_I = [(p+q) + (q-p)\cos 2\gamma]\sqrt{\pi R/(2+b)},$$

$$K_{II} = (p-q)\sin 2\gamma\sqrt{\pi R/(2+b)}.$$

При действии такой же нагрузки на бесконечности в случае отверстия, форма которого определяется уравнением

$$z = A[\sigma_0 + m\sigma_0/(\sigma_0 - n)],$$

$$\sigma_0 = \exp(i\theta),\quad A = a(1+\varepsilon)/(3-\varepsilon),\quad m = 4(1-\varepsilon)^2/[(3-\varepsilon)(1+\varepsilon)],$$

$$n = (1+\varepsilon)/(3-\varepsilon) \quad (0 \leqslant \varepsilon < 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

где a — действительный параметр, имеющий размерность длины, КИН равны [212, 213]

$$K_I = \{(p+q)[16-(1+\varepsilon)^2]/[16-2(1+\varepsilon)^2] -$$

$$-(p-q)[1+8(1+\varepsilon)^2/((3-\varepsilon)^2(8-(1+\varepsilon)^2))]\cos 2\gamma\} \times$$

$$\times\sqrt{\pi a(1-\varepsilon^2)}/(3-\varepsilon),$$

$$K_{II} = 8(p-q)\sin 2\gamma\sqrt{\pi a(1-\varepsilon^2)}(1-\varepsilon)/(3-\varepsilon)^3.$$

Пусть на бесконечности заданы растягивающие и сдвигающие усилия (см. рис. 3.148; $\gamma = \pi/2$), а уравнение контура отверстия имеет вид

$$z = a(1-\delta^2)[\sigma_0/(1-\delta) + (1-\delta)/(\sigma_0-\delta)]/2,$$

$$\sigma_0 = \exp(i\theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \delta < 1).$$

Тогда [214]

$$K_I = \sqrt{\pi a(1-\delta^2)}\,[(2+4\delta+2\delta^3+\delta^4)p - \delta^3(2+\delta)q]/[2(1+2\delta-\delta^2)],$$

$$K_{II} = \sqrt{\pi a(1-\delta^2)}\,(1-\delta^2)\tau.$$

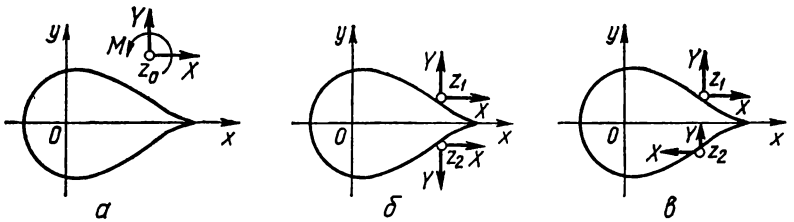


Рис. 3.149. Симметричное остроугольное отверстие с одной точкой возврата на контуре при действии сосредоточенной нагрузки.

Пусть параметрическое уравнение контура отверстия дается формулой

$$z = a\sigma_0 + b + c^2/(a\sigma_0 + b), \quad \sigma_0 = \exp(i\theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

где a, b, c — действительные постоянные. Тогда при одноосном растяжении на бесконечности (см. рис. 3.148; $\tau = 0$; $q = 0$; $\gamma = \pi/2$) КИН равны [215]

$$K_I = p\sqrt{2\pi c}\,(c^2 - 4bc + 3b^2)/(c^2 - 4bc + 2b^2),$$

$$K_{II} = 0.$$

Когда в произвольной точке плоскости, ослабленной остроугольным отверстием, форма которого определяется уравнением

$$z = \omega(\sigma_0) = \sigma_0 + (1-m)^2/(\sigma_0 - m),$$

$$\sigma_0 = \exp(i\theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 < m < 1),$$

действуют сосредоточенные силы и момент (рис. 3.149, a), то КИН даются выражением [216]

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{2\pi(1-m)}\,\{P_0/(1-\zeta_0) + \overline{Q}_0/(1-\bar{\zeta}_0) - [\overline{R} + \overline{P}_0(\omega(1/\bar{\zeta}_0) -$$

$$- \omega(\zeta_0))]/[\overline{\omega'(\zeta_0)}(1-\bar{\zeta}_0)^2] - c\overline{A}/[\omega'(t)(1-t)^2]\},$$

где $z_0 = \omega(\zeta_0)$, $t = 1/m$, $c = -((1-m)/m)^2$, $R = iM/(2\pi)$, $P_0 = -(X+iY)/[2\pi(1+\varkappa)]$, $Q_0 = \varkappa(X-iY)/[2\pi(1+\varkappa)]$, комплексная постоянная A определяется равенством

$$A = P_0/(t-\zeta_0) + \overline{Q}_0/[t(1-t\bar{\zeta}_0)] -$$

$$- [\overline{R} + \overline{P}_0(\omega(1/\bar{\zeta}_0) - \omega(\zeta_0))]/[\overline{\omega'(\zeta_0)}(1-\bar{\zeta}_0 t)^2] - c\overline{A}/[\omega'(t)(1-t^2)^2].$$

В частном случае, когда к контуру отверстия симметрично приложены ($K_{II} = 0$) сосредоточенные силы (рис. 3.149, *б*), имеем [216]

$$K_I = \sqrt{(1-m)/(2\pi)}\,\{X\,(\varkappa-1)/(\varkappa+1) + Y\operatorname{ctg}(\beta/2) + 2\,(1+m)^2\,\{[\varkappa m^3 - (\varkappa-1)\,m^2\cos\beta - m]\,X/(\varkappa+1) + m^2\sin\beta Y\}/[(1-2m\cos\beta+m^2)\,(1+2m-m^2)]\},$$

$$z_1 = \omega(e^{i\beta}),\quad z_2 = \omega(e^{-i\beta}).$$

Если же на контуре отверстия действуют антисимметрично ($K_I = 0$) приложенные сосредоточенные силы (рис. 3.149, *в*), то [216]

$$K_{II} = \sqrt{(1-m)/(2\pi)}\,\{X\operatorname{ctg}(\beta/2) - Y\,(\varkappa-1)/(\varkappa+1) - 2\,\{m^2\sin\beta X - [\varkappa m^3 - (\varkappa-1)\,m^2\sin\beta - m]\,Y/(\varkappa+1)\}/(1-2m\cos\beta+m^2)\},$$

$$z_1 = \omega(e^{i\beta}),\quad z_2 = \omega(e^{-i\beta}).$$

Пусть в бесконечной плоскости имеется несимметричное остроугольное отверстие с одной точкой возврата на контуре, параметрическое уравнение которого имеет вид

$$z = [\rho\sigma_0 + a + 1/(\rho\sigma_0 + a)]\exp(i\alpha)/2,$$
$$\sigma_0 = \exp(i\theta)\quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

где α, ρ — действительные, а a — комплексный параметры.

При действии на бесконечности двухосного растяжения (рис. 3.150) КИН в вершине отверстия определяются по формуле [217]

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{\pi}\exp(i\alpha/2)\,\{\Gamma + \bar{\Gamma}'\exp(-i\alpha) + (\rho^2 - a\bar{a})^2\,[(\rho^2 - a\bar{a})^2 - a^2]^{-1}\,\{\Gamma + (2/\rho)\exp(i\alpha)\,\{1 - a^2\bar{a}^2\,[(\rho^2 - a\bar{a})^2 - a^2]^{-1}\,[(\rho^2 - a\bar{a})^2 - \bar{a}^2]^{-1}\}^{-1}\,\{\Gamma' R\alpha^2/\rho^2 + \Gamma R\exp(-2i\alpha)\,a^2 \times [(\rho^2 - a\bar{a})^2 - \bar{a}^2]^{-1} - \bar{\Gamma}'\bar{R}a^2\bar{a}^2\exp(-2i\alpha)\,\rho^{-2}\,[(\rho^2 - a\bar{a})^2 - \bar{a}^2]^{-1} + \Gamma\bar{R}a\bar{a}^2\,[(\rho^2 - a\bar{a})^2 - a^2]^{-1}\,[(\rho^2 - a\bar{a})^2 - \bar{a}^2]^{-1}\}\}\},$$

где $\Gamma = (p+q)/4$, $\Gamma' = -(p-q)\exp(-2i\gamma)/2$, $R = (\rho/2)\exp(i\alpha)$. Отсюда при $a = \bar{a}$, $\alpha = 0$, $\rho = 1 - a$ получим случай симметричного остроугольного отверстия.

Остроугольные отверстия с двумя точками возврата на контуре. Пусть в плоскости имеется симметричное остроугольное отверстие с двумя точками возврата на контуре. Край отверстия свободен от нагрузки, а на бесконечности плоскость подвергнута растяжению внешними напряжениями p и q, действующими во взаимно перпендикулярных направлениях, и сдвигу усилиями τ (рис. 3.151). Ниже приведены точные замкнутые решения для некоторых конфигураций отверстий.

Если параметрическое уравнение контура отверстия имеет вид

$$z = R[\sigma_0 + (1-b)\,\sigma_0^{-1} + (b/3)\,\sigma_0^{-3}],\quad \sigma_0 = \exp(i\theta)\quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant b \leqslant 1)$$

(R — действительный параметр размерности длины) и на бесконечности задана только растягивающая нагрузка (см. рис. 3.151; $\tau = 0$), то КИН в правой вершине остроугольного отверстия даются выражениями [211]

$$K_I = [(p+q)\,(3-b^2) + 3\,(q-p)\cos 2\gamma]\,(3-b)^{-1}\sqrt{\pi R/(2\,(1+b))},$$

$$K_{II} = (p-q)\,3\sin 2\gamma\,(3+b)^{-1}\sqrt{\pi R/(2\,(1+b))}.$$

При действии такой же нагрузки на бесконечности в случае отверстия, форма которого определяется уравнением

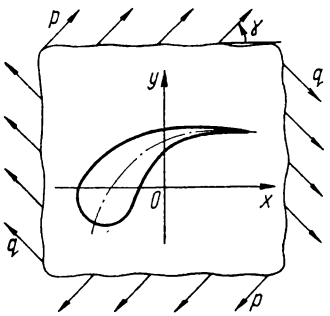
$$z = A[\sigma_0 + m\sigma_0/(\sigma_0^2 - n)], \quad \sigma_0 = \exp(i\theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

$$A = a/(2-\varepsilon), \quad m = 2(1-\varepsilon)^2/(2-\varepsilon), \quad n = \varepsilon/(2-\varepsilon) \quad (0 \leqslant \varepsilon < 1)$$

(a — действительный параметр размерности длины), КИН равны [212, 213]

$$K_I = \{(p+q)(2-\varepsilon)(2+\varepsilon^2)[2(1-\varepsilon)(1+\varepsilon^2)+\varepsilon^3]^{-1} -$$
$$- 2(p-q)[1+2\varepsilon(2-\varepsilon)^{-1}[2-\varepsilon(2-2\varepsilon+\varepsilon^2)]^{-1}]\cos 2\gamma\} \times$$
$$\times \sqrt{\pi a(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)}/(2(2-\varepsilon)),$$

$$K_{II} = 2(p-q)(1+\varepsilon)(2-\varepsilon)^{-2}\sqrt{\pi a(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)}\sin 2\gamma.$$



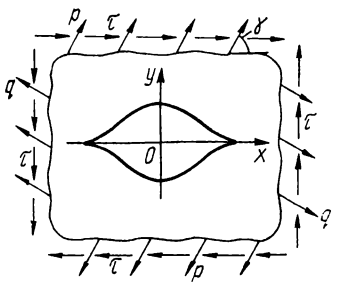


Рис. 3.150. Несимметричное остроугольное отверстие с одной точкой возврата на контуре при двухосном растяжении на бесконечности.

Рис. 3.151. Остроугольное отверстие с двумя точками возврата на контуре при действии нагрузки на бесконечности.

Пусть на бесконечности заданы растягивающие и сдвигающие усилия (см. рис. 3.151; $\gamma = \pi/2$), а уравнение контура имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} z = \omega(\sigma_0) = \\ = (a/2)[(1+\lambda)\sigma_0/2 + (1-\lambda)/(2\sigma_0) + 2\sigma_0(1+\lambda)^{-1}(\sigma_0^2 - k)^{-1}], \\ \sigma_0 = \exp(i\theta), \quad k = (\lambda-1)/(\lambda+1), \quad \lambda \geqslant 1 \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi), \end{array}\right\} \quad (3.53)$$

где a — действительный параметр размерности длины. Тогда [214]

$$K_I = \sqrt{\pi a}(1+k)^{-1}\{[2+k(1+k)(2+k-k^3)(1+k^2)^{-2}]p/2 -$$
$$- k^2(1+k)(3+2k+k^2)(1+k^2)^{-2}q/2\},$$

$$K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}(1-k)(1+k)^{-2}(1+k^2)^{-1}.$$

Для такого же отверстия в работе [217] приведены выражения для КИН, когда отверстие произвольно ориентировано по отношению к растягивающим усилиям на бесконечности (см. рис. 3.151; $\tau = 0$),

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{\pi a}(1+k)^{-1}[\Gamma + \overline{\Gamma}' - k\Gamma + (1+k)^3(1+k^2)^{-2}(\Gamma +$$
$$+ k\Gamma' - k^2\Gamma) - k^2(1+k)(1+k^2)^{-2}(\Gamma' - \overline{\Gamma}')],$$

где $\Gamma = (p+q)/4$, $\Gamma' = -(p-q)\exp(-2i\gamma)/2$.

Когда в произвольной точке плоскости, ослабленной остроугольным отверстием, форма которого определяется уравнением (3.53) при $a\,(1+\lambda)/4=1$, действуют сосредоточенные силы и момент (рис. 3.152, *а*), то КИН даются выражением [216]

$$K_{\mathrm{I}}-iK_{\mathrm{II}}=\sqrt{2\pi\,(1-k)}\,(1+k)^{-1}\,\{P_0/(1-\zeta_0)+\overline{Q}_0/(1-\overline{\zeta}_0)-$$
$$-[\overline{R}+\overline{P}_0\,(\omega\,(1/\overline{\zeta}_0)-\omega\,(\zeta_0))]/[\overline{\omega'\,(\zeta_0)}\,(1-\overline{\zeta}_0)^2]-$$
$$-d\overline{A}/[\omega'\,(t_1)\,(1-t_1)^2]-d\overline{B}/[\omega'\,(t_2)\,(1-t_2)^2]\},$$

где $z_0=\omega\,(\zeta_0)$, $t_1=1/\sqrt{k}$, $t_2=-1/\sqrt{k}$, $d=-\,(1-k)^2/(2k)$, $P_0=-\,(X+iY)/[2\pi\,(1+\varkappa)]$, $Q_0=\varkappa\,(X-iY)/[2\pi\,(1+\varkappa)]$, $R=iM/(2\pi)$, комплексные постоянные A и B определяются из системы уравнений

$$A=P_0/(t_1-\zeta_0)+\overline{Q}_0/[t_1\,(1-t_1\overline{\zeta}_0)]-$$
$$-[\overline{R}+\overline{P}_0\,(\omega\,(1/\overline{\zeta}_0)-\omega\,(\zeta_0))]/[\overline{\omega'\,(\zeta_0)}\,(1-t_1\overline{\zeta}_0)^2]-$$
$$-\overline{A}d/[\omega'\,(t_1)\,(1-t_1^2)^2]-\overline{B}d/[\omega'\,(t_2)\,(1-t_1t_2)^2],$$

$$B=P_0/(t_2-\zeta_0)+\overline{Q}_0/[t_2\,(1-t_2\overline{\zeta}_0)]-[\overline{R}+\overline{P}_0\,(\omega\,(1/\overline{\zeta}_0)-$$
$$-\omega\,(\zeta_0))]/[\overline{\omega'\,(\zeta_0)}\,(1-t_2\overline{\zeta}_0)^2]-\overline{A}d/[\omega'\,(t_1)\,(1-t_1t_2)^2]-$$
$$-\overline{B}d/[\omega'\,(t_2)\,(1-t_2^2)^2].$$

В частном случае, когда к контуру отверстия симметрично приложены ($K_{\mathrm{II}}=0$) сосредоточенные силы F (рис. 3.152, *б*), имеем [216]

$$K_{\mathrm{I}}=F\sqrt{(1-k)/(2\pi)}\,(1+k)^{-1}\,[1+2k\,(1+k)^2\,(1+k^2)^{-2}].$$

В работе [218] методом СИУ получены численные значения КИН в случае узкого отверстия с двумя точками возврата на контуре, которое авторы называют обобщенной трещиной.

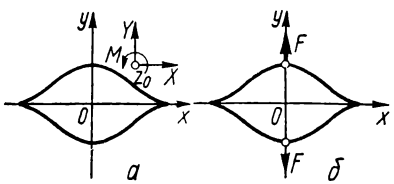


Рис. 3.152. Остроугольное отверстие с двумя точками возврата на контуре при действии сосредоточенной нагрузки.

Гипоциклоидальные отверстия. Пусть в бесконечной плоскости имеется отверстие в виде гипоциклоиды, контур которого описывается уравнением

$$z=A\,[\sigma_0+1/(n\sigma_0^n)],$$
$$A=na/(n+1)\quad(a>0),$$
$$\sigma_0=\exp(i\theta)\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi),$$

где a — радиус окружности, описанной вокруг рассматриваемого отверстия; $n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$; $n+1$ — число вершин (точек возврата на контуре отверстия). Край отверстия свободен от нагрузки, а на бесконечности плоскость подвержена двухосному растяжению напряжениями p и q, причем напряжения p направлены под углом γ к оси x. Точные выражения для КИН в k-й вершине отверстия (отсчет производится начиная с вершины, лежащей на положительной полуоси x ($k=0$), против движения часовой стрелки) приведены в работах [217, 219, 220]:

$$K_{\mathrm{I}}^{(k)}=\sqrt{\pi na}\,(n+1)^{-1}\,(n^2-n+2)^{-1}\,\{(n^2-n+2)\,(p+q)-$$
$$-(p-q)\,[n^2\cos(2\pi\,(n-1)\,k/(n+1)+2\gamma)+$$

$$+ n(n-2)\cos(4\pi k/(n+1) - 2\gamma)]\},$$

$$K_{II}^{(k)} = (p-q)\sqrt{\pi n a}\,(n+1)^{-1}\,(n^2-n+2)^{-1} \times$$

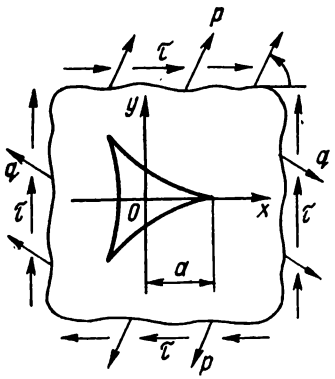
$$\times [n^2 \sin(2\pi(n-1)k/(n+1) + 2\gamma) +$$

$$+ n(n-2)\sin(4\pi k/(n+1) - 2\gamma)] \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

В частном случае отверстия в виде гипоциклоиды с тремя вершинами ($n = 2$) (см. рис. 3.153; $\tau = 0$) будет [16, 221—223]

$$K_I^{(k)} = (\sqrt{2\pi a}/3)\,[p + q - (p-q)\cos(2\gamma + 2\pi k/3)],$$

$$K_{II}^{(k)} = (\sqrt{2\pi a}/3)\,(p-q)\sin(2\gamma + 2\pi k/3) \quad (k = 0, 1, 2).$$



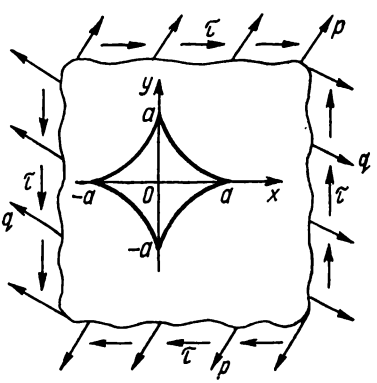


Рис. 3.153. Бесконечная плоскость с гипоциклоидальным отверстием с тремя вершинами.

Рис. 3.154. Бесконечная плоскость с отверстием в форме астроиды.

В случае отверстия в форме астроиды ($n = 3$) (рис. 3.154; $\tau = 0$) имеем [223]

$$K_I^{(k)} = (\sqrt{3\pi a}/4)\,[p + q - (3/2)\,(p-q)\cos(\pi k)\cos 2\gamma],$$

$$K_{II}^{(k)} = (3\sqrt{3\pi a}/16)\,(p-q)\cos(\pi k)\sin 2\gamma \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

При всестороннем растяжении плоскости ($p = q$), ослабленной гипоциклоидальным отверстием с $n+1$ вершиной, КИН равны [224]

$$K_I = 2p\sqrt{\pi n a}/(n+1), \quad K_{II} = 0.$$

При действии на бесконечности сдвигающих усилий $\tau_{xy}^{\infty} = \tau$ КИН в вершине отверстия $z = a$ определяются формулами [225]

$$K_I = 0, \quad K_{II} = 4\tau n\sqrt{\pi n a}/[(n+1)(n^2-n+2)].$$

В работе [216] также получены выражения для КИН, когда в плоскости с гипоциклоидальным отверстием действует сосредоточенная нагрузка.

Дефекты типа гипоциклоидальных отверстий. Пусть бесконечная плоскость, ослабленная остроугольным отверстием, находится под действием

двухосного растяжения на бесконечности усилиями p и q. Параметрическое уравнение контура отверстия имеет вид

$$z = A\,[\sigma_0 + m\sigma_0/(\sigma_0^n - t)], \quad \sigma_0 = \exp(i\theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

где $A = (a/2)\,[1 - t + \varepsilon\,(1 + t)]$, $m = (1 - \varepsilon)\,(1 - t^2)/[1 - t + \varepsilon\,(1 + t)]$, $t = [2 - (1 - \varepsilon)\,n]/[2 + (1 - \varepsilon)\,n]$, $\varepsilon = b/a$, $(n - 2)/n \leqslant \varepsilon < 1$, n — целое положительное число ($n = 3, 4, 5, \ldots$), которое обозначает количество острых вершин (точек возврата) на контуре отверстия; a и b — соответственно радиус описанной и вписанной окружности для контура отверстия. КИН в k-й вершине отверстия определяются по формулам [226]

$$K_{\mathrm{I}}^{(k)} = (n - 1 + t)/(2n)\,\sqrt{\pi a\,(1 - t)/[n - 1 + (n + 1)\,t]}\,[(p + q)\,B_1 + 2\,(p - q)\,B_2 \cos 2\,(\gamma - (n - 2)\,\pi k/n)],$$

$$K_{\mathrm{II}}^{(k)} = ((n - 1 + t)/n)\,\sqrt{\pi a\,(1 - t)/[n - 1 + (n + 1)\,t]}\,(p - q) \times B_3 \sin 2\,(\gamma - (n - 2)\,\pi k/n),$$

где

$$B_1 = 2\,[n - 1 + t^2 + nt\,(1 + t)]/[(1 + t)^2\,(n - 1 + t) - 2t\,(n - 1 + t^2)],$$

$$B_2 = -\,[6nt^3 + 2\,(n^2 + 2)\,t + 2\,(n^2 - 4)\,t + 2\,(n^2 - 3n + 2)]/[(n^2 - n + 4)\,t^2 + 4\,(n - 2)\,t + n^2 - 3n + 4],$$

$$B_3 = [-\,6t^3 + (10 - n)\,t^2 - (n^2 + 2)\,t + 2\,(n - 1)]/[(n^2 - n + 4)\,t^2 + 4\,(n - 2)\,t + n^2 - 3n + 4] \quad (k = 0, 1, \ldots, n - 1).$$

В работе [202] методом СИУ получены числовые значения КИН в случае многоугольных дефектов типа гипоциклоидальных отверстий. Анизотропные пластины с остроконечными отверстиями изучались в работе [227].

3.13. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и краевой трещиной

Краевая радиальная трещина. Пусть на контур кругового отверстия выходит радиальная трещина. На бесконечности напряжения отсутствуют. Берега трещины нагружены постоянным давлением σ, а контур отверстия свободен от нагрузки, либо на контур отверстия действует постоянное давление p, а берега трещины свободны, либо контур отверстия растягивается сосредоточенными силами F, а остальная граница свободна (рис. 3.155). Числовые значения КИН, полученные методом СИУ [1, 2], приведены в табл. 3.66. Данные по КИН при действии постоянной нагрузки на контуре отверстия и на берегах трещины приведены также в работах [17, 18, 193, 228]. Случай действия симметричных растягивающих сил на контуре отверстия рассмотрен в работе [228].

Пусть на контуре отверстия в произвольной точке приложены сосредоточенные нормальная и тангенциальная силы, а остальная граница свободна от нагрузки (рис. 3.156). Решение задачи методом СИУ получено в работе [229]. Введем обозначения:

$$K_{\mathrm{I}}^n = (N/(2R))\,\sqrt{\pi l}\,G_{\mathrm{I}}^n(\varphi), \quad K_{\mathrm{II}}^n = (N/(2R))\,\sqrt{\pi l}\,G_{\mathrm{II}}^n(\varphi),$$

$$K_{\mathrm{I}}^s = (S/(2R))\,\sqrt{\pi l}\,G_{\mathrm{I}}^s(\varphi), \quad K_{\mathrm{II}}^s = (S/(2R))\,\sqrt{\pi l}\,G_{\mathrm{II}}^s(\varphi),$$

где индексы n и s указывают на то, что значения обусловлены действием нормальной и тангенциальной силы соответственно. Функции $G_{\mathrm{I,II}}(\varphi)$

Таблица 3.66. **Значения КИН для бесконечной плоскости с круговым отверстием и краевой трещиной при действии на их контурах постоянного давления и сосредоточенных сил [1, 2]**

$\frac{l}{R}$	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I\sqrt{l}}{F\sqrt{\pi}}$	$\frac{l}{R}$	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I\sqrt{l}}{F\sqrt{\pi}}$
0	1,1215	1,1215	—	0,8	0,8908	0,4134	0,1963
0,1	1,0533	0,9357	0,0594	0,9	0,8818	0,3803	0,2010
0,2	1,0070	0,8006	0,1011	1,0	0,8740	0,3516	0,2043
0,3	0,9734	0,6976	0,1311	1,5	0,8462	0,2512	0,2089
0,4	0,9490	0,6166	0,1531	2,0	0,8286	0,1916	0,2050
0,5	0,9296	0,5511	0,1692	2,5	0,8159	0,1527	0,1986
0,6	0,9142	0,4971	0,1811	3,0	0,8062	0,1254	0,1918
0,7	0,9015	0,4518	0,1899	3,5	0,7983	0,1055	0,1852

представляют собой функции Грина, с помощью которых могут быть определены КИН при действии на контуре отверстия любой нагрузки. Если на контуре отверстия задана нормальная ($p_0 h^n(\varphi)$) и сдвигающая ($p_0 h^s(\varphi)$) нагрузки, а берега трещины свободны от нагрузки, то

$$K^q_{I,II} = \frac{1}{2} p_0 \sqrt{\pi l} \int_0^{2\pi} h^q(\varphi)\, G^q_{I,II}(\varphi)\, d\varphi \quad (q = n, s),$$

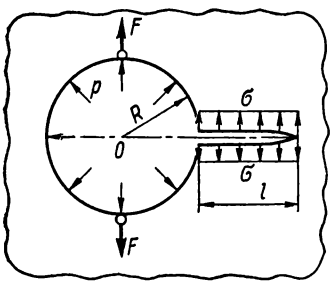


Рис. 3.155. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и радиальной трещиной при действии нагрузки на их контурах.

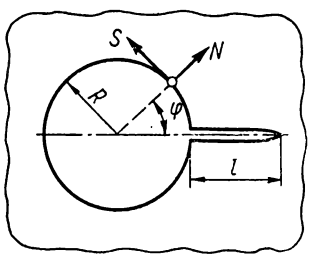


Рис. 3.156. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и радиальной трещиной при действии нормальной и тангенциальной сосредоточенных сил на контуре отверстия.

где p_0 — параметр, имеющий размерность напряжений. Применив численное интегрирование, получим

$$K^q_{I,II} = \frac{1}{2} p_0 \sqrt{\pi l} \sum_{m=1}^{M} h^q(\varphi_m)\, G^q_{I,II}(\varphi_m)\, \Delta\varphi_m \quad (q = n, s). \qquad (3.54)$$

Поскольку функции $G^q_{I,II}(\varphi)$ зависят от коэффициента Пуассона, то удобно представить их в виде

$$\left.\begin{aligned} G^q_I(\varphi) &= G^q_1(\varphi) + (2\varkappa/(\varkappa+1))\, G^q_2(\varphi), \\ G^q_{II}(\varphi) &= G^q_3(\varphi) + (2\varkappa/(\varkappa+1))\, G^q_4(\varphi) \quad (q = n, s), \end{aligned}\right\} \qquad (3.55)$$

Таблица 3.67. **Значения компоненты $G_1^n(\varphi_m)$ функции Грина [229]**

$\frac{180\Delta\varphi}{\pi}$	$\frac{180\varphi}{\pi}$	l/R										
		0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
1	0,5	—39,172	—24,554	—12,368	—8,033	—5,871	—4,584	—3,734	—3,134	—2,689	—2,346	—2,075
	1,5	—9,832	—13,256	—10,700	—7,687	—5,778	—4,554	—3,722	—3,127	—2,683	—2,341	—2,070
	2,5	—3,522	—6,317	—7,580	—6,539	—5,324	—4,354	—3,625	—3,076	—2,653	—2,322	—2,057
	3,5	—1,521	—3,305	—5,049	—5,119	—4,587	—3,964	—3,409	—2,949	—2,575	—2,271	—2,022
2	5,0	—0,405	—1,395	—2,763	—3,337	—3,393	—3,201	—2,921	—2,631	—2,363	—2,125	—1,919
	7,0	0,133	—0,406	—1,283	—1,848	—2,136	—2,226	—2,193	—2,095	—1,968	—1,831	—1,697
	9,0	0,357	0,020	—0,568	—1,012	—1,311	—1,485	—1,565	—1,578	—1,549	—1,495	—1,427
	11,0	0,472	0,240	—0,178	—0,520	—0,780	—0,963	—1,081	—1,147	—1,174	—1,173	—1,153
	13,0	0,537	0,367	0,055	—0,212	—0,430	—0,598	—0,722	—0,808	—0,863	—0,892	—0,903
	15,0	0,579	0,448	0,205	—0,009	—0,190	—0,339	—0,457	—0,547	—0,613	—0,659	—0,688
	17,0	0,606	0,502	0,307	0,132	—0,021	—0,151	—0,259	—0,346	—0,415	—0,467	—0,506
	19,0	0,626	0,540	0,379	0,233	0,103	—0,011	—0,108	—0,190	—0,257	—0,312	—0,355
5	22,5	0,648	0,584	0,463	0,351	0,250	0,159	0,078	0,007	—0,054	—0,107	—0,151
	27,5	0,666	0,620	0,533	0,451	0,375	0,306	0,243	0,185	0,134	0,088	0,047
	32,5	0,677	0,641	0,573	0,509	0,449	0,394	0,342	0,295	0,252	0,212	0,176
	37,5	0,684	0,654	0,598	0,545	0,496	0,450	0,407	0,367	0,330	0,296	0,264
	42,5	0,688	0,663	0,615	0,570	0,528	0,488	0,451	0,416	0,384	0,353	0,325
10	50,0	0,692	0,672	0,632	0,594	0,559	0,526	0,495	0,466	0,438	0,412	0,388
	60,0	0,696	0,678	0,645	0,613	0,584	0,556	0,530	0,505	0,482	0,460	0,439
	70,0	0,698	0,682	0,653	0,625	0,599	0,575	0,551	0,530	0,509	0,489	0,471
	80,0	0,699	0,685	0,658	0,633	0,609	0,586	0,565	0,545	0,526	0,508	0,491
	90,0	0,700	0,687	0,661	0,638	0,615	0,594	0,575	0,556	0,538	0,522	0,506
	100,0	0,701	0,688	0,666	0,641	0,620	0,600	0,581	0,564	0,547	0,531	0,516
15	112,5	0,701	0,689	0,666	0,644	0,624	0,605	0,587	0,570	0,554	0,539	0,525
	127,5	0,702	0,690	0,668	0,647	0,627	0,609	0,592	0,575	0,560	0,546	0,532
	142,5	0,702	0,691	0,669	0,648	0,629	0,611	0,595	0,579	0,564	0,550	0,536
	157,5	0,702	0,691	0,669	0,649	0,631	0,613	0,596	0,581	0,566	0,552	0,539
	172,5	0,702	0,691	0,670	0,650	0,631	0,614	0,597	0,582	0,567	0,553	0,540

$\frac{180\Delta\varphi}{\pi}$	$\frac{180\varphi}{\pi}$	l/R									
		0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,60	0,70	0,80	1,00
1	0,5	—1,597	—1,288	—1,074	—0,917	—0,799	—0,707	—0,574	—0,483	—0,417	—0,329
	1,5	—1,592	—1,283	—1,068	—0,912	—0,794	—0,702	—0,569	—0,479	—0,413	—0,326
	2,5	—1,584	—1,276	—1,063	—0,907	—0,789	—0,697	—0,565	—0,474	—0,409	—0,322
	3,5	—1,568	—1,266	—1,055	—0,901	—0,783	—0,692	—0,560	—0,470	—0,406	—0,319
2	5,0	—1,518	—1,238	—1,036	—0,887	—0,772	—0,683	—0,552	—0,464	—0,399	—0,314
	7,0	—1,401	—1,170	—0,992	—0,856	—0,719	—0,664	—0,539	—0,453	—0,390	—0,307
	9,0	—1,241	—1,070	—0,926	—0,809	—0,715	—0,637	—0,521	—0,439	—0,379	—0,298
	11,0	—1,060	—0,949	—0,842	—0,749	—0,669	—0,602	—0,498	—0,422	—0,365	—0,289
	13,0	—0,879	—0,818	—0,747	—0,678	—0,615	—0,559	—0,469	—0,401	—0,350	—0,278
	15,0	—0,709	—0,688	—0,648	—0,601	—0,555	—0,511	—0,436	—0,377	—0,331	—0,265
	17,0	—0,557	—0,565	—0,549	—0,522	—0,491	—0,459	—0,400	—0,351	—0,311	—0,251
	19,0	—0,424	—0,451	—0,455	—0,444	—0,426	—0,405	—0,362	—0,322	—0,288	—0,236
5	22,5	—0,233	—0,281	—0,306	—0,317	—0,317	—0,312	—0,292	—0,268	—0,246	—0,208
	27,5	—0,035	—0,094	—0,134	—0,161	—0,178	—0,188	—0,194	—0,190	—0,182	—0,163
	32,5	0,100	0,041	—0,005	—0,039	—0,064	—0,082	—0,105	—0,115	—0,119	—0,116
	37,5	0,194	0,138	0,093	0,056	0,027	0,004	—0,028	—0,048	—0,060	—0,071
	42,5	0,262	0,210	0,166	0,130	0,099	0,074	0,036	0,011	—0,007	—0,028
10	50,0	0,333	0,285	0,245	0,210	0,180	0,155	0,113	0,083	0,060	0,029
	60,0	0,391	0,350	0,314	0,282	0,254	0,229	0,188	0,155	0,129	0,091
	70,0	0,428	0,391	0,358	0,329	0,302	0,279	0,239	0,207	0,180	0,139
	80,0	0,453	0,418	0,388	0,360	0,336	0,314	0,275	0,244	0,217	0,176
	90,0	0,469	0,437	0,408	0,383	0,359	0,338	0,302	0,271	0,245	0,204
	100,0	0,481	0,451	0,423	0,399	0,377	0,356	0,321	0,292	0,267	0,226
15	112,5	0,492	0,463	0,437	0,413	0,392	0,373	0,339	0,310	0,286	0,246
	127,5	0,500	0,472	0,447	0,425	0,404	0,386	0,353	0,325	0,302	0,263
	142,5	0,505	0,478	0,454	0,432	0,412	0,394	0,362	0,335	0,312	0,274
	157,5	0,509	0,482	0,458	0,436	0,417	0,399	0,368	0,341	0,318	0,281
	172,5	0,510	0,483	0,460	0,438	0,419	0,401	0,370	0,344	0,321	0,284

Таблица 3.68. **Значения компоненты $G_2^n(\varphi_m)$ функции Грина [229]**

$\frac{180\Delta\varphi}{\pi}$	$\frac{180\varphi}{\pi}$	l/R										
		0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
1	0,5	0,700	0,687	0,662	0,639	0,617	0,597	0,578	0,561	0,544	0,528	0,514
	1,5	0,700	0,687	0,662	0,639	0,617	0,597	0,578	0,560	0,544	0,528	0,514
	2,5	0,699	0,686	0,661	0,638	0,617	0,596	0,578	0,560	0,543	0,528	0,513
	3,5	0,699	0,686	0,661	0,638	0,616	0,596	0,577	0,559	0,543	0,527	0,513
2	5,0	0,698	0,684	0,659	0,636	0,615	0,595	0,576	0,558	0,542	0,526	0,512
	7,0	0,695	0,682	0,657	0,634	0,613	0,593	0,574	0,556	0,540	0,524	0,510
	9,0	0,692	0,678	0,654	0,631	0,610	0,590	0,571	0,554	0,537	0,522	0,507
	11,0	0,687	0,674	0,650	0,627	0,606	0,586	0,568	0,550	0,534	0,519	0,504
	13,0	0,682	0,669	0,645	0,622	0,601	0,582	0,563	0,546	0,530	0,515	0,501
	15,0	0,676	0,664	0,639	0,617	0,596	0,577	0,558	0,541	0,525	0,510	0,496
	17,0	0,670	0,657	0,633	0,611	0,590	0,571	0,553	0,536	0,520	0,505	0,491
	19,0	0,662	0,650	0,626	0,604	0,584	0,564	0,547	0,530	0,514	0,500	0,486
5	22,5	0,647	0,635	0,612	0,590	0,570	0,552	0,534	0,518	0,503	0,488	0,475
	27,5	0,621	0,609	0,587	0,567	0,547	0,530	0,513	0,497	0,482	0,469	0,456
	32,5	0,591	0,579	0,558	0,539	0,520	0,504	0,488	0,473	0,459	0,446	0,433
	37,5	0,555	0,545	0,525	0,507	0,490	0,474	0,459	0,445	0,432	0,419	0,408
	42,5	0,516	0,506	0,488	0,471	0,455	0,440	0,426	0,413	0,401	0,390	0,379
10	50,0	0,450	0,442	0,425	0,411	0,397	0,384	0,372	0,360	0,350	0,340	0,330
	60,0	0,350	0,343	0,331	0,319	0,309	0,299	0,289	0,280	0,272	0,264	0,257
	70,0	0,240	0,235	0,226	0,218	0,211	0,204	0,198	0,192	0,186	0,181	0,176
	80,0	0,122	0,119	0,115	0,111	0,107	0,104	0,100	0,097	0,094	0,092	0,089
	90,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	100,0	—0,122	—0,119	—0,115	—0,111	—0,107	—0,104	—0,100	—0,097	—0,094	—0,092	—0,089
15	112,5	—0,268	—0,263	—0,253	—0,244	—0,236	—0,223	—0,221	—0,215	—0,208	—0,202	—0,197
	127,5	—0,426	—0,418	—0,403	—0,389	—0,376	—0,363	—0,352	—0,341	—0,331	—0,322	—0,313
	142,5	—0,555	—0,545	—0,525	—0,507	—0,490	—0,474	—0,459	—0,445	—0,432	—0,419	—0,408
	157,5	—0,647	—0,635	—0,612	—0,590	—0,570	—0,552	—0,534	—0,518	—0,503	—0,488	—0,475
	172,5	—0,694	—0,681	—0,656	—0,633	—0,612	—0,592	—0,573	—0,556	—0,539	—0,524	—0,509

$\frac{180\Delta\varphi}{\pi}$	$\frac{180\varphi}{\pi}$	l/R									
		0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,60	0,70	0,80	1,00
1	0,5	0,480	0,451	0,426	0,403	0,383	0,364	0,333	0,307	0,284	0,249
	1,5	0,480	0,451	0,426	0,403	0,383	0,364	0,333	0,307	0,284	0,249
	2,5	0,480	0,451	0,425	0,403	0,382	0,364	0,333	0,306	0,284	0,249
	3,5	0,480	0,451	0,425	0,402	0,382	0,364	0,332	0,306	0,284	0,248
2	5,0	0,479	0,450	0,424	0,402	0,381	0,363	0,332	0,305	0,283	0,248
	7,0	0,477	0,448	0,423	0,400	0,380	0,362	0,330	0,304	0,282	0,247
	9,0	0,475	0,446	0,421	0,398	0,378	0,360	0,329	0,303	0,281	0,246
	11,0	0,472	0,443	0,418	0,396	0,376	0,358	0,327	0,301	0,279	0,244
	13,0	0,468	0,440	0,415	0,393	0,373	0,355	0,324	0,299	0,277	0,242
	15,0	0,464	0,436	0,411	0,389	0,370	0,352	0,322	0,296	0,275	0,240
	17,0	0,459	0,432	0,407	0,385	0,366	0,349	0,318	0,293	0,272	0,238
	19,0	0,454	0,427	0,403	0,381	0,362	0,345	0,315	0,290	0,269	0,235
5	22,5	0,444	0,417	0,393	0,372	0,354	0,337	0,308	0,283	0,263	0,230
	27,5	0,426	0,400	0,378	0,358	0,339	0,323	0,295	0,272	0,252	0,221
	32,5	0,405	0,381	0,359	0,340	0,323	0,307	0,281	0,259	0,240	0,210
	37,5	0,381	0,358	0,338	0,320	0,304	0,289	0,264	0,243	0,225	0,197
	42,5	0,354	0,333	0,314	0,297	0,282	0,269	0,245	0,226	0,210	0,183
10	50,0	0,309	0,290	0,274	0,259	0,246	0,234	0,214	0,197	0,183	0,160
	60,0	0,240	0,226	0,213	0,202	0,191	0,182	0,166	0,153	0,142	0,124
	70,0	0,164	0,154	0,146	0,138	0,131	0,125	0,114	0,105	0,097	0,085
	80,0	0,083	0,078	0,074	0,070	0,066	0,063	0,058	0,053	0,049	0,043
	90,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	100,0	—0,083	—0,078	—0,074	—0,070	—0,066	—0,063	—0,058	—0,053	—0,049	—0,043
15	112,5	—0,184	—0,173	—0,163	—0,154	—0,146	—0,139	—0,127	—0,117	—0,109	—0,095
	127,5	—0,292	—0,275	—0,259	—0,245	—0,233	—0,222	—0,203	—0,187	—0,173	—0,151
	142,5	—0,381	—0,358	—0,338	—0,320	—0,304	—0,289	—0,264	—0,243	—0,226	—0,197
	157,5	—0,444	—0,417	—0,393	—0,372	—0,354	—0,337	—0,308	—0,283	—0,263	—0,230
	172,5	—0,476	—0,447	—0,422	—0,400	—0,379	—0,361	—0,330	—0,304	—0,282	—0,247

Таблица 3.69. **Значения компоненты $G_3^n(\varphi_m)$ функции Грина [229]**

$\frac{180\Delta\varphi}{\pi}$	$\frac{180\varphi}{\pi}$	l/R										
		0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
1	0,5	29,113	27,147	17,161	12,134	9,325	7,549	6,330	5,442	4,766	4,236	3,808
	1,5	3,005	7,408	9,904	8,867	7,537	6,435	5,571	4,892	4,350	3,910	3,546
	2,5	0,735	2,362	5,039	5,826	5,663	5,216	4,732	4,285	3,892	3,553	3,260
	3,5	0,278	0,979	2,639	3,687	4,065	4,062	3,889	3,655	3,409	3,174	2,956
2	5,0	0,097	0,361	1,147	1,903	2,417	2,688	2,785	2,775	2,704	2,603	2,488
	7,0	0,036	0,136	0,474	0,882	1,255	1,544	1,739	1,856	1,912	1,925	1,908
	9,0	0,017	0,065	0,236	0,464	0,704	0,921	1,101	1,237	1,334	1,396	1,432
	11,0	0,009	0,036	0,133	0,270	0,425	0,579	0,719	0,839	0,937	1,012	1,068
	13,0	0,006	0,022	0,082	0,170	0,273	0,382	0,487	0,584	0,670	0,741	0,800
	15,0	0,004	0,014	0,054	0,113	0,183	0,263	0,342	0,418	0,488	0,551	0,606
	17,0	0,003	0,010	0,037	0,079	0,130	0,188	0,248	0,307	0,364	0,417	0,465
	19,0	0,002	0,007	0,027	0,057	0,095	0,188	0,184	0,231	0,277	0,321	0,361
5	22,5	0,001	0,004	0,016	0,035	0,059	0,086	0,116	0,147	0,179	0,211	0,241
	27,5	0,001	0,002	0,009	0,019	0,033	0,048	0,066	0,085	0,104	0,124	0,144
	32,5	0	0,001	0,005	0,012	0,020	0,030	0,041	0,053	0,066	0,079	0,092
	37,5	0	0,001	0,004	0,008	0,013	0,020	0,027	0,035	0,044	0,053	0,062
	42,5	0	0,001	0,002	0,005	0,009	0,014	0,019	0,024	0,031	0,037	0,044
10	50,0	0	0	0,001	0,003	0,006	0,008	0,012	0,015	0,019	0,023	0,027
	60,0	0	0	0,001	0,002	0,003	0,005	0,007	0,009	0,011	0,014	0,016
	70,0	0	0	0,001	0,001	0,002	0,003	0,004	0,006	0,007	0,009	0,010
	80,0	0	0	0	0,001	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007
	90,0	0	0	0	0,001	0,001	0,001	0,002	0,003	0,003	0,004	0,005
	100,0	0	0	0	0	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,003	0,003
15	112,5	0	0	0	0	0	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002
	127,5	0	0	0	0	0	0	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
	142,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0,001	0,001	0,001
	157,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,001
	172,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$\frac{180\Delta\varphi}{\pi}$	$\frac{180\varphi}{\pi}$	l/R									
		0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,60	0,70	0,80	1,00
1	0,5	3,032	2,510	2,135	1,852	1,633	1,457	1,193	1,006	0,866	0,670
	1,5	2,865	2,395	2,051	1,789	1,583	1,417	1,166	0,986	0,850	0,661
	2,5	2,687	2,273	1,963	1,722	1,531	1,375	1,138	0,965	0,835	0,652
	3,5	2,497	2,144	1,870	1,652	1,476	1,332	1,108	0,944	0,820	0,643
2	5,0	2,197	1,939	1,721	1,541	1,390	1,262	1,062	0,911	0,795	0,628
	7,0	1,799	1,656	1,513	1,382	1,266	1,163	0,995	0,863	0,759	0,607
	9,0	1,440	1,385	1,306	1,220	1,137	1,059	0,923	0,812	0,721	0,583
	11,0	1,137	1,142	1,111	1,063	1,009	0,954	0,849	0,758	0,680	0,558
	13,0	0,895	0,934	0,936	0,918	0,888	0,852	0,775	0,703	0,638	0,532
	15,0	0,706	0,762	0,785	0,787	0,775	0,755	0,703	0,648	0,595	0,505
	17,0	0,560	0,622	0,657	0,672	0,674	0,666	0,634	0,594	0,553	0,477
	19,0	0,448	0,510	0,550	0,574	0,584	0,585	0,570	0,543	0,511	0,449
5	22,5	0,309	0,365	0,406	0,435	0,454	0,465	0,469	0,459	0,442	0,400
	27,5	0,192	0,234	0,269	0,298	0,319	0,336	0,354	0,359	0,355	0,336
	32,5	0,125	0,157	0,184	0,208	0,228	0,245	0,267	0,279	0,284	0,279
	37,5	0,086	0,109	0,130	0,150	0,167	0,181	0,203	0,218	0,226	0,231
	42,5	0,061	0,078	0,095	0,110	0,124	0,137	0,157	0,171	0,181	0,190
10	50,0	0,039	0,050	0,062	0,073	0,083	0,092	0,109	0,122	0,131	0,143
	60,0	0,023	0,030	0,037	0,044	0,051	0,058	0,070	0,080	0,088	0,100
	70,0	0,015	0,019	0,024	0,029	0,034	0,038	0,047	0,054	0,061	0,071
	80,0	0,010	0,013	0,016	0,020	0,023	0,026	0,032	0,038	0,043	0,051
	90,0	0,007	0,009	0,011	0,014	0,016	0,019	0,023	0,027	0,031	0,038
	100,0	0,005	0,007	0,008	0,010	0,012	0,014	0,017	0,020	0,023	0,028
15	112,5	0,003	0,004	0,006	0,007	0,008	0,009	0,012	0,014	0,016	0,020
	127,5	0,002	0,003	0,004	0,004	0,005	0,006	0,008	0,009	0,010	0,010
	142,5	0,001	0,002	0,002	0,003	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008
	157,5	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,003	0,003	0,004	0,005
	172,5	0	0	0	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001

Таблица 3.70. **Значения компоненты $G_4^n(\varphi_m)$ функции Грина [229]**

$\frac{180\Delta\varphi}{\pi}$	$\frac{180\varphi}{\pi}$	l/R										
		0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
1	0,5	—0	—0	—0	—0	—0	—0	—0	—0	—0	—0	—0,001
	1,5	—0	—0	—0	—0,001	—0,001	—0,001	—0,001	—0,001	—0,001	—0,001	—0,002
	2,5	—0	—0	—0,001	—0,001	—0,001	—0,002	—0,002	—0,002	—0,002	—0,002	—0,003
	3,5	—0	—0,001	—0,001	—0,001	—0,002	—0,002	—0,003	—0,003	—0,003	—0,003	—0,004
2	5,0	—0	—0,001	—0,001	—0,002	—0,003	—0,003	—0,004	—0,004	—0,004	—0,005	—0,005
	7,0	—0,001	—0,001	—0,002	—0,003	—0,004	—0,004	—0,005	—0,006	—0,006	—0,007	—0,007
	9,0	—0,001	—0,001	—0,003	—0,004	—0,005	—0,006	—0,006	—0,007	—0,008	—0,009	—0,009
	11,0	—0,001	—0,002	—0,003	—0,004	—0,006	—0,007	—0,008	—0,009	—0,010	—0,011	—0,012
	13,0	—0,001	—0,002	—0,004	—0,005	—0,007	—0,008	—0,009	—0,011	—0,012	—0,013	—0,014
	15,0	—0,001	—0,002	—0,004	—0,006	—0,008	—0,009	—0,011	—0,012	—0,013	—0,015	—0,016
	17,0	—0,001	—0,002	—0,005	—0,007	—0,009	—0,010	—0,012	—0,014	—0,015	—0,016	—0,018
	19,0	—0,001	—0,003	—0,005	—0,008	—0,010	—0,012	—0,014	—0,015	—0,017	—0,018	—0,020
5	22,5	—0,002	—0,003	—0,006	—0,009	—0,011	—0,014	—0,016	—0,018	—0,020	—0,021	—0,023
	27,5	—0,002	—0,004	—0,007	—0,011	—0,014	—0,017	—0,019	—0,022	—0,024	—0,026	—0,028
	32,5	—0,002	—0,004	—0,009	—0,012	—0,016	—0,019	—0,022	—0,025	—0,028	—0,030	—0,032
	37,5	—0,003	—0,005	—0,010	—0,014	—0,018	—0,022	—0,025	—0,028	—0,031	—0,034	—0,037
	42,5	—0,003	—0,006	—0,011	—0,016	—0,020	—0,024	—0,028	—0,032	—0,035	—0,038	—0,041
10	50,0	—0,003	—0,006	—0,012	—0,018	—0,023	—0,027	—0,032	—0,036	—0,040	—0,043	—0,046
	60,0	—0,004	—0,007	—0,014	—0,020	—0,026	—0,031	—0,036	—0,040	—0,045	—0,049	—0,052
	70,0	—0,004	—0,008	—0,015	—0,022	—0,028	—0,034	—0,039	—0,044	—0,048	—0,053	—0,057
	80,0	—0,004	—0,008	—0,016	—0,023	—0,029	—0,035	—0,041	—0,046	—0,051	—0,055	—0,059
	90,0	—0,004	—0,008	—0,016	—0,023	—0,030	—0,036	—0,042	—0,047	—0,052	—0,056	—0,060
	100,0	—0,004	—0,008	—0,016	—0,023	—0,029	—0,035	—0,041	—0,046	—0,051	—0,055	—0,059
15	112,5	—0,004	—0,008	—0,015	—0,021	—0,028	—0,033	—0,038	—0,043	—0,048	—0,052	—0,056
	127,5	—0,003	—0,007	—0,013	—0,018	—0,024	—0,028	—0,033	—0,037	—0,041	—0,044	—0,048
	142,5	—0,003	—0,005	—0,010	—0,014	—0,018	—0,022	—0,025	—0,028	—0,031	—0,034	—0,037
	157,5	—0,002	—0,003	—0,006	—0,009	—0,011	—0,014	—0,016	—0,018	—0,020	—0,021	—0,023
	172,5	—0,001	—0,001	—0,002	—0,003	—0,004	—0,005	—0,005	—0,006	—0,007	—0,007	—0,008

$\frac{180\Delta\varphi}{\pi}$	$\frac{180\varphi}{\pi}$	l/R									
		0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,60	0,70	0,80	1,0
1	0,5	—0,001	—0,001	—0,001	—0,001	—0,001	—0,001	—0,001	—0,001	—0,001	—0,001
	1,5	—0,002	—0,002	—0,002	—0,002	—0,002	—0,003	—0,003	—0,003	—0,003	—0,003
	2,5	—0,003	—0,003	—0,004	—0,004	—0,004	—0,004	—0,004	—0,005	—0,005	—0,005
	3,5	—0,004	—0,005	—0,005	—0,005	—0,006	—0,006	—0,006	—0,006	—0,007	—0,007
2	5,0	—0,006	—0,007	—0,007	—0,008	—0,008	—0,008	—0,009	—0,009	—0,009	—0,009
	7,0	—0,008	—0,009	—0,010	—0,011	—0,011	—0,012	—0,012	—0,013	—0,013	—0,013
	9,0	—0,011	—0,012	—0,013	—0,014	—0,015	—0,015	—0,016	—0,016	—0,017	—0,017
	11,0	—0,013	—0,015	—0,016	—0,017	—0,018	—0,018	—0,019	—0,020	—0,020	—0,021
	13,0	—0,016	—0,017	—0,019	—0,020	—0,021	—0,023	—0,023	—0,024	—0,024	—0,024
	15,0	—0,018	—0,020	—0,022	—0,023	—0,024	—0,025	—0,026	—0,027	—0,028	—0,028
	17,0	—0,020	—0,022	—0,024	—0,026	—0,027	—0,028	—0,030	—0,031	—0,031	—0,032
	19,0	—0,023	—0,025	—0,027	—0,029	—0,030	—0,031	—0,033	—0,034	—0,035	—0,035
5	22,5	—0,027	—0,029	—0,032	—0,034	—0,036	—0,037	—0,039	—0,040	—0,041	—0,042
	27,5	—0,032	—0,036	—0,038	—0,041	—0,043	—0,044	—0,047	—0,049	—0,049	—0,050
	32,5	—0,037	—0,041	—0,045	—0,048	—0,050	—0,052	—0,055	—0,056	—0,058	—0,058
	37,5	—0,042	—0,047	—0,051	—0,054	—0,056	—0,059	—0,062	—0,064	—0,065	—0,066
	42,5	—0,047	—0,052	—0,056	—0,060	—0,063	—0,065	—0,069	—0,071	—0,072	—0,073
10	50,0	—0,053	—0,059	—0,064	—0,068	—0,071	—0,074	—0,078	—0,080	—0,082	—0,083
	60,0	—0,060	—0,067	—0,072	—0,077	—0,080	—0,083	—0,088	—0,091	—0,093	—0,094
	70,0	—0,065	—0,072	—0,078	—0,083	—0,087	—0,091	—0,096	—0,099	—0,101	—0,102
	80,0	—0,068	—0,076	—0,082	—0,087	—0,091	—0,095	—0,100	—0,103	—0,106	—0,107
	90,0	—0,069	—0,077	—0,083	—0,088	—0,093	—0,096	—0,102	—0,105	—0,107	—0,109
	100,0	—0,068	—0,076	—0,082	—0,087	—0,091	—0,095	—0,100	—0,103	—0,106	—0,107
15	112,5	—0,064	—0,071	—0,077	—0,082	—0,086	—0,089	—0,094	—0,097	—0,099	—0,100
	127,5	—0,055	—0,061	—0,066	—0,070	—0,074	—0,076	—0,081	—0,083	—0,085	—0,086
	142,5	—0,042	—0,047	—0,051	—0,054	—0,056	—0,059	—0,062	—0,064	—0,065	—0,066
	157,5	—0,027	—0,029	—0,032	—0,034	—0,036	—0,037	—0,039	—0,040	—0,041	—0,042
	172,5	—0,009	—0,010	—0,011	—0,012	—0,012	—0,013	—0,013	—0,014	—0,014	—0,014

Таблица 3.71. Значения компоненты $G_1^s(\varphi_m)$ функции Грина [229]

$\frac{180\Delta\varphi}{\pi}$	$\frac{180\varphi}{\pi}$	l/R										
		0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
1	0,5	80,17	40,78	19,60	12,67	9,247	7,211	5,866	4,914	4,207	3,662	3,231
	1,5	47,51	35,55	19,91	12,98	9,444	7,342	5,961	4,987	4,266	3,712	3,274
	2,5	30,791	26,823	18,494	12,929	9,583	7,482	6,075	5,078	4,339	3,772	3,324
	3,5	22,497	20,736	16,233	12,299	9,476	7,525	6,153	5,157	4,410	3,834	3,378
2	5,0	15,940	15,193	13,096	10,846	8,887	7,328	6,124	5,197	4,475	3,905	3,447
	7,0	11,446	11,094	10,112	8,946	7,783	6,729	5,823	5,064	4,435	3,916	3,484
	9,0	8,917	8,704	8,137	7,451	6,725	6,017	5,362	4,778	4,266	3,823	3,441
	11,0	7,297	7,149	6,774	6,325	5,839	5,346	4,871	4,427	4,022	3,657	3,333
	13,0	6,171	6,059	5,787	5,468	5,121	4,764	4,410	4,070	3,750	3,454	3,183
	15,0	5,343	5,253	5,042	4,802	4,541	4,271	3,999	3,734	3,479	3,238	3,013
	17,0	4,708	4,633	4,462	4,272	4,068	3,856	3,641	3,429	3,223	3,026	2,838
	19,0	4,206	4,141	3,998	3,842	3,676	3,505	3,331	3,159	2,989	2,825	2,668
5	22,5	3,539	3,487	3,376	3,259	3,136	3,011	2,884	2,758	2,633	2,511	2,392
	27,5	2,878	2,837	2,753	2,667	2,580	2,491	2,403	2,315	2,228	2,142	2,059
	32,5	2,416	2,383	2,315	2,248	2,180	2,113	2,047	1,981	1,916	1,852	1,789
	37,5	2,075	2,046	1,990	1,935	1,880	1,826	1,774	1,721	1,670	1,621	1,572
	42,5	1,811	1,787	1,739	1,692	1,646	1,601	1,558	1,515	1,474	1,433	1,393
10	50,0	1,511	1,490	1,451	1,413	1,377	1,341	1,307	1,274	1,242	1,210	1,180
	60,0	1,220	1,204	1,173	1,143	1,114	1,087	1,061	1,036	1,011	0,988	0,965
	70,0	1,006	0,993	0,967	0,943	0,920	0,898	0,877	0,857	0,838	0,820	0,802
	80,0	0,839	0,828	0,807	0,787	0,769	0,751	0,734	0,717	0,702	0,687	0,672
	90,0	0,704	0,695	0,678	0,661	0,645	0,630	0,616	0,603	0,590	0,578	0,566
	100,0	0,591	0,583	0,569	0,555	0,542	0,529	0,518	0,506	0,496	0,486	0,476
15	112,5	0,471	0,465	0,453	0,442	0,432	0,422	0,413	0,404	0,395	0,388	0,380
	127,5	0,347	0,343	0,334	0,325	0,319	0,311	0,305	0,298	0,292	0,286	0,281
	142,5	0,289	0,236	0,230	0,225	0,219	0,214	0,210	0,205	0,201	0,197	0,194
	157,5	0,140	0,138	0,135	0,132	0,129	0,126	0,123	0,120	0,118	0,116	0,113
	172,5	0,046	0,046	0,044	0,043	0,042	0,041	0,041	0,040	0,039	0,038	0,037

$\frac{180\Delta\varphi}{\pi}$	$\frac{180\varphi}{\pi}$	l/R									
		0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,60	0,70	0,80	1,00
1	0,5	2,469	1,974	1,629	1,378	1,187	1,038	0,821	0,673	0,567	0,424
	1,5	2,501	1,999	1,651	1,396	1,203	1,052	0,833	0,684	0,575	0,431
	2,5	2,535	2,025	1,672	1,414	1,218	1,065	0,844	0,692	0,583	0,437
	3,5	2,574	2,054	1,694	1,432	1,234	1,079	0,855	0,701	0,591	0,443
2	5,0	2,630	2,098	1,730	1,461	1,258	1,100	0,871	0,714	0,602	0,452
	7,0	2,686	2,151	1,775	1,500	1,291	1,129	0,893	0,733	0,617	0,463
	9,0	2,702	2,184	1,811	1,534	1,322	1,156	0,915	0,751	0,632	0,475
	11,0	2,675	2,191	1,831	1,558	1,347	1,180	0,936	0,768	0,647	0,486
	13,0	2,611	2,171	1,833	1,570	1,363	1,198	0,953	0,784	0,661	0,497
	15,0	2,523	2,130	1,818	1,569	1,370	1,209	0,967	0,797	0,674	0,508
	17,0	2,420	2,072	1,788	1,557	1,368	1,212	0,976	0,808	0,684	0,517
	19,0	2,310	2,004	1,748	1,534	1,357	1,209	0,981	0,815	0,693	0,525
5	22,5	2,116	1,872	1,660	1,477	1,322	1,189	0,978	0,821	0,702	0,536
	27,5	1,860	1,680	1,518	1,374	1,248	1,137	0,954	0,813	0,703	0,545
	32,5	1,640	1,503	1,377	1,263	1,161	1,070	0,915	0,791	0,691	0,545
	37,5	1,445	1,347	1,247	1,155	1,072	0,996	0,866	0,758	0,670	0,537
	42,5	1,299	1,211	1,130	1,055	0,986	0,923	0,813	0,721	0,643	0,523
10	50,0	1,108	1,041	0,980	0,922	0,869	0,820	0,734	0,659	0,596	0,495
	60,0	0,912	0,862	0,817	0,775	0,736	0,700	0,635	0,578	0,530	0,450
	70,0	0,760	0,722	0,687	0,655	0,625	0,597	0,547	0,504	0,465	0,403
	80,0	0,639	0,609	0,581	0,555	0,532	0,510	0,470	0,436	0,406	0,355
	90,0	0,539	0,514	0,492	0,471	0,452	0,435	0,403	0,376	0,351	0,310
	100,0	0,454	0,434	0,415	0,399	0,383	0,369	0,343	0,321	0,302	0,268
15	112,5	0,363	0,347	0,333	0,320	0,308	0,297	0,277	0,260	0,245	0,220
	127,5	0,268	0,257	0,247	0,237	0,229	0,221	0,207	0,195	0,184	0,166
	142,5	0,185	0,177	0,170	0,164	0,158	0,153	0,143	0,135	0,128	0,116
	157,5	0,108	0,104	0,100	0,096	0,093	0,090	0,084	0,080	0,075	0,068
	172,5	0,036	0,034	0,033	0,032	0,031	0,030	0,028	0,026	0,025	0,023

Таблица 3.72. **Значения компоненты $G_2^s(\varphi_m)$ функции Грина [229]**

$\frac{180\Delta\varphi}{\pi}$	$\frac{180\varphi}{\pi}$	l/R										
		0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
1	0,5	0,006	0,006	0,006	0,006	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,004
	1,5	0,018	0,018	0,017	0,017	0,016	0,016	0,015	0,015	0,014	0,014	0,013
	2,5	0,031	0,030	0,029	0,028	0,027	0,026	0,025	0,024	0,024	0,023	0,022
	3,5	0,043	0,042	0,040	0,039	0,038	0,036	0,035	0,034	0,033	0,032	0,031
2	5,0	0,061	0,060	0,058	0,056	0,054	0,052	0,050	0,049	0,047	0,046	0,045
	7,0	0,085	0,084	0,081	0,078	0,075	0,073	0,070	0,068	0,066	0,064	0,063
	9,0	0,110	0,107	0,104	0,100	0,097	0,093	0,090	0,088	0,085	0,083	0,080
	11,0	0,134	0,131	0,126	0,122	0,118	0,114	0,110	0,107	0,104	0,101	0,098
	13,0	0,158	0,155	0,149	0,144	0,139	0,134	0,130	0,126	0,122	0,119	0,116
	15,0	0,181	0,178	0,171	0,165	0,160	0,155	0,150	0,145	0,141	0,137	0,133
	17,0	0,205	0,201	0,194	0,187	0,180	0,175	0,169	0,164	0,150	0,154	0,150
	19,0	0,228	0,224	0,216	0,208	0,201	0,194	0,188	0,182	0,177	0,172	0,167
5	22,5	0,268	0,263	0,253	0,244	0,236	0,228	0,221	0,214	0,208	0,202	0,197
	27,5	0,323	0,317	0,306	0,295	0,285	0,276	0,267	0,259	0,251	0,244	0,237
	32,5	0,376	0,369	0,356	0,343	0,332	0,321	0,311	0,301	0,292	0,284	0,276
	37,5	0,426	0,418	0,403	0,389	0,376	0,363	0,352	0,341	0,331	0,322	0,313
	42,5	0,473	0,464	0,447	0,432	0,417	0,403	0,391	0,379	0,367	0,357	0,347
10	50,0	0,536	0,526	0,507	0,489	0,473	0,457	0,443	0,429	0,417	0,405	0,393
	60,0	0,606	0,595	0,573	0,553	0,534	0,517	0,501	0,485	0,471	0,458	0,445
	70,0	0,658	0,645	0,622	0,600	0,580	0,561	0,543	0,527	0,511	0,497	0,483
	80,0	0,690	0,676	0,652	0,629	0,608	0,588	0,569	0,552	0,536	0,520	0,506
	90,0	0,700	0,687	0,662	0,639	0,617	0,597	0,578	0,560	0,544	0,528	0,514
	100,0	0,690	0,676	0,652	0,629	0,608	0,588	0,569	0,552	0,536	0,520	0,506
15	112,5	0,647	0,635	0,612	0,590	0,570	0,552	0,534	0,518	0,503	0,488	0,475
	127,5	0,555	0,545	0,525	0,507	0,490	0,474	0,459	0,445	0,432	0,419	0,408
	142,5	0,426	0,418	0,403	0,389	0,376	0,363	0,352	0,341	0,331	0,322	0,313
	157,5	0,268	0,263	0,253	0,244	0,236	0,228	0,221	0,214	0,208	0,202	0,197
	172,5	0,091	0,090	0,086	0,083	0,081	0,078	0,075	0,073	0,071	0,069	0,067

$\frac{180\Delta\varphi}{\pi}$	$\frac{180\varphi}{\pi}$	l/R									
		0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,60	0,70	0,80	1,00
1	0,5	0,004	0,004	0,004	0,004	0,003	0,003	0,003	0,003	0,002	0,002
	1,5	0,013	0,012	0,011	0,011	0,010	0,010	0,009	0,008	0,007	0,007
	2,5	0,021	0,020	0,019	0,018	0,017	0,016	0,015	0,013	0,012	0,011
	3,5	0,029	0,028	0,026	0,025	0,023	0,022	0,020	0,019	0,017	0,015
2	5,0	0,042	0,039	0,037	0,035	0,033	0,032	0,029	0,027	0,025	0,022
	7,0	0,059	0,055	0,052	0,049	0,047	0,044	0,041	0,037	0,035	0,030
	9,0	0,075	0,071	0,067	0,063	0,060	0,057	0,052	0,048	0,044	0,039
	11,0	0,092	0,086	0,081	0,077	0,073	0,070	0,064	0,059	0,054	0,047
	13,0	0,108	0,102	0,096	0,091	0,086	0,082	0,075	0,069	0,064	0,056
	15,0	0,124	0,117	0,110	0,104	0,099	0,094	0,086	0,079	0,074	0,064
	17,0	0,140	0,132	0,124	0,118	0,112	0,107	0,097	0,090	0,083	0,073
	19,0	0,156	0,147	0,139	0,131	0,125	0,119	0,108	0,100	0,093	0,081
5	22,5	0,184	0,173	0,163	0,154	0,146	0,139	0,127	0,117	0,109	0,095
	27,5	0,222	0,208	0,197	0,186	0,177	0,168	0,154	0,142	0,131	0,115
	32,5	0,258	0,243	0,229	0,217	0,206	0,196	0,179	0,165	0,153	0,134
	37,5	0,292	0,275	0,259	0,245	0,233	0,222	0,203	0,187	0,173	0,151
	42,5	0,325	0,305	0,288	0,272	0,259	0,246	0,225	0,207	0,192	0,168
10	50,0	0,368	0,346	0,326	0,309	0,293	0,279	0,255	0,235	0,218	0,191
	60,0	0,416	0,391	0,369	0,349	0,331	0,316	0,288	0,266	0,246	0,215
	70,0	0,451	0,424	0,400	0,379	0,360	0,342	0,313	0,288	0,267	0,234
	80,0	0,473	0,444	0,419	0,397	0,377	0,359	0,328	0,302	0,280	0,245
	90,0	0,480	0,451	0,426	0,403	0,383	0,364	0,333	0,307	0,284	0,249
	100,0	0,473	0,444	0,419	0,397	0,377	0,359	0,328	0,302	0,280	0,245
15	112,5	0,444	0,417	0,393	0,372	0,354	0,377	0,308	0,283	0,263	0,230
	127,5	0,381	0,358	0,338	0,320	0,304	0,289	0,264	0,243	0,226	0,197
	142,5	0,292	0,275	0,259	0,245	0,233	0,222	0,203	0,187	0,173	0,151
	157,5	0,184	0,173	0,163	0,154	0,146	0,139	0,127	0,117	0,109	0,095
	172,5	0,063	0,059	0,056	0,053	0,050	0,048	0,043	0,040	0,037	0,032

Таблица 3.73. **Значения компоненты $G_3^s(\varphi_m)$ функции Грина [229]**

$\frac{180\Delta\varphi}{\pi}$	$\frac{180\varphi}{\pi}$	l/R										
		0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
1	0,5	39,644	24,834	12,490	8,083	5,875	4,555	3,679	3,057	2,593	2,235	1,950
	1,5	10,492	13,813	11,067	7,931	5,940	4,656	3,780	3,149	2,676	2,309	2,018
	2,5	4,209	6,951	8,080	6,919	5,611	4,569	3,783	3,187	2,727	2,364	2,072
	3,5	2,217	3,967	5,618	5,588	4,966	4,268	3,651	3,139	2,722	2,381	2,100
2	5,0	1,105	2,073	3,381	3,881	3,863	3,602	3,261	2,918	2,602	2,323	2,081
	7,0	0,569	1,092	1,927	2,442	2,674	2,708	2,622	2,474	2,301	2,122	1,950
	9,0	0,346	0,670	1,225	1,630	1,886	2,015	2,049	2,019	1,948	1,854	1,750
	11,0	0,232	0,452	0,842	1,152	1,376	1,522	1,602	1,629	1,619	1,582	1,529
	13,0	0,167	0,325	0,613	0,852	1,039	1,176	1,267	1,319	1,341	1,339	1,318
	15,0	0,125	0,245	0,465	0,654	0,809	0,929	1,018	1,079	1,115	1,132	1,132
	17,0	0,098	0,192	0,365	0,517	0,645	0,750	0,832	0,892	0,934	0,961	0,973
	19,0	0,078	0,154	0,294	0,419	0,526	0,616	0,690	0,747	0,790	0,821	0,840
5	22,5	0,056	0,110	0,212	0,303	0,384	0,454	0,514	0,563	0,603	0,635	0,658
	27,5	0,038	0,074	0,143	0,206	0,263	0,313	0,358	0,397	0,430	0,457	0,480
	32,5	0,027	0,054	0,104	0,149	0,191	0,229	0,263	0,294	0,320	0,344	0,364
	37,5	0,021	0,041	0,079	0,114	0,146	0,175	0,202	0,226	0,248	0,267	0,284
	42,5	0,016	0,032	0,062	0,090	0,115	0,139	0,160	0,180	0,198	0,214	0,228
10	50,0	0,012	0,024	0,046	0,066	0,085	0,103	0,119	0,134	0,148	0,160	0,172
	60,0	0,009	0,017	0,033	0,047	0,061	0,074	0,086	0,097	0,107	0,116	0,125
	70,0	0,007	0,013	0,025	0,036	0,046	0,056	0,065	0,074	0,082	0,089	0,096
	80,0	0,005	0,010	0,020	0,029	0,037	0,045	0,052	0,059	0,065	0,071	0,077
	90,0	0,004	0,008	0,016	0,024	0,031	0,037	0,043	0,049	0,054	0,059	0,064
	100,0	0,004	0,007	0,014	0,020	0,026	0,032	0,037	0,042	0,046	0,050	0,054
15	112,5	0,003	0,006	0,012	0,017	0,022	0,027	0,031	0,035	0,039	0,043	0,046
	127,5	0,003	0,005	0,010	0,015	0,019	0,023	0,027	0,030	0,034	0,037	0,040
	142,5	0,002	0,005	0,009	0,013	0,017	0,021	0,024	0,027	0,030	0,033	0,036
	157,5	0,002	0,004	0,008	0,012	0,016	0,019	0,023	0,026	0,028	0,031	0,033
	172,5	0,002	0,004	0,008	0,012	0,015	0,019	0,022	0,025	0,027	0,030	0,032

$\frac{180\Delta\varphi}{\pi}$	$\frac{180\varphi}{\pi}$	l/R									
		0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,60	0,70	0,80	1,00
1	0,5	1,445	1,114	0,884	0,715	0,587	0,488	0,344	0,247	0,179	0,092
	1,5	1,498	1,158	0,921	0,747	0,616	0,513	0,365	0,265	0,194	0,104
	2,5	1,546	1,200	0,957	0,779	0,644	0,538	0,385	0,282	0,209	0,115
	3,5	1,583	1,236	0,990	0,808	0,670	0,562	0,405	0,299	0,224	0,127
2	5,0	1,607	1,272	1,029	0,846	0,706	0,595	0,434	0,324	0,245	0,144
	7,0	1,575	1,281	1,055	0,880	0,741	0,631	0,467	0,353	0,272	0,165
	9,0	1,484	1,248	1,052	0,892	0,761	0,655	0,493	0,379	0,296	0,185
	11,0	1,359	1,182	1,022	0,883	0,765	0,666	0,511	0,399	0,316	0,203
	13,0	1,222	1,098	0,973	0,857	0,755	0,666	0,522	0,414	0,332	0,219
	15,0	1,109	1,006	0,912	0,820	0,733	0,655	0,524	0,423	0,344	0,233
	17,0	0,962	0,913	0,847	0,774	0,704	0,637	0,520	0,426	0,352	0,244
	19,0	0,851	0,825	0,780	0,726	0,669	0,613	0,511	0,426	0,356	0,252
5	22,5	0,689	0,689	0,670	0,639	0,602	0,563	0,486	0,416	0,356	0,262
	27,5	0,519	0,535	0,536	0,526	0,509	0,487	0,438	0,389	0,342	0,264
	32,5	0,401	0,423	0,432	0,433	0,427	0,417	0,388	0,354	0,320	0,258
	37,5	0,318	0,340	0,353	0,359	0,360	0,356	0,340	0,318	0,294	0,247
	42,5	0,258	0,279	0,293	0,301	0,305	0,305	0,298	0,285	0,268	0,232
10	50,0	0,196	0,214	0,227	0,237	0,243	0,246	0,246	0,240	0,231	0,208
	60,0	0,143	0,158	0,170	0,179	0,185	0,190	0,194	0,194	0,190	0,179
	70,0	0,111	0,123	0,133	0,140	0,147	0,151	0,157	0,159	0,159	0,153
	80,0	0,089	0,099	0,107	0,114	0,120	0,124	0,130	0,133	0,135	0,132
	90,0	0,074	0,083	0,090	0,096	0,101	0,105	0,111	0,114	0,116	0,116
	100,0	0,063	0,071	0,077	0,083	0,087	0,091	0,096	0,100	0,102	0,104
15	112,5	0,054	0,061	0,066	0,071	0,075	0,078	0,083	0,087	0,089	0,091
	127,5	0,047	0,052	0,057	0,061	0,065	0,068	0,073	0,076	0,079	0,081
	142,5	0,042	0,047	0,051	0,055	0,059	0,061	0,066	0,069	0,072	0,074
	157,5	0,039	0,044	0,048	0,052	0,055	0,057	0,062	0,065	0,067	0,070
	172,5	0,038	0,042	0,047	0,050	0,053	0,056	0,060	0,063	0,065	0,068

Таблица 3.74. **Значения компоненты $G_4^s(\varphi_m)$ функции Грина [229]**

$\frac{180\Delta\varphi}{\pi}$	$\frac{180\varphi}{\pi}$	l/R										
		0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
1	0,5	—0,004	—0,008	—0,016	—0,023	—0,030	—0,036	—0,042	—0,047	—0,052	—0,056	—0,060
	1,5	—0,004	—0,008	—0,016	—0,023	—0,030	—0,036	—0,042	—0,047	—0,052	—0,056	—0,060
	2,5	—0,004	—0,008	—0,016	—0,023	—0,030	—0,036	—0,041	—0,047	—0,052	—0,056	—0,060
	3,5	—0,004	—0,008	—0,016	—0,023	—0,030	—0,036	—0,041	—0,047	—0,051	—0,056	—0,060
2	5,0	—0,004	—0,008	—0,016	—0,023	—0,030	—0,036	—0,041	—0,047	—0,051	—0,056	—0,060
	7,0	—0,004	—0,008	—0,016	—0,023	—0,030	—0,036	—0,041	—0,046	—0,051	—0,056	—0,060
	9,0	—0,004	—0,008	—0,016	—0,023	—0,029	—0,035	—0,041	—0,046	—0,051	—0,055	—0,059
	11,0	—0,004	—0,008	—0,016	—0,023	—0,029	—0,035	—0,041	—0,046	—0,051	—0,055	—0,059
	13,0	—0,004	—0,008	—0,016	—0,023	—0,029	—0,035	—0,040	—0,046	—0,050	—0,055	—0,059
	15,0	—0,004	—0,008	—0,016	—0,022	—0,029	—0,035	—0,040	—0,045	—0,050	—0,054	—0,058
	17,0	—0,004	—0,008	—0,015	—0,022	—0,028	—0,034	—0,040	—0,045	—0,049	—0,054	—0,058
	19,0	—0,004	—0,008	—0,015	—0,022	—0,028	—0,034	—0,039	—0,044	—0,049	—0,053	—0,057
5	22,5	—0,004	—0,008	—0,015	—0,021	—0,028	—0,033	—0,038	—0,043	—0,048	—0,052	—0,056
	27,5	—0,004	—0,007	—0,014	—0,021	—0,026	—0,032	—0,037	—0,041	—0,046	—0,050	—0,053
	32,5	—0,004	—0,007	—0,014	—0,020	—0,025	—0,030	—0,035	—0,039	—0,044	—0,047	—0,051
	37,5	—0,003	—0,007	—0,013	—0,018	—0,024	—0,028	—0,033	—0,037	—0,041	—0,044	—0,048
	42,5	—0,003	—0,006	—0,012	—0,017	—0,022	—0,026	—0,031	—0,034	—0,038	—0,041	—0,044
10	50,0	—0,003	—0,005	—0,010	—0,015	—0,019	—0,023	—0,027	—0,030	—0,033	—0,036	—0,039
	60,0	—0,002	—0,004	—0,008	—0,012	—0,015	—0,018	—0,021	—0,023	—0,026	—0,028	—0,030
	70,0	—0,001	—0,003	—0,005	—0,008	—0,010	—0,012	—0,014	—0,016	—0,018	—0,019	—0,021
	80,0	—0,001	—0,001	—0,003	—0,004	—0,005	—0,006	—0,007	—0,008	—0,009	—0,010	—0,010
	90,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	100,0	0,001	0,001	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	0,010
15	112,5	0,002	0,003	0,006	0,009	0,011	0,014	0,016	0,018	0,020	0,021	0,023
	127,5	0,003	0,005	0,010	0,014	0,018	0,022	0,025	0,028	0,031	0,034	0,037
	142,5	0,003	0,007	0,013	0,018	0,024	0,028	0,033	0,037	0,041	0,044	0,048
	157,5	0,004	0,008	0,015	0,021	0,028	0,033	0,038	0,043	0,048	0,052	0,056
	172,5	0,004	0,008	0,016	0,023	0,030	0,036	0,041	0,046	0,051	0,056	0,060

$\frac{180\Delta\varphi}{\pi}$	$\frac{180\varphi}{\pi}$	l/R									
		0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,60	0,70	0,80	1,00
1	0,5	—0,069	—0,077	—0,083	—0,088	—0,093	—0,096	—0,102	—0,105	—0,107	—0,109
	1,5	—0,069	—0,077	—0,083	—0,088	—0,093	—0,096	—0,102	—0,105	—0,107	—0,109
	2,5	—0,069	—0,077	—0,083	—0,088	—0,093	—0,096	—0,102	—0,105	—0,107	—0,109
	3,5	—0,069	—0,077	—0,083	—0,088	—0,093	—0,096	—0,101	—0,105	—0,107	—0,108
2	5,0	—0,069	—0,077	—0,083	—0,088	—0,092	—0,096	—0,101	—0,105	—0,107	—0,108
	7,0	—0,069	—0,076	—0,083	—0,088	—0,092	—0,096	—0,101	—0,104	—0,106	—0,108
	9,0	—0,069	—0,076	—0,082	—0,087	—0,092	—0,095	—0,100	—0,104	—0,106	—0,107
	11,0	—0,068	—0,076	—0,082	—0,087	—0,091	—0,095	—0,100	—0,103	—0,105	—0,107
	13,0	—0,068	—0,075	—0,081	—0,086	—0,090	—0,094	—0,099	—0,102	—0,104	—0,106
	15,0	—0,067	—0,074	—0,080	—0,085	—0,090	—0,093	—0,098	—0,101	—0,104	—0,105
	17,0	—0,066	—0,074	—0,080	—0,085	—0,089	—0,092	—0,097	—0,100	—0,102	—0,104
	19,0	—0,066	—0,073	—0,079	—0,084	—0,088	—0,091	—0,096	—0,099	—0,101	—0,103
5	22,5	—0,064	—0,071	—0,077	—0,082	—0,086	—0,089	—0,093	—0,097	—0,099	—0,100
	27,5	—0,062	—0,068	—0,074	—0,078	—0,082	—0,085	—0,090	—0,093	—0,095	—0,096
	32,5	—0,059	—0,065	—0,070	—0,075	—0,078	—0,081	—0,086	—0,089	—0,090	—0,092
	37,5	—0,055	—0,061	—0,066	—0,070	—0,074	—0,076	—0,081	—0,083	—0,085	—0,086
	42,5	—0,051	—0,057	—0,061	—0,065	—0,068	—0,071	—0,075	—0,077	—0,079	—0,080
10	50,0	—0,045	—0,049	—0,054	—0,057	—0,060	—0,062	—0,065	—0,068	—0,069	—0,070
	60,0	—0,035	—0,038	—0,042	—0,044	—0,046	—0,048	—0,051	—0,053	—0,054	—0,054
	70,0	—0,024	—0,026	—0,028	—0,030	—0,032	—0,033	—0,035	—0,036	—0,037	—0,037
	80,0	—0,012	—0,013	—0,014	—0,015	—0,016	—0,017	—0,018	—0,018	—0,019	—0,019
	90,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	100,0	0,012	0,013	0,014	0,015	0,016	0,017	0,018	0,018	0,019	0,019
15	112,5	0,027	0,029	0,032	0,034	0,036	0,037	0,039	0,040	0,041	0,042
	127,5	0,042	0,047	0,051	0,054	0,056	0,059	0,062	0,064	0,065	0,066
	142,5	0,055	0,061	0,066	0,070	0,074	0,076	0,081	0,083	0,085	0,086
	157,5	0,064	0,071	0,077	0,082	0,086	0,089	0,094	0,097	0,099	0,100
	172,5	0,069	0,076	0,083	0,088	0,092	0,096	0,101	0,104	0,106	0,108

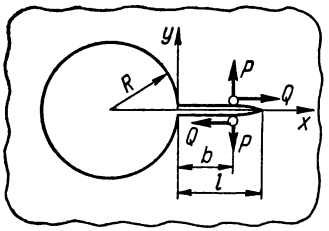


Рис. 3.157. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и радиальной трещиной при действии сосредоточенных сил на берегах трещины.

где компоненты $G_k^q(\varphi)$ $(k = \overline{1,4})$ не зависят от упругих постоянных. Значения функций $G_k^q(\varphi)$ приведены в табл. 3.67—3.74. С помощью этих данных и формул (3.54) и (3.55) легко найти КИН в произвольном случае нагружения. В работах [230, 231] приведены значения КИН для некоторых частных видов несамоуравновешенной распределенной нагрузки, действующей на краю отверстия (см. п. 3.14). Действие нормальной сосредоточенной силы в произвольной точке контура отверстия изучалось в работах [232, 233].

Пусть на противоположных берегах трещины действуют растягивающие и сдвигающие сосредоточенные силы, а остальная граница свободна от нагрузки (рис. 3.157). Решение задачи при $Q = 0$ получено методом конформных отображений в работе [234]. КИН определяется по формуле

$$K_I = (P/\sqrt{\pi l})\, F_I(\lambda, \beta), \quad \lambda = l/R, \quad \beta = b/l,$$

где функция $F_I(\lambda, \beta)$ протабулирована в табл. 3.75. В этой же работе приведена аппроксимационная формула для функции $F_I(\lambda, \beta)$:

$$F_I(\lambda, \beta) = \sqrt{2\beta/(1-\beta)} + \sum_{m=1}^{5}\sum_{n=0}^{3} C_{mn}\alpha^{m/2}\beta^{n/2}\left[2(1+F_\beta)/\sqrt{1-\beta^2} - \sqrt{2\beta/(1-\beta)}\right], \tag{3.56}$$

где $\alpha = 1/(1+\lambda)$, $F_\beta = (1-\beta^2)(0{,}2945 - 0{,}3912\beta^2 + 0{,}7635\ \beta^4 - 0{,}9942\beta^6 + 0{,}5094\beta^8)$, а значения коэффициентов C_{mn} приведены в табл. 3.76. Функция $F_I(\lambda, \beta)$ представляет собой функцию Грина; с ее помощью определяется КИН при действии на берегах трещины любой симметричной нагрузки $\sigma_y^{\pm}(x, 0) = -p(x/l)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$:

$$K_I = \sqrt{\frac{l}{\pi}} \int_0^1 p(\beta)\, F_I(\lambda, \beta)\, d\beta. \tag{3.57}$$

На основании формул (3.56) и (3.57) в работе [235] при действии на берегах трещин полиномиальной нагрузки

$$p(x/l) = \sum_{j=0}^{10} S_j (x/R)^j = \sum_{j=0}^{10} S_j \lambda^j \beta^j$$

получен КИН в виде

$$K_I = \sqrt{\frac{l}{\pi}} \sum_{j=0}^{10} S_j \lambda^j \sum_{m=0}^{5} T_{mj}\alpha^{m/2},$$

где коэффициенты T_{mj} протабулированы в табл. 3.77. Аналогичное нагружение плоскости с круговым отверстием и краевой трещиной рассматривалось также в работе [236].

Таблица 3.75. **Значения функции $F_I(\lambda, \beta)$ [234]**

λ	β										
	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	2,589	2,589	2,588	2,590	2,602	2,636	2,710	2,845	3,086	3,554	4,739
0,10	2,312	2,313	2,316	2,328	2,346	2,404	2,503	2,661	2,941	...	...
0,20	2,075	2,077	2,081	2,101	2,147	2,224	2,339	2,524	2,815	3,344	...
0,30	1,902	1,904	1,911	1,943	2,005	2,097	2,227	2,423	2,731	3,283	4,577
0,40	1,772	1,788	1,796	1,832	1,903	2,004	2,149	2,356	2,677	3,232	4,523
0,60	1,587	1,603	1,614	1,668	1,759	1,875	2,032	2,255	2,593	3,164	4,477
0,80	1,460	1,476	1,492	1,560	1,662	1,790	1,957	2,191	2,541	3,126	4,445
1,00	1,367	1,383	1,403	1,482	1,593	1,727	1,903	2,145	2,500	3,095	4,425
1,25	1,278	1,295	1,320	1,412	1,527	1,669	1,853	2,101	2,466	3,069	4,406
1,50	1,209	1,227	1,257	1,357	1,478	1,625	1,815	2,070	2,439	3,047	4,398
1,75	1,153	1,172	1,206	1,313	1,438	1,590	1,785	2,044	2,417	3,029	4,388
2,00	1,106	1,126	1,165	1,276	1,405	1,562	1,760	2,023	2,400	3,016	4,376
2,50	1,029	1,052	1,099	1,217	1,353	1,516	1,721	1,990	2,372	2,994	4,359
3,00	0,970	0,995	1,048	1,172	1,313	1,482	1,691	1,964	2,351	2,977	4,350
4,00	0,878	0,909	0,972	1,104	1,255	1,431	1,648	1,927	2,320	2,954	4,333
5,00	0,810	0,847	0,916	1,056	1,213	1,395	1,617	1,901	2,299	2,937	4,319
6,00	0,757	0,800	0,872	1,019	1,181	1,368	1,593	1,882	2,282	2,923	4,311
8,00	0,677	0,730	0,808	0,965	1,136	1,329	1,560	1,854	2,259	2,905	4,299
10,0	0,618	0,680	0,763	0,928	1,104	1,302	1,537	1,834	2,243	2,894	4,289
20,0	0,458	0,550	0,649	0,837	1,028	1,239	1,484	1,790	2,207	2,865	4,270
50,0	0,299	0,436	0,555	0,765	0,971	1,191	1,444	1,757	2,181	2,844	4,255
100	0,214	0,385	0,515	0,738	0,949	1,174	1,430	1,745	2,171	2,837	4,251
∞	0	0,324	0,471	0,707	0,926	1,155	1,414	1,732	2,160	2,828	4,243

Таблица 3.76. **Значения коэффициентов C_{mn} [234]**

m	$C_{m,0}$	$C_{m,1}$	$C_{m,2}$	$C_{m,3}$
1	0,8164	—4,5911	7,6059	—3,8529
2	0,0492	17,3181	—37,8465	20,6753
3	—0,4831	—30,5563	75,4833	—44,3540
4	—0,1746	26,2877	—73,1167	44,2607
5	0,7952	—8,4570	26,8666	—16,7296

При действии на берегах трещины сдвигающих сосредоточенных сил (см. рис. 3.157; $P = 0$) КИН может быть записан в виде

$$K_{II} = (Q/\sqrt{\pi l})\, F_{II}(\lambda, \beta). \tag{3.58}$$

В работе [234] утверждается, что $F_{II}(\lambda, \beta)$ совпадает с $F_I(\lambda, \beta)$ при всех $0 \leqslant \lambda < \infty$. Такое утверждение ошибочно. Это, в частности, следует из структуры СИУ задачи в симметричном и антисимметричном случаях нагружения [1, 2]. Однако можно предположить, что

$$F_{II}(\lambda, \beta) \approx F_I(\lambda, \beta), \tag{3.59}$$

поскольку эти функции совпадают в двух предельных случаях полуплоскости с краевой трещиной ($\lambda = 0$) и бесконечной плоскости с внутренней трещиной ($\lambda = \infty$). Проведенные в работе [234] с помощью соотношений (3.58) и (3.59) вычисления КИН K_{II} для случая чистого сдвига на бесконечности показывают, что при малых и больших значениях параметра λ получается практически точное решение, однако при средних значениях параметра λ погрешность решения возрастает (максимальная относительная ошибка около 12 % достигается при $\lambda = 2$).

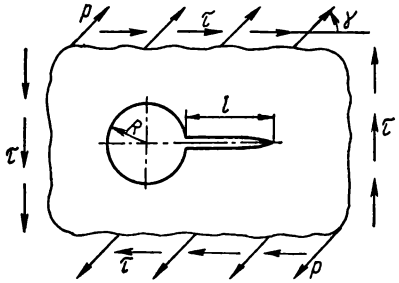
Таблица 3.77. **Значения коэффициентов T_{mj} [235]**

j	$T_{0,j}$	$T_{1,j}$	$T_{2,j}$	$T_{3,j}$	$T_{4,j}$	$T_{5,j}$
0	2,2214	0,0306	2,1625	—2,0271	—0,8395	1,9757
1	1,6661	0,0033	0,6253	—0,1862	—0,9968	1,0332
2	1,3884	0,0042	0,2916	0,0420	—0,7135	0,6378
3	1,2148	0,0037	0,1739	0,0702	—0,5134	0,4357
4	1,0934	0,0029	0,1193	0,0644	—0,3838	0,3188
5	1,0022	0,0022	0,0891	0,0537	—0,2975	0,2449
6	0,9307	0,0016	0,0704	0,0440	—0,2378	0,1951
7	0,8725	0,0013	0,0577	0,0360	—0,1942	0,1598
8	0,8240	0,0010	0,0486	0,0298	—0,1630	0,1338
9	0,7828	0,0008	0,0418	0,0248	—0,1386	0,1141
10	0,7472	0,0006	0,0365	0,0210	—0,1196	0,0987

Таблица 3.78. **Значения КИН $K_I = p\sqrt{\pi l}F_I$ и $K_{II} = p\sqrt{\pi l}F_{II}$ при трещиной [237, 238]**

$\frac{l}{R}$	0		$\pi/12$		$\pi/6$		
	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I
0,1	—0,793	0	—0,553	0,105	0,102	0,182	0,996
0,15	—0,669	0	—0,452	0,145	0,139	0,252	0,947
0,2	—0,571	0	—0,373	0,176	0,167	0,305	0,905
0,3	—0,425	0	—0,256	0,221	0,206	0,385	0,837
0,4	—0,320	0	—0,172	0,252	0,231	0,436	0,783
0,5	—0,247	0	—0,115	0,271	0,247	0,470	0,740
0,6	—0,194	0	—0,073	0,284	0,256	0,491	0,706
0,8	—0,123	0	—0,019	0,296	0,265	0,513	0,652
1,0	—0,081	0	0,012	0,300	0,266	0,520	0,613
1,5	—0,030	0	0,048	0,294	0,259	0,510	0,549
2,0	—0,011	0	0,059	0,283	0,250	0,490	0,510
3,0	0,002	0	0,064	0,263	0,234	0,455	0,466
4,0	0,005	0	0,063	0,248	0,223	0,429	0,441
5,0	0,005	0	0,061	0,237	0,215	0,411	0,425
6,0	0,005	0	0,060	0,229	0,210	0,397	0,414
8,0	0,004	0	0,057	0,218	0,202	0,377	0,400
10,0	0,003	0	0,055	0,211	0,197	0,365	0,391
20,0	0,002	0	0,051	0,195	0,187	0,337	0,373
∞	0	0	0,047	0,177	0,177	0,306	0,354

Пусть контур отверстия и берега трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности плоскость растягивается усилиями p, направленными под углом γ к линии трещины (рис. 3.158; $\tau = 0$). Задача решена методом



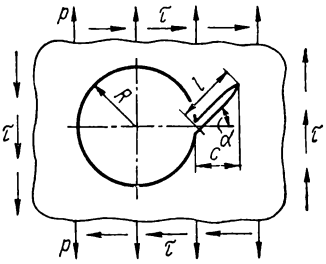


Рис. 3.158. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и краевой трещиной при действии нагрузки на бесконечности.

Рис. 3.159. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и произвольно ориентированной краевой трещиной.

конформных отображений в работах [237, 238]. Значения КИН приведены в табл. 3.78. Аналогичные результаты получены также другими методами [34, 211, 232, 239]. Имеется ряд данных для КИН в случае растяжения плоскости в направлении, параллельном ($\gamma = 0$) [17, 18, 193,

растяжении на бесконечности плоскости с круговым отверстием и радиальной

γ						
$\pi/4$	$\pi/3$		$5\pi/12$		$\pi/2$	
F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
0,210	1,891	0,182	2,546	0,105	2,786	0
0,291	1,754	0,252	2,346	0,145	2,562	0
0,353	1,643	0,305	2,183	0,176	2,380	0
0,443	1,467	0,383	1,929	0,221	2,098	0
0,504	1,334	0,436	1,738	0,252	1,885	0
0,543	1,234	0,470	1,596	0,271	1,728	0
0,567	1,155	0,491	1,485	0,284	1,605	0
0,593	1,040	0,513	1,324	0,296	1,428	0
0,600	0,960	0,520	1,213	0,300	1,306	0
0,589	0,838	0,510	1,050	0,294	1,128	0
0,566	0,770	0,490	0,961	0,283	1,031	0
0,525	0,698	0,455	0,868	0,263	0,930	0
0,496	0,659	0,429	0,820	0,248	0,878	0
0,474	0,635	0,411	0,789	0,237	0,846	0
0,458	0,619	0,397	0,769	0,229	0,824	0
0,436	0,598	0,377	0,743	0,218	0,796	0
0,421	0,585	0,365	0,727	0,211	0,779	0
0,389	0,559	0,337	0,695	0,195	0,744	0
0,354	0,530	0,306	0,660	0,177	0,707	0

Таблица 3.79. **Значения КИН при растяжении плоскости с круговым**

α	0,01		0,05		0,1	
	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi c}}$
0	3,293	0	3,037	0	2,772	0
$\pi/12$	3,195	0,512	2,955	0,452	2,702	0,396
$\pi/6$	2,914	0,953	2,720	0,843	2,501	0,739
$\pi/4$	2,488	1,262	2,368	1,126	2,203	0,990
$\pi/3$	1,960	1,416	1,957	1,287	1,855	1,133

Таблица 3.80. **Значения КИН при сдвиге плоскости с круговым**

α	0,01		0,05		0,1	
	$\frac{K_I}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{\tau\sqrt{\pi l}}$
0	0	0,053	0	0,244	0	0,436
$-\pi/12$	0,042	0,045	0,184	0,210	0,315	0,382
$-\pi/6$	0,076	0,023	0,338	0,118	0,584	0,233
$-\pi/4$	0,098	—0,007	0,443	—0,011	0,777	0,023
$-\pi/3$	0,105	—0,041	0,501	—0,156	0,911	—0,209

240, 241] или перпендикулярном ($\gamma = \pi/2$) [17, 18, 46, 193, 240—243] линии трещины. В последнем случае ($\gamma = \pi/2$) известны также аппроксимационные формулы для КИН [107, 244]. В частности, формула [244]

$$K_I = p\sqrt{\pi l}\,[0{,}8733/(0{,}3245 + l/R) + 0{,}6762]$$

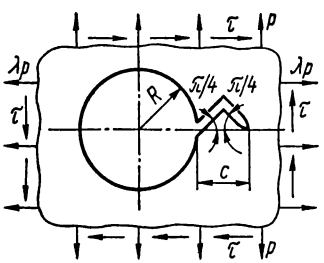


Рис. 3.160. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и краевой зигзагообразной трещиной.

получена с помощью метода наименьших квадратов на основе данных работы [242].

Используя данные табл. 3.78, методом суперпозиций можно определить КИН в случае двухосного растяжения на бесконечности. В частности, когда плоскость растягивается усилиями p в направлении $\gamma = \pi/4$ и сжимается усилиями $-p$ в направлении $\gamma = 3\pi/4$, получим случай чистого сдвига на бесконечности усилиями $\tau = p$ (см. рис. 3.158; $p = 0$). Тогда $K_I = 0$, $K_{II} = 2\tau\sqrt{\pi l}F_{II}(l/R, \pi/4)$, где функция $F_{II}(l/R, \pi/4)$ приведена в табл. 3.78 (9-й столбец).

Произвольно ориентированная краевая трещина. Пусть на контур кругового отверстия выходит прямолинейная трещина произвольной ориентации. Берега трещины и край отверстия свободны от нагрузки, а на беско-

отверстием и произвольно ориентированной краевой трещиной [245]

c/R					
0,2		0,5		1,0	
$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi c}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi c}}$
2,374	0	1,728	0	1,306	0
2,314	0,327	1,668	0,265	2,244	0,260
2,140	0,610	1,488	0,498	1,060	0,494
1,870	0,815	1,182	0,677	0,765	0,682
1,506	0,922	0,714	0,812	0,400	0,800

отверстием и произвольно ориентированной трещиной [245]

c/R					
0,2		0,5		1,0	
$\frac{K_I}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{\tau\sqrt{\pi l}}$
0	0,712	0	1,085	0	1,200
0,476	0,637	0,609	0,093	0,574	1,097
0,887	0,430	1,117	0,740	1,016	0,807
1,192	0,142	1,430	0,390	1,196	0,380
1,394	—0,154	1,415	0,010	1,005	—0,142

нечности плоскость находится под действием одноосного растяжения и сдвига (рис. 3.159). Значения КИН, полученные методом массовых сил [245], приведены в табл. 3.79 и 3.80.

Зигзагообразная краевая трещина. Пусть на контур отверстия выходит зигзагообразная трещина. Берега трещины и край отверстия свобод-

Таблица 3.81. **Значения КИН для плоскости с круговым отверстием и краевой зигзагообразной трещиной [245]**

$\frac{c}{R}$	Одноосное растяжение ($\lambda = 0$)		Двухосное растяжение ($\lambda = 1$)		Сдвиг	
	$K_I/(p\sqrt{\pi c})$	$K_{II}/(p\sqrt{\pi c})$	$K_I/(p\sqrt{\pi c})$	$K_{II}/(p\sqrt{\pi c})$	$K_I/(\tau\sqrt{\pi c})$	$K_{II}/(\tau\sqrt{\pi c})$
0,01	2,462	—1,267	1,653	—0,853	0,051	0,024
0,1	2,092	—1,034	1,493	—0,754	0,416	0,192
0,2	1,803	—0,866	1,362	—0,675	0,680	0,313
0,5	1,314	—0,624	1,127	—0,531	1,035	0,473
1,0	0,970	—0,506	0,945	—0,419	1,137	0,520

ны от нагрузки, а на бесконечности заданы растягивающие и сдвигающие усилия (рис. 3.160). Значения КИН, полученные методом массовых сил [245], приведены в табл. 3.81.

3.14. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и системой краевых трещин

Две симметричные радиальные трещины. Пусть на контур кругового отверстия симметрично выходят две коллинеарные радиальные трещины. Берега трещин нагружены постоянным давлением σ, а контур отверстия свободен от нагрузки, либо на контур отверстия действует постоянное давление p, а берега трещин свободны, либо контур отверстия растягивается сосредоточенными силами F, а остальная граница свободна. На

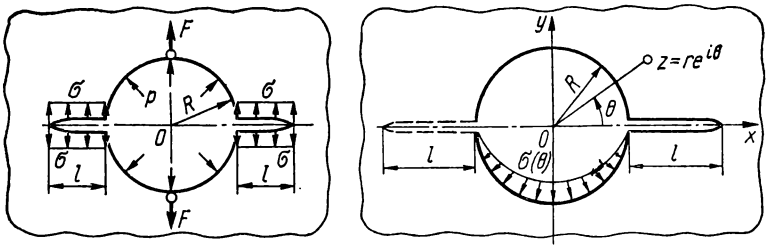


Рис. 3.161. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и двумя симметричными радиальными трещинами при действии нагрузки на их контурах.

Рис. 3.162. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и одной или двумя симметричными радиальными трещинами при действии несамоуравновешенной нагрузки на контуре отверстия.

Таблица 3.82. **Значения КИН для бесконечной плоскости с круговым отверстием и двумя симметричными радиальными трещинами при действии на их контурах постоянного давления и сосредоточенных сил [1, 2]**

$\frac{l}{R}$	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I\sqrt{l}}{F\sqrt{\pi}}$	$\frac{l}{R}$	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I\sqrt{l}}{F\sqrt{\pi}}$
0	1,1215	1,1215	—	0,8	0,9665	0,4604	0,2195
0,1	1,0583	0,9404	0,0597	0,9	0,9651	0,4299	0,2284
0,2	1,0221	0,8136	0,1028	1,0	0,9643	0,4032	0,2358
0,3	1,0002	0,7190	1,1352	1,5	0,9646	0,3077	0,2595
0,4	0,9866	0,6452	0,1603	2,0	0,9672	0,2486	0,2719
0,5	0,9780	0,5858	0,1801	2,5	0,9699	0,2085	0,2794
0,6	0,9724	0,5369	0,1960	3,0	0,9725	0,1794	0,2845
0,7	0,9688	0,4956	0,2089	3,5	0,9747	0,1574	0,2882

бесконечности напряжения отсутствуют (рис. 3.161). Числовые значения КИН, полученные методом СИУ [1, 2], приведены в табл. 3.82. Данные по КИН при действии постоянной нагрузки на контуре отверстия и на берегах трещин приведены также в работах [17, 18, 193, 228]. Случай действия симметричных растягивающих сил на контуре отверстия рассмотрен в работах [193, 228, 246].

Пусть берега трещин свободны от нагрузки, а на части контура отверстия действуют несамоуравновешенные усилия (рис. 3.162)

$$\sigma_{rr} = \sigma(\theta) = p\sin\theta,$$

$$\tau_{r\theta} = -pf\cos^3\theta\sin\theta \quad (-\pi \leqslant \theta \leqslant 0),$$

где p — максимальное сжимающее радиальное напряжение, а f — заданный параметр. Такая нагрузка моделирует действие заклепки на контур крепежного отверстия. В этом случае параметр f представляет собой коэффициент трения между заклепкой и контуром отверстия. Задача решена методом конформных отображений для случая одной и двух радиальных трещин в работе [230]. Значения КИН приведены в табл. 3.83. В этой же работе рассмотрены и другие случаи несамоуравновешенной нагрузки, действующей на контуре отверстия.

Таблица 3.83. **Значения КИН $K_I = p_0\sqrt{\pi l}\,F_I$, $K_{II} = p_0\sqrt{\pi l}F_{II}$ ($p_0 = p(\pi/4 + f/5)$) для одной или двух радиальных трещин, выходящих на край нагруженного несамоуравновешенными усилиями кругового отверстия в бесконечной плоскости при $\varkappa = 2$ [230]**

$\frac{l}{R}$	Одна трещина				Две трещины			
	$f=0$		$f=1$		$f=0$		$f=1$	
	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
0,10	0,679	0,023	0,833	0,081	0,681	0,027	0,823	0,079
0,15	0,596	0,027	0,726	0,094	0,611	0,033	0,729	0,092
0,20	0,538	0,031	0,648	0,101	0,553	0,038	0,652	0,100
0,30	0,445	0,036	0,524	0,106	0,464	0,044	0,537	0,106
0,40	0,377	0,038	0,435	0,104	0,401	0,046	0,456	0,105
0,50	0,327	0,040	0,371	0,101	0,353	0,047	0,396	0,102
0,60	0,287	0,040	0,320	0,097	0,315	0,047	0,350	0,099
0,70	0,256	0,041	0,281	0,093	0,285	0,047	0,313	0,094
0,80	0,230	0,041	0,250	0,088	0,261	0,046	0,284	0,090
1,00	0,190	0,040	0,203	0,080	0,222	0,045	0,239	0,081
1,50	0,130	0,037	0,134	0,065	0,164	0,040	0,171	0,065
2,00	0,097	0,034	0,098	0,055	0,130	0,035	0,134	0,053
3,00	0,062	0,028	0,061	0,041	0,092	0,027	0,093	0,038
4,00	0,044	0,024	0,043	0,033	0,071	0,022	0,072	0,029
5,00	0,033	0,021	0,032	0,027	0,058	0,019	0,059	0,023
7,00	0,022	0,016	0,021	0,020	0,043	0,014	0,043	0,017
10,00	0,013	0,012	0,013	0,015	0,030	0,010	0,030	0,011
20,00	0,005	0,007	0,005	0,008	0,016	0,005	0,016	0,006
50,00	0,001	0,003	0,001	0,003	0,006	0,002	0,006	0,002

Пусть контур отверстия и берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности плоскость растягивается усилиями p, направленными под углом γ к линии трещины (рис. 3.163; $\tau = 0$). Значения КИН, полученные методом конформного отображения [247], приведены в табл. 3.84. Аналогичные результаты получены также другими методами [211]. Известен ряд данных для КИН при равномерном нагружении плоскости на бесконечности [17, 18, 193, 242—244, 246—249]. В случае одноосного растяжения на бесконечности в направлении, перпендикулярном линии трещин ($\gamma = \pi/2$), построены также аппроксимационные формулы для КИН [107, 244]. В частности, формула [244]

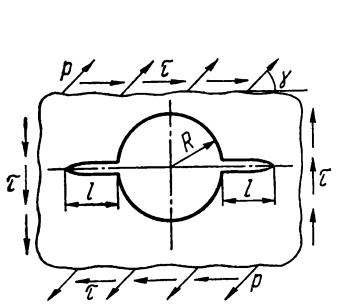
$$K_I = p\sqrt{\pi l}\,[0{,}6865/(0{,}2772 + l/R) + 0{,}9439]$$

получена с помощью метода наименьших квадратов на основе данных работы [242].

Таблица 3.84. **Значения КИН $K_I = p\sqrt{\pi l}F_I$ и $K_{II} = p\sqrt{\pi l}F_{II}$ при симметричными краевыми трещинами [247]**

$\frac{l}{R}$	0		π/12		π/6		
	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I
0,10	—0,7898	0	—0,5507	0,1078	0,1027	0,1866	0,9952
0,15	—0,6728	0	—0,4550	0,1464	0,1400	0,2536	0,9529
0,20	—0,5776	0	—0,3772	0,1779	0,1700	0,3081	0,9176
0,30	—0,4370	0	—0,2633	0,2228	0,2113	0,3859	0,8596
0,40	—0,3394	0	—0,1846	0,2521	0,2382	0,4367	0,8159
0,50	—0,2690	0	—0,1282	0,2717	0,2565	0,4705	0,7819
0,60	—0,2170	0	—0,0868	0,2845	0,2688	0,4927	0,7546
0,80	—0,1473	0	—0,0320	0,2982	0,2831	0,5166	0,7135
1,00	—0,1046	0	0,0011	0,3033	0,2896	0,5254	0,6838
1,50	—0,0511	0	0,0409	0,3023	0,2925	0,5236	0,6362
2,00	—0,0287	0	0,0566	0,2964	0,2896	0,5133	0,6079
3,00	—0,0117	0	0,0671	0,2856	0,2821	0,4947	0,5759
4,00	—0,0058	0	0,0698	0,2783	0,2763	0,4820	0,5584
5,00	—0,0033	0	0,0705	0,2733	0,2721	0,4733	0,5474
6,00	—0,0021	0	0,0705	0,2697	0,2689	0,4672	0,5399
8,00	—0,0010	0	0,0702	0,2650	0,2647	0,4591	0,5303
10,00	—0,0005	0	0,0698	0,2622	0,2619	0,4541	0,5244
20,00	—0,0001	0	0,0686	0,2562	0,2561	0,4437	0,5123
∞	0	0	0,0670	0,2500	0,2500	0,4330	0,5000

Используя данные табл. 3.84, методом суперпозиций можно определить КИН в случае двухосного растяжения на бесконечности. В частности, когда плоскость растягивается усилиями p в направлении $\gamma = \pi/4$ и



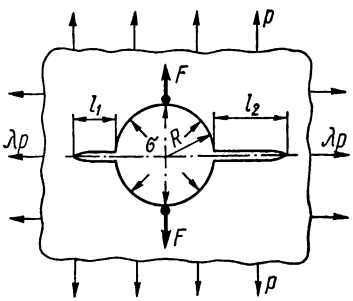


Рис. 3.163. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и двумя симметричными краевыми трещинами при действии нагрузки на бесконечности.

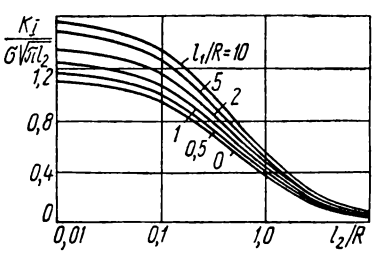
Рис. 3.164. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и двумя краевыми радиальными трещинами неравной длины.

сжимается усилиями $-p$ в направлении $\gamma = 3\pi/4$, получим случай чистого сдвига на бесконечности усилиями $\tau = p$ (см. рис. 3.163; $p = 0$). Тогда $K_I = 0$, $K_{II} = 2\tau\sqrt{\pi l}F_{II}(l/R, \pi/4)$, где функция $F_{II}(l/R, \pi/4)$ приведена в табл. 3.84 (9-й столбец).

растяжении на бесконечности плоскости с круговым отверстием и двумя

γ						
$\pi/4$	$\pi/3$		$5\pi/12$		$\pi/2$	
F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
0,2155	1,8876	0,1866	2,5410	0,1078	2,7801	0
0,2929	1,7657	0,2536	2,3607	0,1464	2,5785	0
0,3557	1,6651	0,3081	2,2124	0,1779	2,4127	0
0,4456	1,5079	0,3859	1,9825	0,2228	2,1562	0
0,5043	1,3935	0,4367	1,8163	0,2521	1,9711	0
0,5433	1,3074	0,4705	1,6920	0,2717	1,8328	0
0,5690	1,2404	0,4927	1,5960	0,2845	1,7262	0
0,5965	1,1438	0,5166	1,4589	0,2982	1,5742	0
0,6067	1,0780	0,5254	1,3665	0,3033	1,4721	0
0,6046	0,9798	0,5236	1,2314	0,3023	1,3235	0
0,5927	0,9262	0,5133	1,1592	0,2964	1,2445	0
0,5712	0,8698	0,4947	1,0848	0,2856	1,1636	0
0,5565	0,8406	0,4820	1,0471	0,2783	1,1227	0
0,5465	0,8228	0,4733	1,0244	0,2733	1,0982	0
0,5394	0,8109	0,4672	1,0093	0,2697	1,0819	0
0,5301	0,7959	0,4591	0,9903	0,2650	1,0615	0
0,5243	0,7868	0,4541	0,9790	0,2622	1,0493	0
0,5123	0,7686	0,4437	0,9561	0,2562	1,0248	0
0,5000	0,7500	0,4330	0,9330	0,2500	1,0000	0

Две краевые трещины неравной длины. Пусть на край кругового отверстия выходят две коллинеарные радиальные трещины различной длины. Берега трещин свободны от нагрузки, а на контуре отверстия за-



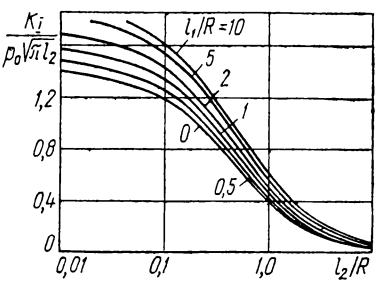


Рис. 3.165. Зависимость КИН (для правой трещины) от параметра l_2/R при действии постоянного давления на контуре кругового отверстия с двумя неравными краевыми трещинами [228].

Рис. 3.166. Зависимость КИН (для правой трещины) от параметра l_2/R при действии двух растягивающих сил на контуре кругового отверстия с двумя неравными краевыми трещинами ($p_0 = F/2R$) [228].

дано постоянное давление σ и, кроме того, действуют две растягивающие сосредоточенные силы F. На бесконечности плоскость находится при действии двухосного растяжения усилиями p и λp (рис. 3.164). Задача решена методом СИУ в работе [228]. Зависимости КИН для правой трещины

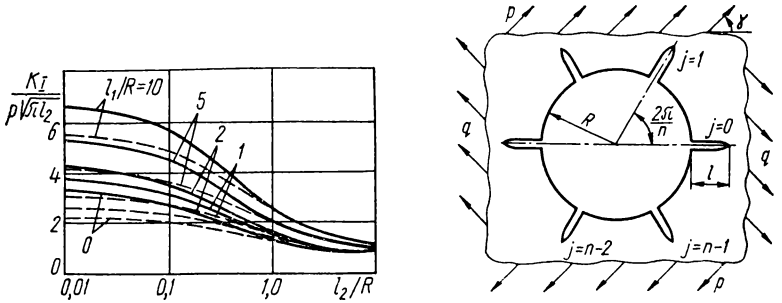
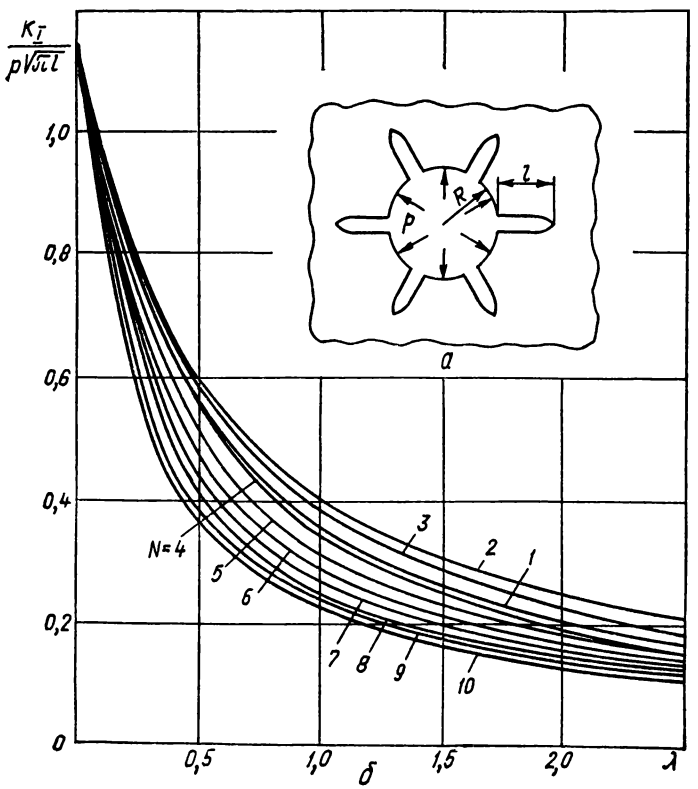


Рис. 3.167. Зависимость КИН (для правой трещины от параметра l_2/R при одноосном ($\lambda = 0$) (сплошные линии) и всестороннем ($\lambda = 1$) (штриховые линии) растяжении на бесконечности плоскости с круговым отверстием и двумя неравными краевыми трещинами [228].

Рис. 3.168. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и циклической системой краевых радиальных трещин при двухосном растяжении на бесконечности.



от отношения l_2/R при различных значениях l_1/R приведены на рис. 3.165—3.167.

Циклическая система краевых радиальных трещин. Пусть бесконечная плоскость, ослабленная круговым отверстием радиуса R и n симметрично расположенными радиальными краевыми трещинами длиной l, находится на бесконечности при двухосном растяжении усилиями p и q, действующими во взаимно перпендикулярных направлениях, причем усилие p направлено под углом γ к линии трещины с номером $j = 0$ (рис. 3.168). В работах [211, 250] методом конформных отображений построено приближенное решение задачи при малых относительных длинах трещин. Выражения для КИН в вершине трещины с номером j имеют вид

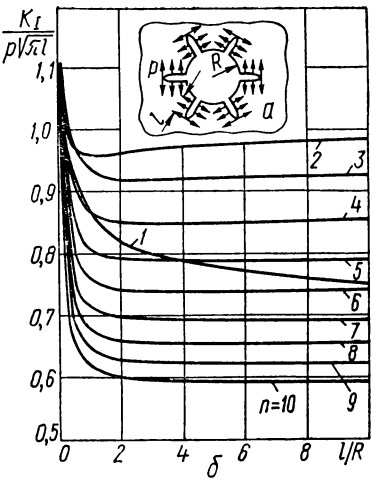


Рис. 3.170. Схема циклической системы краевых трещин в плоскости с круговым отверстием, на берегах которых действует постоянное давление (a), и зависимость КИН от параметра l/R ($б$) [1, 2, 254].

$$K_{I,j} = \sqrt{\pi R}\sqrt{(1-\Delta^{2n})/(2n\Delta)} \times$$
$$\times [(1+\Delta^n)/2]^{2/n-1}\{(p+q) -$$
$$-(p-q)[4\cos 2(\theta_j-\gamma) +$$
$$+2\varepsilon c_1\cos(\theta_j-2\gamma) -$$
$$-(A_n-\varepsilon c_2)\cos 2\gamma]\},$$

$$K_{II,j} = \sqrt{\pi R}\sqrt{(1-\Delta^{2n})/(2n\Delta)}\,[(1+\Delta^n)/2]^{2/n-1}\{(p-q)[2\sin 2(\theta_j-\gamma) +$$
$$+2\varepsilon c_1\sin(\theta_j-2\gamma) + (A_n-\varepsilon c_2)\sin 2\gamma]\},$$

где $\Delta = 1/(1+\lambda)$, $\lambda = l/R$, $A_n = 2[(1+\Delta^n)/2]^{-2/n}$, $\theta_j = 2\pi j/n$, $\varepsilon c_1 = 2\lambda^2/(2+\lambda)^2$, $\varepsilon c_2 = \lambda^2(8+8\lambda+\lambda^2)/(2+\lambda)^4$ при $n=1$, $\varepsilon c_1 = 0$, $\varepsilon c_2 = (1-\Delta^2)^2/(1+\Delta^2)^2$ при $n=2$, $\varepsilon c_1 = \varepsilon c_2 = 0$ при $n \geqslant 3$.
В случае всестороннего растяжения ($p=q$) отсюда следует [243]

$$K_I = \sqrt{2\pi R}\sqrt{(1-\Delta^{2n})/(n\Delta)}\,[(1+\Delta^n)/2]^{2/n-1},$$

$$K_{II} = 0.$$

В последнем случае данные для КИН имеются также в работах [17, 251, 252]. При действии внутреннего давления p на контур отверстия, когда берега трещин свободны от нагрузки, в работе [253] предложена для КИН приближенная формула в случае больших относительных длин трещин

$$K_I = pR\sqrt{2\pi/[(nl)(1+(n/2\pi)\sin(2\pi/n))]} \quad (l \gg R).$$

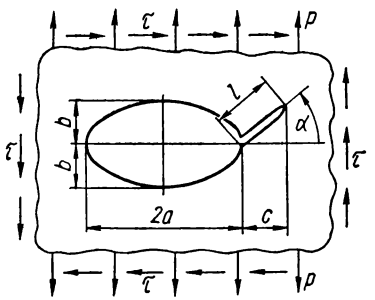
Численные результаты для этого случая нагрузки имеются также в работах [1, 2, 252, 254, 255]. На рис. 3.169 приведены зависимости величины

Рис. 3.169. Схема циклической системы краевых трещин в плоскости с круговым отверстием при действии на его контуре постоянного давления (a) и зависимость КИН от параметра $\lambda = l/R$ ($б$) [1, 2, 254].

$K_I/p\sqrt{\pi l}$ от параметра l/R, полученные в работах [1, 2, 254] методом СИУ. В этих же работах определены КИН, когда контур отверстия свободен от нагрузки, а на берегах трещины задано постоянное давление (рис. 3.170). Из последних двух результатов методом суперпозиции легко получить КИН в случае всестороннего растяжения на бесконечности.

3.15. Бесконечная плоскость с некруговым отверстием и краевыми трещинами

Эллиптическое отверстие и прямолинейная трещина. Пусть на край эллиптического отверстия в бесконечной плоскости выходит произвольно ориентированная прямолинейная трещина. Берега трещины и контур отверстия свободны от нагрузки, а на бесконечности плоскость находится под действием одноосного растяжения и чистого сдвига (рис. 3.171). Значения КИН, полученные методом массовых сил в работе [245], приведены в табл. 3.85 и 3.86.



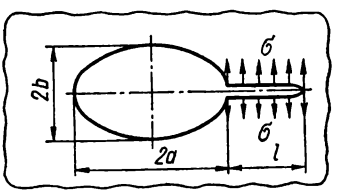


Рис. 3.171. Бесконечная плоскость с эллиптическим отверстием и произвольно ориентированной краевой трещиной.

Рис. 3.172. Бесконечная плоскость с эллиптическим отверстием и симметричной краевой трещиной под давлением.

Данные по КИН имеются также в работе [46]. В случае двухосного растяжения плоскости при $\alpha = 0$ в работах [211, 256] дано аналитическое решение рассматриваемой задачи (см. следующий пункт). При такой ориентации трещины числовые значения КИН приведены также в работах [17, 18].

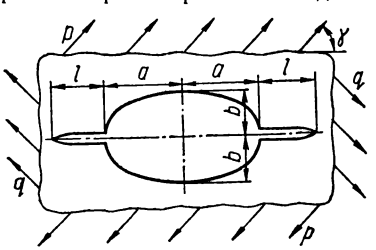


Рис. 3.173. Бесконечная плоскость с эллиптическим отверстием и двумя симметричными краевыми трещинами.

В случае, когда на берегах симметричной трещины действует постоянное давление, а на контуре отверстия и на бесконечности нагрузка отсутствует (рис. 3.172), задача решена методом СИУ в работах [146, 257]. Численные результаты для КИН приведены в табл. 3.87.

Эллиптическое отверстие и две симметричные трещины. Пусть в бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием имеются две краевые коллинеарные трещины, расположенные на продолжении оси эллипса. Берега трещин и контур отверстия свободны от нагрузки. На бесконечности плоскость подвержена двухосному растяжению напряжениями

Таблица 3.85. **Значения КИН $K_I = p\sqrt{\pi c}\,F_I$ и $K_{II} = p\sqrt{\pi c}\,F_{II}$ при одноосном растяжении бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием и краевой произвольно ориентированной трещиной [245]**

$\frac{b}{a}$	α	c/a											
		0,01		0,05		0,1		0,2		0,5		1,0	
		F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
0,5	0	5,181	0	4,043	0	3,256	0	2,460	0	1,640	0	1,248	0
	π/12	5,038	0,779	3,948	0,544	3,175	0,428	2,382	0,353	1,566	0,316	1,182	0,296
	π/6	4,360	1,453	3,678	1,018	2,938	0,800	2,151	0,664	1,349	0,597	0,994	0,557
	π/4	4,017	1,938	3,272	1,365	2,559	1,074	1,765	0,902	0,999	0,818	0,709	0,747
	π/3	3,295	2,211	2,784	1,563	2,023	1,229	1,196	1,062	0,545	0,959	0,382	0,826
2,0	0	2,230	0	2,180	0	2,120	0	2,007	0	1,726	0	1,410	0
	π/12	2,162	0,350	2,116	0,338	2,060	0,324	1,953	0,299	1,679	0,249	1,361	0,220
	π/6	1,968	0,651	1,932	0,629	1,886	0,603	1,796	0,558	1,543	0,464	1,215	0,411
	π/4	1,671	0,860	1,651	0,834	1,624	0,802	1,561	0,743	1,331	0,616	0,963	0,554
	π/3	1,300	0,959	1,306	0,937	1,307	0,908	1,283	0,846	1,039	0,689	0,555	0,668

Таблица 3.86. **Значения КИН $K_I = \tau\sqrt{\pi l}F_I$ и $K_{II} = \tau\sqrt{\pi l}F_{II}$ при чистом сдвиге бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием и краевой произвольно ориентированной трещиной [245]**

$\frac{b}{a}$	α	c/a											
		0,01		0,05		0,1		0,2		0,5		1,0	
		F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
0,5	0	0	0,224	0	0,811	0	1,175	0	1,443	0	1,471	0	1,300
	—π/12	0,171	0,193	0,549	0,724	0,716	1,069	0,772	1,328	0,669	1,350	0,551	1,175
	—π/6	0,314	0,106	1,023	0,482	1,332	0,776	1,417	1,012	1,189	1,013	0,956	0,828
	—π/4	0,409	—0,016	1,375	0,144	1,776	0,373	1,823	0,574	1,424	0,531	1,093	0,329
	—π/3	0,457	—0,152	1,620	—0,212	2,003	—0,031	1,873	0,115	1,261	—0,016	0,904	—0,226
2,0	0	0	0,015	0	0,075	0	0,145	0	0,272	0	0,568	0	0,854
	—π/12	0,012	0,013	0,058	0,064	0,112	0,124	0,205	0,236	0,393	0,504	0,517	0,775
	—π/6	0,022	0,007	0,106	0,033	0,205	0,067	0,377	0,134	0,732	0,327	0,954	0,559
	—π/4	0,028	—0,002	0,137	—0,010	0,265	—0,014	0,496	—0,010	0,984	0,080	1,239	0,263
	—π/3	0,030	—0,012	0,147	—0,057	0,292	—0,104	0,566	—0,171	1,160	—0,176	1,231	—0,054

p и q, действующими во взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 3.173). Аналитическое решение задачи получено в работах [211, 256] методом конформного отображения. Формулы для КИН имеют вид

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}} &= \sqrt{\pi R}/(2\sqrt{2}\,B_k)\,[(p+q)(1-mL_1)-(p-q)(1-L_1)\cos 2\gamma], \\ K_{\mathrm{II}} &= \sqrt{\pi R}/(2\sqrt{2}\,B_k)\,(p-q)(1+L_1)\sin 2\gamma, \end{aligned}\right\} \quad (3.60)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &R=(a+b)/2, \quad m=(a-b)/(a+b) \quad (-1\leqslant m\leqslant 1), \\ &B_k=\sqrt{\Delta\,(1-m\Delta^2)/(L_2\,(1-\Delta^2))}, \\ &\Delta=1/(1+l_0), \quad L_2=k\,[2\,(1-k)\,\Delta+(1+\Delta)^2], \\ &l_0=(1/2)\,[m-1+\delta+\sqrt{2\,(1+m)\,\delta+\delta^2+(1-m)^2}], \quad \delta=l/R, \\ &L_1=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(m), \\ &\varphi_i(m)=\left[2iA_k-1+m-\sum_{n=1}^{(3-k)i}(1-kn+2ic_n)\right]m^{i-1}, \\ &A_k=4\,(1+m\Delta^2)/L_2-(1+m). \end{aligned}\right\} \quad (3.61)$$

В рассматриваемом случае в формулах (3.60) и (3.61) следует положить $k=2$. При этом коэффициенты c_n даются выражениями

$$c_1=-(1-m)\,[P_1(r)-1],$$

$$c_n=-(1-m)\,[P_n(r)-P_{n-2}(r)]/(4n-2) \quad (n=2,\,3,\,4,\,\ldots),$$

$$r=2/L_0^2-1, \quad L_0=[1+l_0+1/(1+l_0)]/2,$$

где $P_n(r)$ — полиномы Лежандра первого рода.

При $k=1$ формулы (3.60) и (3.61) определяют решение задачи также в случае одной трещины. Тогда

$$c_1=1-t, \quad c_2=-(1-m)\,[P_2(t)+t\,(1-t)-1]/2,$$

$$c_n=(1-m)\,\{P_{n-3}(t)+t\,[P_{n-1}(t)-P_{n-2}(t)]-P_n(t)\}/(2\,(n-1))$$

$$(n=3,\,4,\,5,\,\ldots),$$

$$t=(3-L_0)/(1+L_0).$$

При одноосном растяжении в направлении, перпендикулярном линии трещин (см. рис. 3.173; $q=0$; $\gamma=\pi/2$), числовые значения КИН получены методом граничной коллокации в работе [258]. Эти результаты представлены в табл. 3.88.

Таблица 3.87. **Значения КИН $K_{\mathrm{I}}/(\sigma\sqrt{\pi l})$ при действии постоянного давления на берегах симметричной краевой трещины в бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием [146, 257]**

$\frac{b}{a}$	a/l		
	1,0	1,5	2,0
0,50	0,8520	0,8693	0,8816
0,75	0,8605	0,8842	0,9025
1,00	0,8738	0,9053	0,9294
1,25	0,8909	0,9292	0,9570
1,50	0,9099	0,9529	0,9821

В работе [83] предложена формула

$$K_{\mathrm{I}}=p\sqrt{\pi\,(a+l)}\,(1+2a/b)/\sqrt{1+(a/b)^2\,\rho/l}\,f(l/\rho), \quad \rho=b^2/a,$$

$$f(\lambda)=1{,}1215-3{,}21\lambda+5{,}16\lambda^{3/2}-3{,}75\lambda^2+1{,}14\lambda^{5/2},$$

Таблица 3.88. Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi(a+l)})$ при одноосном растяжении плоскости с эллиптическим отверстием и двумя симметричными трещинами [16, 258]

$\frac{l}{a}$	b/a				
	0,25	0,5	1,0	2,0	4.0
0,02	0,9050	0,6757	0,4392	0,3068	0,2114
0,03	0,9597	0,7742	...	...	...
0,04	0,9865	0,8398	0,6023	0,4297	...
0,05	1,0013	0,8861	...	...	0,3137
0,06	1,0098	0,9206	0,7086	0,5164	...
0,08	1,0179	0,9664	0,7837	0,5843	0,4463
0,10	1,0206	0,9925	0,8399	0,6401	0,5027
0,15	1,0202	1,0258	0,9322	0,7475	0,5901
0,20	1,0176	1,0357	0,9851	0,8241	...
0,30	...	1,0366	1,0358	0,9255	...
0,40	...	1,0317	1,0536	0,9866	0,8494
0,50	...	...	1,0582	1,0246	...
0,60	...	...	1,0571	1,0483	...
0,80	...	...	1,0495	1,0714	1,0063
1,00	...	...	1,0409	1,0777	...
1,20	...	...	1,0366	1,0766	...
1,40	...	...	1,0251	1,0722	1,0788

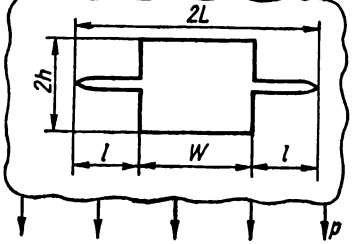
Таблица 3.89. Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi L}) = F_I$ при растяжении плоскости с прямоугольным отверстием и двумя краевыми симметричными трещинами [261]

$w/2h = 1$		$w/2h = 2$		$w/2h = 4$		$w/2h = 8$		$w/2h = 16$	
$l/2h$	F_I	$l/2h$	F_I	$l/2h$	F_I	$l/2h$	F_I	$l/2h$	F_I
0,0062	1,348	0	1,658	0	1,859	0,004	2,041	0,004	1,656
0,029	1,152	0,020	1,241	0,007	1,377	0,007	1,500	0,011	1,271
0,052	1,098	0,037	1,153	0,027	1,198	0,021	1,180	0,026	1,134
0,080	1,061	0,073	1,099	0,060	1,108	0,073	1,080	0,061	1,074
0,121	1,036	0,120	1,062	0,110	1,065	0,145	1,040	0,197	1,027
0,188	1,021	0,210	1,035	0,192	1,039	0,306	1,021	0,439	1,012
0,203	1,015	0,285	1,022	0,312	1,023	0,520	1,012	0,769	1,005
0,240	1,010	0,438	1,012	0,657	1,008	0,811	1,007	1,341	1,004
0,362	1,007	1,025	1,003	0,709	1,008	1,217	1,004	2,029	1,002
0,460	1,005	1,72	1,001	1,083	1,005	...	...	...	...
0,755	1,002	3,23	1,000	...	...	...	...	...	...
1,039	1,000	5,00	1,000	...	...	...	...	...	...

Таблица 3.90. **Значения КИН при вертикальном растяжении либо чистом сдвиге** ($K_{II} = \tau \sqrt{\pi (b + l/2)}\, F_{II}$) **бесконечной**

$\beta = \pi/6$				$\beta = \pi/3$			
l/b	F_I^*	F_I^{**}	F_{II}	l/b	F_I^*	F_I^{**}	F_{II}
0,0050	1,016	—0,024	...	0,0048	1,034	—0,100	...
0,0103	1,015	—0,022	...	0,0100	1,038	—0,097	...
0,0208	1,014	—0,021	0,809	0,0200	1,041	—0,094	...
0,0497	1,013	—0,018	0,872	0,0499	1,044	—0,085	0,677
0,101	1,011	—0,014	0,927	0,100	1,041	—0,073	0,778
0,200	1,008	—0,010	0,973	0,200	1,034	—0,055	0,888
0,399	1,004	—0,005	1,010	0,400	1,022	—0,034	0,985
0,595	1,003	—0,003	1,024	0,600	1,015	—0,021	1,031
0,793	1,002	—0,002	1,031	0,800	1,010	—0,014	1,055
1,000	1,001	—0,001	1,034	1,000	1,007	—0,009	1,068
1,248	1,001	—0,001	1,035	1,250	1,004	—0,005	1,077
1,647	1,000	—0,000	1,035	1,667	1,002	—0,002	1,081
2,469	1,000	0,000	1,031	2,500	1,000	0,001	1,078
4,926	1,000	0,000	1,022	4,975	1,000	0,002	1,057
∞	1,000	0,000	1,000	∞	1,000	0,000	1,000

которая аппроксимирует численные результаты табл. 3.88 при $0 \leqslant l/\rho \leqslant 1$. Данные по КИН для последнего случая нагружения имеются также в работах [17, 18, 31, 35, 50, 243, 259]. В работе [260] построена приближенная функция Грина для определения КИН при любой симметричной нагрузке, действующей на берегах трещин. В работе [245] изу-



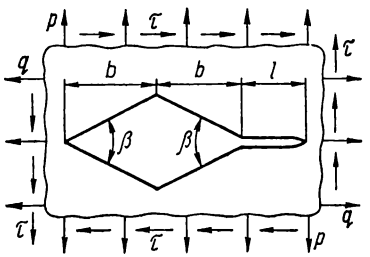


Рис. 3.174. Бесконечная плоскость с прямоугольным отверстием и двумя симметричными краевыми трещинами.

Рис. 3.175. Бесконечная плоскость с ромбовидным отверстием и краевой трещиной.

чен также случай, когда из двух вершин эллиптического отверстия выходят по две симметричные трещины.

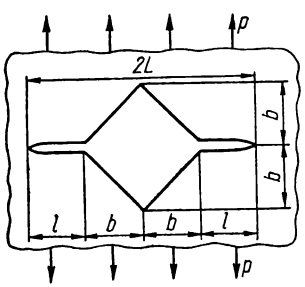
Прямоугольное отверстие и трещины. Пусть на середины противоположных сторон прямоугольного отверстия выходят симметричные прямолинейные трещины. Берега трещин и край отверстия свободны от нагрузок, а на бесконечности задано одноосное растяжение (рис. 3.174). Зна-

($K_I = p\sqrt{\pi(b + l/2)}\,F_I^*$) или горизонтальном ($K_I = q\sqrt{\pi(b + l/2)}\,F_I^{**}$) плоскости с ромбовидным отверстием и краевой трещиной [262]

$\beta = \pi/2$				$\beta = 2\pi/3$			
l/b	F_I^*	F_I^{**}	F_{II}	l/b	F_I^*	F_I^{**}	F_{II}
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
0,0198	1,026	—0,217	...	...	...	...	...
0,0504	1,062	—0,213	...	0,0496	0,981	—0,368	...
0,100	1,071	—0,197	0,551	0,101	1,041	—0,375	...
0,200	1,074	—0,166	0,705	0,200	1,091	—0,360	0,431
0,400	1,061	—0,117	0,878	0,403	1,114	—0,303	0,639
0,601	1,047	—0,082	0,975	0,600	1,110	—0,247	0,778
0,800	1,036	—0,058	1,033	0,800	1,098	—0,198	0,883
1,000	1,028	—0,042	1,071	1,007	1,085	—0,156	0,963
1,250	1,020	—0,027	1,101	1,242	1,071	—0,119	1,031
1,667	1,012	—0,013	1,126	1,656	1,052	—0,073	1,107
2,500	1,005	—0,001	1,136	2,506	1,028	—0,024	1,178
4,926	1,000	0,005	1,111	4,975	1,008	0,008	1,189
∞	1,000	0,000	1,000	∞	1,000	0,000	1,000

чения КИН, полученные методом конформных отображений в работе [261], приведены в табл. 3.89.

Ромбовидное отверстие и трещина. Пусть плоскость ослаблена ромбовидным отверстием, из вершины которого симметрично исходит прямолинейная трещина. Берега трещины и край отверстия свободны от нагрузки, а на бесконечности плоскость подвержена двухосному растяжению и чис-



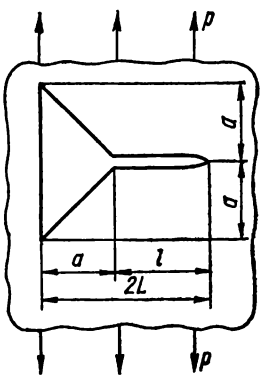


Рис. 3.176. Бесконечная плоскость с квадратным отверстием и двумя симметричными краевыми трещинами.

Рис. 3.177. Бесконечная плоскость с треугольным отверстием и краевой трещиной.

тому сдвигу (рис. 3.175). Значения КИН, полученные методом конформных отображений в работе [262], приведены в табл. 3.90. В частном случае квадратного отверстия данные для КИН имеются также в работах

[263, 264]. В этих же работах также рассмотрен случай других ориентаций краевой трещины.

Квадратное отверстие и две краевые симметричные трещины. Пусть из двух противоположных вершин квадратного отверстия в бесконечной плоскости исходят симметричные прямолинейные трещины. Берега трещин и край отверстия свободны от нагрузки, а на бесконечности плоскость растягивается в направлении, перпендикулярном линии трещин (рис. 3.176). Ниже приведены значения КИН, полученные в работе [263] методом массовых сил:

l/b	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$K_I/(p\sqrt{\pi L})$	1,07	1,069	1,058	1,046	1,037	1,030

Аналогичные результаты имеются в работе [264], в которой также рассмотрен чистый сдвиг плоскости на бесконечности.

Треугольное отверстие и трещина. Пусть плоскость ослаблена отверстием, контур которого является равнобедренным треугольником. Из вершины треугольника симметрично исходит прямолинейная трещина. Берега трещины и край отверстия свободны от нагрузки, а на бесконечности плоскость растягивается в направлении, перпендикулярном линии трещины (рис. 3.177). Ниже приведены значения КИН для различных относительных длин трещины:

l/a	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	2,76	2,064	1,525	1,297	1,168	1,085
$K_I/(p\sqrt{\pi L})$	1,18	1,191	1,152	1,123	1,103	1,085

Эти результаты получены в работе [263] методом массовых сил.

3.16. Бесконечная плоскость с криволинейным отверстием и внутренними трещинами

Круговое отверстие и радиальная трещина. Пусть в бесконечной плоскости с круговым отверстием внутренняя трещина размещена на прямой, проходящей через центр отверстия. Берега трещины и контур отверстия свободны от нагрузки, а на бесконечности плоскость растягивается усилиями p в направлении, перпендикулярном трещине, и сжимается усилиями q, направленными параллельно трещине (рис. 3.178). Задача решена методом рядов Лорана в работах [62, 176]. Зависимости КИН от относительной длины трещины приведены на рис. 3.179 и 3.180. Численные результаты для КИН имеются также в работах [16—18, 265—267]. Рассматривался также случай, когда на бесконечности растягивающие усилия изменяются по линейному закону [16, 17, 50, 62].

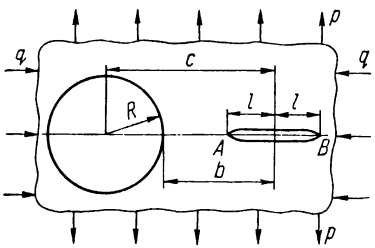


Рис. 3.178. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и внутренней радиальной трещиной.

Рис. 3.180. Зависимость КИН K_I в вершинах A (a) и B ($б$) от параметра l/b при продольном сжатии плоскости с круговым отверстием и внутренней радиальной трещиной [50, 62].

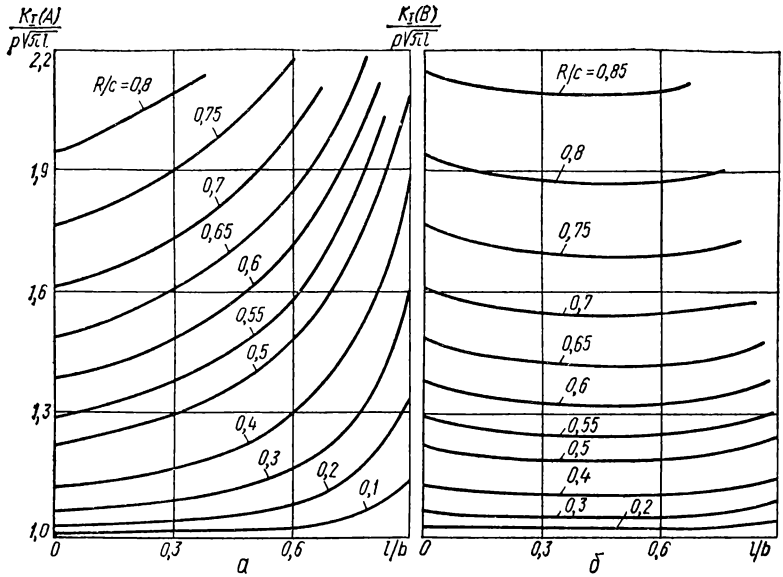
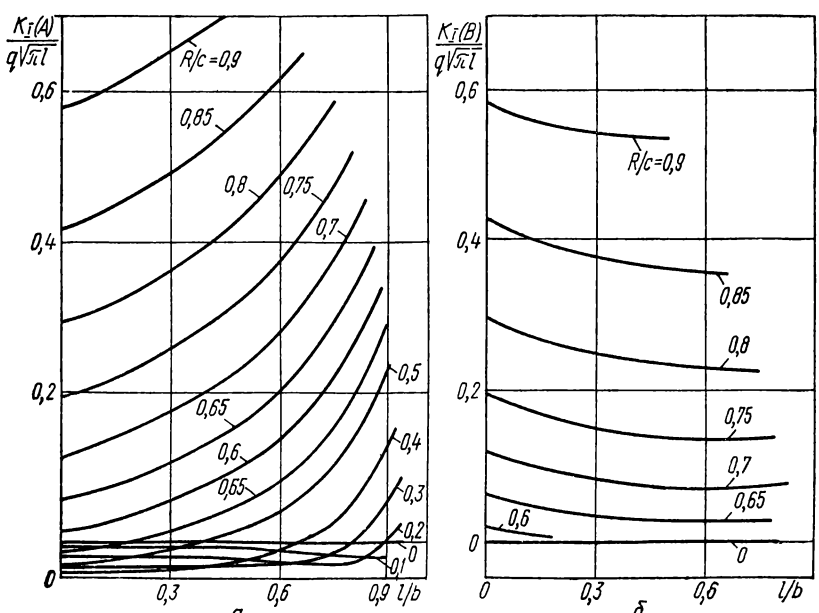


Рис. 3.179. Зависимость КИН K_I в вершинах A (*а*) и B (*б*) от параметра l/b при растяжении бесконечной плоскости с круговым отверстием и внутренней радиальной трещиной [50, 62].



Круговое отверстие и произвольно размещенная прямолинейная трещина. Пусть бесконечная плоскость с круговым отверстием и произвольно размещенной внутренней трещиной конечной длины находится под действием одноосного растяжения на бесконечности в направлении, перпендикулярном линии трещины. Контур отверстия и берега трещины

Таблица 3.91. **Значения КИН для произвольно размещенной трещины в бесконечной плоскости с круговым отверстием при одноосном растяжении на бесконечности для $R = 2l$ [265]**

$\frac{a}{l}$	$\frac{c}{l}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}(A)}{p\sqrt{\pi l}}$
0	3,2	1,417	2,274	0	0
	3,5	1,290	1,722	0	0
	4	1,188	1,394	0	0
	5	1,102	1,174	0	0
	6	1,065	1,099	0	0
	8	1,033	1,045	0	0
	∞	1,0	1,0	0	0
2,1	0	0,063	0,063	—0,170	0,170
2,5	0	0,260	0,260	—0,101	0,101
3	0	0,395	0,395	—0,064	0,064
4	0	0,574	0,574	—0,018	0,018
6	0	0,768	0,768	0,027	—0,027
10	0	0,906	0,906	0,036	—0,036
1	2,8	1,562	2,700	0,206	—0,790
	3,0	1,430	1,970	0,177	—0,316
	3,5	1,274	1,548	0,134	—0,047
	4	1,193	1,364	0,107	0,023
	6	1,070	1,109	0,048	0,032
	8	1,036	1,049	0,025	0,015
	10	1,022	1,028	0,014	0,007
0,3	3	1,607	4,267	0,072	—0,391
0,5	3	1,544	3,070	0,113	—0,412
1,0	3	1,430	1,969	0,177	—0,316
1,5	3	1,357	1,552	0,184	—0,241
2	3	1,299	1,337	0,150	—0,243
3	3	1,189	1,083	0,052	—0,282
4	3	1,091	0,957	0,011	—0,261
8	3	0,955	0,911	—0,014	—0,114
2,2	0	0,146	0,146	—0,113	0,113
	0,5	0,549	0,008	—0,124	—0,101
	1,0	0,952	0,196	—0,043	—0,372
	2	1,315	0,926	0,092	—0,526
	4	1,188	1,268	0,123	—0,060
	6	1,084	1,126	0,076	0,025

свободны от нагрузки (рис. 3.181). Значения КИН, полученные методом СИУ в работе [265], приведены в табл. 3.91—3.93.

Аналогичная схема изучалась в работе [268], в которой также приведены значения КИН для случая, когда контур отверстия жестко защемлен.

Эллиптическое отверстие и прямолинейная трещина. Пусть в бесконечной плоскости имеется эллиптическое отверстие и прямолинейная тре-

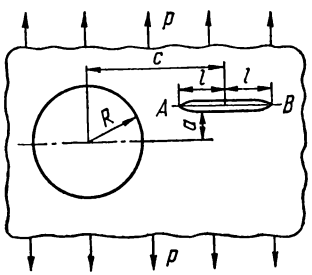
Таблица 3.92. **Значения КИН для произвольно размещенной трещины в бесконечной плоскости с круговым отверстием при одноосном растяжении на бесконечности для $a = R$ и $c - l = 0{,}2\,R$ [265]**

$\frac{R}{l}$	$\frac{K_{\mathrm{I}}(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{\mathrm{I}}(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{\mathrm{II}}(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{\mathrm{II}}(A)}{p\sqrt{\pi l}}$
5	0,366	0,058	—0,102	—0,021
3	0,882	0,257	—0,077	—0,349
2	1,247	0,600	0,094	—0,826
1,5	1,354	0,926	0,246	—1,226
1,0	1,312	1,384	0,400	—1,719
0,75	1,225	1,679	0,453	—1,972
0,5	1,092	2,180	0,486	—2,239

Таблица 3.93. **Значения КИН для произвольно размещенной трещины в бесконечной плоскости с круговым отверстием при одноосном растяжении на бесконечности для $R = 2a$ [265]**

$\frac{R}{l}$	$\frac{c}{l}$	$\frac{K_{\mathrm{I}}(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{\mathrm{I}}(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{\mathrm{II}}(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{\mathrm{II}}(A)}{p\sqrt{\pi l}}$
5	5,5	1,866	2,426	0,001	—0,816
3	3,7	1,721	2,668	0,148	—0,791
2	2,8	1,562	2,862	0,206	—0,727
1,5	2,35	1,448	2,993	0,217	—0,645
1,0	1,9	1,309	3,139	0,205	—0,472
0,75	1,675	1,232	3,185	0,188	—0,319
0,5	1,45	1,153	3,120	0,165	—0,098

щина, расположенная на продолжении большой оси эллипса. Берега трещины и контур отверстия свободны от нагрузки, а на бесконечности плоскость растягивается в направлении, перпендикулярном линии трещины



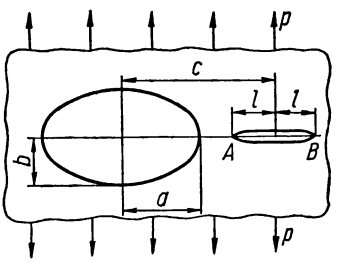


Рис. 3.181. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и внутренней произвольно размещенной трещиной.

Рис. 3.182. Бесконечная плоскость с эллиптическим отверстием и прямолинейной трещиной.

(рис. 3.182). Значения КИН, полученные методом массовых сил в работе [263], приведены в табл. 3.94. Данные для КИН имеются также в работах [266, 269].

Таблица 3.94. **Значения КИН при растяжении бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием и прямолинейной трещиной при $c = 2a$ [263]**

$\frac{l}{c}$	$a=b$		$a = 2b$	
	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi l}}$
0,001	1,219	1,219	1,171	1,171
0,1	1,262	1,196	1,202	1,154
0,2	1,338	1,189	1,258	1,147
0,3	1,478	1,194	1,372	1,152
0,4	1,785	1,221	1,670	1,173
0,45	2,221	1,255	2,105	1,202

Таблица 3.95. **Значения КИН $K_I = \sigma\sqrt{\pi l}F_I$ и $K_{II} = \sigma\sqrt{\pi l}F_{II}$ для бесконечной плоскости с круговым отверстием и двумя прямолинейными трещинами при горизонтальном ($\sigma = q$) и вертикальном ($\sigma = p$) растяжении или чистом сдвиге ($\sigma = \tau$) на бесконечности для $c/R = 2$, $l/(c - R) = 0{,}8$ [270]**

α	$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_{II}(A)$	$F_{II}(B)$	$F_I(C)$	$F_I(D)$	$F_{II}(C)$	$F_{II}(D)$
				Горизонтальное растяжение				
0	0,025	—0,138	0	0	—0,138	0,025	0	0
$\pi/18$	0,026	—0,137	—0,001	—0,002	—0,148	0,044	—0,007	—0,101
$\pi/9$	0,026	—0,136	—0,003	—0,003	—0,164	0,097	—0,044	—0,190
$\pi/6$	0,027	—0,133	—0,004	—0,004	—0,150	0,180	—0,116	—0,256
$2\pi/9$	0,029	—0,129	—0,004	—0,005	—0,082	0,281	—0,198	—0,288
$5\pi/18$	0,031	—0,123	—0,004	—0,005	0,036	0,386	—0,260	—0,279
$\pi/3$	0,033	—0,118	—0,004	—0,005	0,181	0,478	—0,278	—0,230
$7\pi/18$	0,035	—0,114	—0,003	—0,004	0,327	0,540	—0,249	—0,145
$4\pi/9$	0,036	—0,111	—0,002	—0,002	0,448	0,559	—0,177	—0,038
$\pi/2$	0,036	—0,110	0	0	0,529	0,529	—0,075	0,075
				Вертикальное растяжение				
0	1,282	1,936	0	0	1,936	1,282	0	0
$\pi/18$	1,280	1,931	—0,006	—0,007	1,899	1,252	0,184	0,154
$\pi/9$	1,274	1,918	—0,011	—0,013	1,792	1,166	0,368	0,293
$\pi/6$	1,266	1,899	—0,015	—0,017	1,614	1,033	0,536	0,399
$2\pi/9$	1,257	1,879	—0,017	—0,020	1,370	0,868	0,655	0,455
$5\pi/18$	1,248	1,858	—0,017	—0,019	1,088	0,691	0,693	0,450
$\pi/3$	1,239	1,840	—0,014	—0,016	0,811	0,527	0,641	0,380
$7\pi/18$	1,233	1,825	—0,010	—0,012	0,578	0,399	0,512	0,251
$4\pi/9$	1,229	1,816	—0,005	—0,006	0,414	0,328	0,330	0,076
$\pi/2$	1,227	1,813	0	0	0,331	0,331	0,126	—0,126

Продолжение табл. 3.95

α	$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_{II}(A)$	$F_{II}(B)$	$F_I(C)$	$F_I(D)$	$F_{II}(C)$	$F_{II}(D)$
				Чистый сдвиг				
0	0	0	1,369	1,552	0	0	1,552	1,369
$\pi/18$	—0,017	—0,040	1,369	1,552	—0,730	—0,460	1,375	1,294
$\pi/9$	—0,031	—0,072	1,369	1,552	—1,237	—0,863	0,934	1,079
$\pi/6$	—0,039	—0,092	1,369	1,552	—1,463	—1,167	0,389	0,752
$2\pi/9$	—0,042	—0,099	1,368	1,551	—1,450	—1,340	—0,145	0,349
$5\pi/18$	—0,040	—0,095	1,368	1,551	—1,265	—1,371	—0,603	—0,084
$\pi/3$	—0,034	—0,080	1,368	1,551	—0,963	—1,260	—0,956	—0,502
$7\pi/18$	—0,024	—0,057	1,368	1,551	—0,583	—1,022	—1,193	—0,863
$4\pi/9$	—0,013	—0,030	1,368	1,551	—0,158	—0,683	—1,304	—1,132
$\pi/2$	0	0	1,368	1,551	0,276	—0,276	—1,283	—1,283

Круговое отверстие и две прямолинейные трещины. Бесконечная плоскость, ослабленная круговым отверстием и двумя прямолинейными трещинами равной длины, находится под действием двухосного растяжения и чистого сдвига на бесконечности. Контур отверстия и берега трещи-

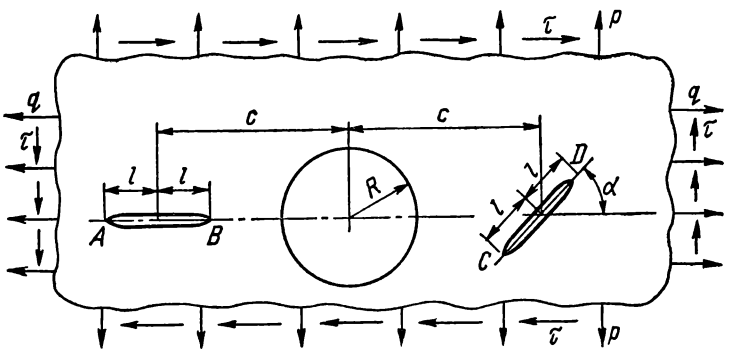


Рис. 3.183. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и двумя прямолинейными трещинами при нагружении на бесконечности.

свободны от нагрузки (рис. 3.183). Значения КИН, полученные методом интегральных уравнений в работе [270], приведены в табл. 3.95.

В случае, когда в плоскости с круговым отверстием две равные трещины симметрично размещены в диаметральной плоскости, в работах [271, 272] построено асимптотическое решение задачи при действии постоянного давления на трещинах (рис. 3.184). Формулы для КИН имеют вид

$$K_I(a) = \sigma b^2 \sqrt{\pi}/\sqrt{a(b^2-a^2)}\,\{[E/K-(a/b)^2]+$$

$$+(E/K-1)(b/a)^2(c_0\rho^2+c_1\rho^4+c_3\rho^6)-c_2(1/a)^4\rho^6(a^4\beta+2a^2b^2-2b^4)+$$

$$+O(\rho^8)\},$$

$$K_I(b) = \sigma b^2 \sqrt{\pi}/\sqrt{b(b^2-a^2)}\,\{(1-E/K)+[1-Eb^2/(Ka^2)]\times$$

$$\times(c_0\rho^2+c_1\rho^4+c_3\rho^6)+2c_2\beta\rho^6+O(\rho^8)\},$$

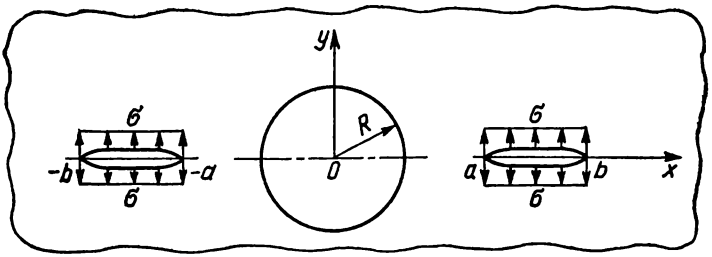


Рис. 3.184. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и двумя симметричными трещинами под давлением.

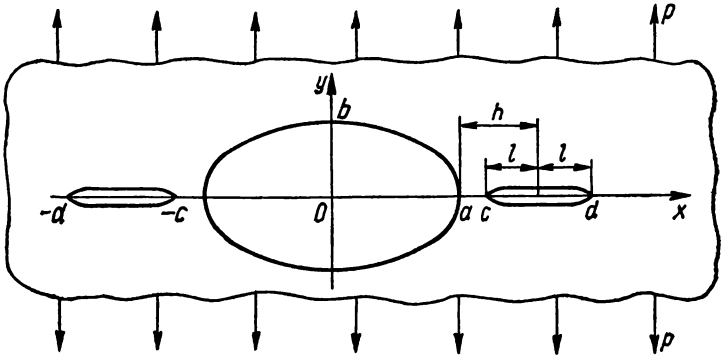


Рис. 3.185. Бесконечная плоскость с эллиптическим отверстием и двумя симметрично расположенными трещинами.

Таблица 3.96. **Значения КИН $K_I\,(c)/(p\sqrt{\pi l})$ при растяжении бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием и двумя симметричными трещинами ($\rho = b^2/a$) [78]**

$\frac{a}{b}$	$l/\rho = 0,1$				$l/\rho = 0,5$			
	l/h				l/h			
	0,1	0,2	0,4	0,8	0,1	0,2	0,4	0,8
0,5	1,035	1,145	1,438	2,259	1,003	1,001	1,064	1,598
1,0	1,238	1,593	2,157	3,113	1,018	1,068	1,269	2,256
2,0	1,900	2,659	3,661	5,280	1,137	1,366	1,936	3,762

где $K = K(k)$, $E = E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно с модулем $k = \sqrt{1 - (a/b)^2}$;

$$\rho = R/b,$$

$$\beta = 2b^4/(3a^4)\,[2E/K - (a/b)^2\,(E/K - 1)],$$

$$c_0 = a/b - E/K, \quad c_1 = c_0 b^2/(2a^2)\,[1 + (a/b)^2 - 2E/K],$$

$$c_2 = E\,(1 + b^2/a^2)/K - 2,$$

$$c_3 = c_1^2/c_0 + (b^2/a^2 - 1)\,c_2.$$

Эллиптическое отверстие и две прямолинейные трещины. Пусть в бесконечной плоскости имеется эллиптическое отверстие и две прямолинейные трещины, симметрично расположенные на продолжении оси эллипса. Берега трещин и контур отверстия свободны от нагрузки, а на бесконечности плоскость растягивается в направлении, перпендикулярном линии трещин (рис. 3.185). Значения КИН в ближайшей к контуру отверстия вершине трещины, полученные методом массовых сил в работе [78], приведены в табл. 3.96.

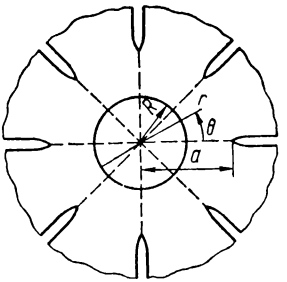


Рис. 3.186. Бесконечная плоскость с круговым отверстием и циклической системой радиальных полубесконечных трещин.

Круговое отверстие и циклическая система внешних трещин. Пусть в бесконечной плоскости с круговым отверстием имеется циклическая система радиальных полубесконечных трещин. Контур отверстия свободен от нагрузки, а на берегах трещин задана одна и та же симметричная нагрузка: $\tau_{r\theta}^{\pm} = 0$, $\sigma_{\theta\theta}^{\pm} = p_0 (r/a)^{-k}$, где r — радиальная координата. Ниже приведены значения КИН для различных случаев числа трещин m при $k = 3$ и $R/a = 0{,}5$:

m	2	4	6	8	10
$K_I/(p_0\sqrt{\pi a})$	0,1567	0,1660	0,1745	0,1967	0,3244

Эти результаты получены в работе [273] методом интегральных уравнений.

3.17. Бесконечная плоскость с системой отверстий и трещин

Два круговых отверстия и симметричная трещина на линии их центров. Пусть бесконечная плоскость ослаблена двумя одинаковыми круговыми отверстиями и симметричной прямолинейной трещиной, размещенной на линии их центров. Берега трещины и контуры отверстий свободны от на-

Таблица 3.97. **Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ при растяжении бесконечной плоскости с двумя круговыми отверстиями и симметричной трещиной на линии их центров [16, 258]**

$\frac{l}{a-R}$	a/R				
	1,15	1,25	1,5	2,0	4,0
0,01	4,3975	3,2630	2,1530	1,4687	1,0761
0,1	4,4160	3,2739	2,1612	1,4738	1,0774
0,2	4,4751	3,3143	2,1875	1,4898	1,0816
0,3	4,5853	3,3856	2,2338	1,5183	1,0892
0,4	4,7308	3,4946	2,3045	1,5624	1,1017
0,5	4,9593	3,6538	2,4076	1,6279	1,1215
0,6	5,2890	3,8850	2,5575	1,7249	1,1538
0,7	5,7816	4,2271	2,7824	1,8740	1,2101
0,8	...	4,7825	3,1504	2,1230	1,3202
0,9	...	5,8028	3,8661	2,6350	1,5927

грузки, а на бесконечности задано одноосное растяжение (рис. 3.187). Значения КИН, полученные методом граничной коллокации [258], приведены в табл. 3.97. Данные по КИН имеются также в работах [17, 18, 50, 176, 267]. В работе [176] получены КИН, когда граница отверстий жестко защемлена (жесткие круговые включения).

Прямолинейная трещина и два круговых отверстия по обе ее стороны. Пусть центры отверстий и трещины находятся на одной прямой, причем

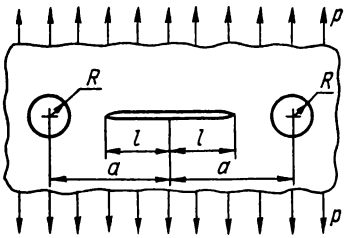


Рис. 3.187. Бесконечная плоскость с двумя круговыми отверстиями и симметричной трещиной на линии их центров.

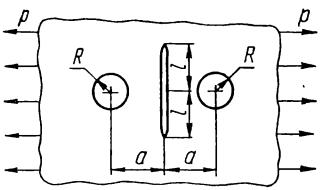


Рис. 3.188. Растяжение бесконечной плоскости с прямолинейной трещиной и двумя круговыми отверстиями, симметрично размещенными по обе ее стороны.

трещина перпендикулярна к этой прямой. Берега трещины и контуры отверстий свободны от нагрузки, а на бесконечности задано одноосное растяжение (рис. 3.188). Значения КИН, полученные методом граничной коллокации [258], приведены в табл. 3.98. Данные по КИН имеются также в работах [17, 18, 50].

Таблица 3.98. **Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ при растяжении бесконечной плоскости с прямолинейной трещиной и двумя круговыми отверстиями по обе ее стороны [16, 258]**

$\frac{l}{R}$	a/R				
	2,0	3,0	4,0	6,0	10,0
0,01	0,1390	0,5234	0,7127	0,8661	0,9506
0,25	0,1728	0,5355	0,7172	0,8671	...
0,50	0,2683	0,5698	0,7303	0,8700	0,9512
0,75	0,4045	0,6206	0,7505	0,8748	...
1,00	0,5502	0,6799	0,7758	0,8810	0,9528
1,50	0,7809	0,7958	0,8324	0,8969	0,9553
2,00	0,9058	0,8819	0,8847	0,9150	0,9585
2,50	0,9640	0,9351	0,9250	0,9328	0,9622
3,00	0,9902	0,9654	0,9527	0,9486	0,9663

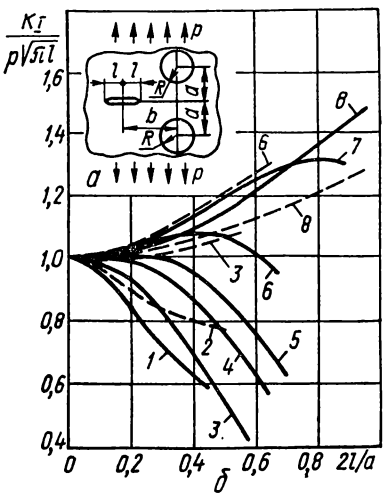
Когда трещина размещена эксцентрично по отношению к линии центров отверстий (рис. 3.189, *а*), решение задачи получено методом рядов Лорана в работе [176]. Зависимость КИН от относительной длины трещины показана на рис. 3.189, *б* для случая, когда длина трещины равна диаметру отверстия.

Пусть в плоскости с двумя круговыми отверстиями и центральной поперечной трещиной напряжения на бесконечности и на берегах трещины

отсутствуют, а растягивающая симметричная нагрузка с главным вектором $\mathbf{F} \neq 0$ приложена к контурам отверстий. Задача решена методом СИУ в работе [274] для четырех видов нагрузки на контурах отверстий: равномерное распределение вертикальных напряжений (рис. 3.190, *а*); вертикальные напряжения распределены на части контура отверстия по закону

$$N + iT = 3Fi\,[(\theta - \pi/2)^2 - \beta^2]\exp(-i\theta)/(4R\beta^3)$$

при $\pi/2 - \beta \leqslant \theta \leqslant \pi/2 + \beta$, $N + iT = 0$ при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 - \beta$, $\pi/2 + \beta \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ (N и T — нормальная и касательная компоненты напря-



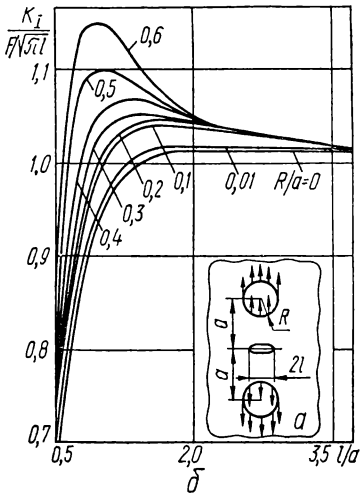


Рис. 3.189. Бесконечная плоскость с двумя круговыми отверстиями и эксцентрично размещенной трещиной (*а*) и зависимость КИН от параметра $2l/a$ при одноосном растяжении на бесконечности для вершины A (сплошные линии) и B (штриховые линии) в случае $l = R$:

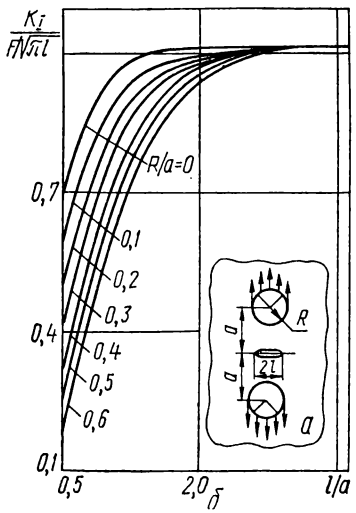
1 — $\lambda = b/a = 0$; *2* — $\lambda = 0{,}2$; *3* — $\lambda = 0{,}5$; *4* — $\lambda = 0{,}7$; *5* — $\lambda = 0{,}8$; *6* — $\lambda = 1{,}0$; *7* — $\lambda = 1{,}5$; *8* — $\lambda = 2{,}0$ (*б*) [176].

Рис. 3.190. Действие равномерной вертикальной растягивающей нагрузки на контурах двух круговых отверстий в бесконечной плоскости с симметричной трещиной (*а*) и зависимость КИН от параметра l/a (*б*) [274].

жения на контуре отверстия, θ — полярный угол в цилиндрической системе координат с полюсом в центре отверстия) (рис. 3.191, *а*); нормальные напряжения распределены на части контура отверстия по закону

$$N + iT = F\,[(\theta - \pi/2)^2 - \beta^2]/[4R\,(\beta\cos\beta - \sin\beta)]$$

при $\pi/2 - \beta \leqslant \theta \leqslant \pi/2 + \beta$, $N + iT = 0$ при $0 \leqslant 0 \leqslant \pi/2 - \beta$, $\pi/2 + \beta \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ (рис. 3.192, *а*); растяжение сосредоточенными силами F, приложенными к точкам контуров отверстий (рис. 3.193, *а*). Зависимость КИН от относительной длины трещины показана на рис. 3.190, *б* — 3.193, *б* при $\varkappa = 2$ и $\beta = \pi/4$. Случай $R/a = 0$ соответствует точному решению задачи о растяжении плоскости с прямолинейной трещиной двумя сосредоточенными силами F, приложенными в симметричных точках.



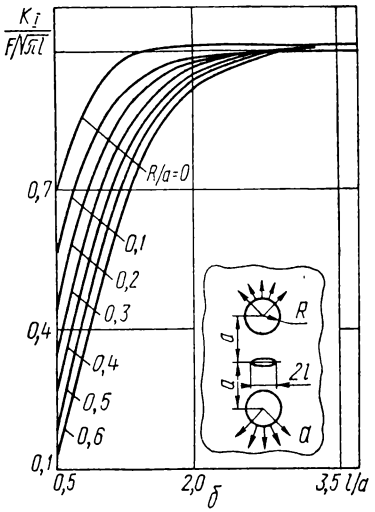


Рис. 3.191. Действие вертикальной растягивающей нагрузки, распределенной на части контуров двух круговых отверстий в бесконечной плоскости с симметричной трещиной (*а*), и зависимость КИН от параметра *l/a* (*б*) [274].

Рис. 3.192. Действие нормальной нагрузки, распределенной на части контуров двух круговых отверстий в бесконечной плоскости с симметричной трещиной (*а*), и зависимость КИН от параметра *l/a* (*б*) [274].

Таблица 3.99. Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ при растяжении бесконечной плоскости с двумя эллиптическими отверстиями и симметричной трещиной на линии их центров [78]

$\frac{l}{a}$	$\frac{h}{a}$	a/b			
		1	2	8	∞
2	3	1,076	1,064	1,061	1,061
4	3	1,064	1,052	1,048	1,049
4	7	1,012	1,011	1,011	1,011
4	13	1,004	1,004	1,004	1,004
8	3	1,058	1,045	1,040	1,040

В последнем случае нагрузки, когда к контурам отверстий приложены сосредоточенные силы, табличные значения КИН приведены в работе [2]. При этой же нагрузке в работе [275] построено асимптотическое решение задачи для малых значений параметра $\varepsilon = R/a$,

$$K_I = (FLA/\sqrt{\pi l})\{1 + 2A^2/(1+\varkappa) + \varepsilon A^2\{1 - 6A^2 +$$

$$+ \varepsilon[3A^2(8A^2 - 3A^4 - 4) + (\varkappa + 3A^2 - 3A^4 + 10A^6 - 12A^8)/(1+\varkappa)] +$$

$$+ (\varepsilon^2/4)(1 - 42A^2 + 193A^4 - 154A^6 - 54A^8 + 54A^{10})\}\} + O(\varepsilon^4), \quad (3,62)$$

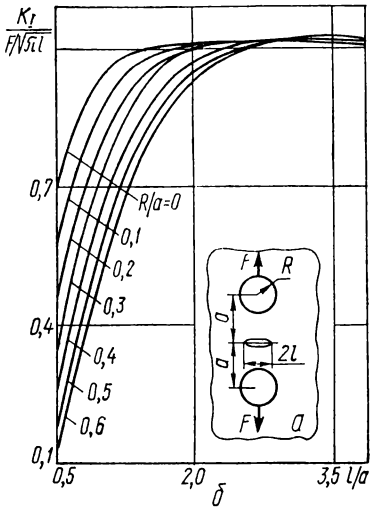


Рис. 3.193. Действие растягивающих сосредоточенных сил на контурах двух круговых отверстий в бесконечной плоскости с симметричной трещиной (*а*) и зависимость КИН от параметра *l*/*a* (*б*) [274].

где $A = 1/\sqrt{1+L^2}$, $L = l/a$. Сравнение этого решения с данными на рис. 3.193 показывает, что с увеличением радиуса отверстия и уменьшением длины трещины относительная погрешность решения (3.62) возрастает. Ее максимальные значения не превышают 0,3 % ($\varepsilon \leqslant 0{,}2$), 4,2 % ($\varepsilon \leqslant 0{,}3$), 15 % ($\varepsilon \leqslant 0{,}4$) для всех $L \geqslant 0{,}5$ и 0,3 % ($L \geqslant 3$), 0,8 % ($L \geqslant 2$), 13,5 % ($L \geqslant 1$) при любых $\varepsilon \leqslant 0{,}5$.

Аналогичное решение получено также, когда растягивающие силы приложены к жестким впаянным в отверстия круговым включениям [275]

$$K_I = (FLA/\sqrt{\pi l})\{1 + 2A^2(\varkappa+1)^{-1} + \varepsilon^2 A^2/(2\varkappa(\varkappa+1))[4 - \varkappa^3(1-A^2) + \varkappa^2 A^4 + \varkappa(3 - 3A^2 - 19A^4 + 18A^6) - 2A^2(1-A^2)(4 + 11A^2 + 12A^4)]\} + O(\varepsilon^4).$$

Два круговых отверстия и центральная произвольно ориентированная трещина. Пусть бесконечная плоскость, ослабленная двумя круговыми отверстиями и центральной произвольно ориентированной трещиной, подвергнута на бесконечности растяжению усилиями p и q, действующими во взаимно перпендикулярных направлениях. Отверстия и трещины свободны от нагрузки (рис. 3.194). Зависимости КИН в вершине A, полученные методом СИУ в работах [2, 276], от угла ориентации трещины α приведены на рис. 3.195—3.197.

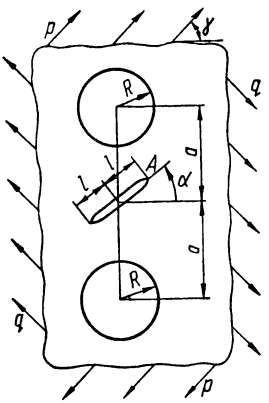


Рис. 3.194. Двухосное растяжение бесконечной плоскости с двумя круговыми отверстиями и центральной произвольно ориентированной рещиной.

Два эллиптических отверстия и симметричная трещина на линии их центров. Пусть бесконечная плоскость ослаблена двумя одинаковыми эллиптическими отверстиями и прямолинейной симметрично расположенной трещиной на прямой, соединяющей их центры. Трещина и отверстия свободны от нагрузки, а на бесконечности задано одноосное растяжение (рис. 3.198). Значения КИН, полученные методом массовых сил в работе [78], приведены в табл. 3.99. Данные для КИН имеются также в работе [269].

Два круговых отверстия с краевыми трещинами. Пусть на контуры двух одинаковых

Таблица 3.100. **Значения КИН $K_I\,(A_2)/(p\sqrt{\pi l_2})$ при растяжении выходят навстречу друг другу две коллинеарные трещины различной длины**

$\frac{l_2}{R}$	0,05	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
0,05	3,067	3,08	3,100	3,140	3,160	3,227
0,5	1,730	1,740	1,758	1,793	1,817	1,864
1,0	1,320	1,344	1,358	1,383	1,417	1,466
1,5	1,14	1,166	1,192	1,216	1,255	1,312
2,0	1,040	1,089	1,110	1,140	1,187	1,259
2,5	1,016	1,033	1,059	1,095	1,161	1,268
3,0	0,980	1,001	1,035	1,087	1,200	1,484
3,5	0,963	0,987	1,031	1,090	1,343	...
4,0	0,960	0,987	1,064	1,258	...	...
4,5	0,967	1,016	1,095	...	...	...
5,0	1,060	1,118	...	...	...	...
5,5	1,155	...	...	...	...	—

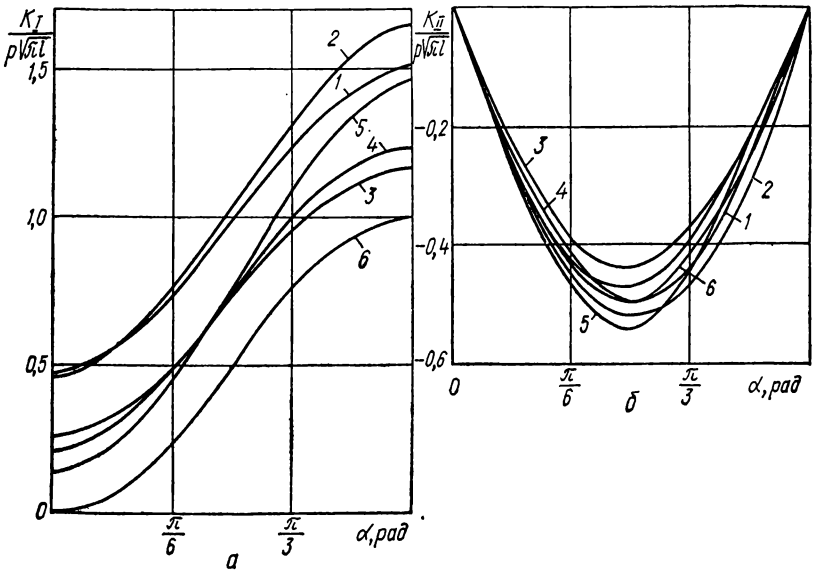


Рис. 3.195. Зависимость КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ (*а*) и $K_{II}/(p\sqrt{\pi l})$ (*б*) при одноосном растяжении ($\gamma = 0$, $q = 0$) плоскости с двумя круговыми отверстиями и прямолинейной трещиной от угла ее ориентации α:
1 — $\delta = l/R = 0{,}25$; $\lambda = a/R = 2$; *2* — $\delta = 0{,}5$; $\lambda = 2$; *3* — $\delta = 0{,}5$; $\lambda = 3$; *4* — $\delta = 1$; $\lambda = 3$; *5* — $\delta = 1{,}5$; $\lambda = 3$; *6* — $R = 0$ [2, 276].

бесконечной плоскости с двумя круговыми отверстиями, на контуры которых при $H/R = 8$ [277]

l_1/R					
3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5
3,280	3,384	3,520	3,695	4,050	4,774
1,931	2,019	2,159	2,407	2,967	...
1,537	1,650	1,836	2,280	...	...
1,400	1,557	1,917	...	...	...
1,404	1,692	...	...	...	...
1,536	...	...	...	...	—
...	...	...	...	—	—
...	...	...	—	—	—
...	...	—	—	—	—
...	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—

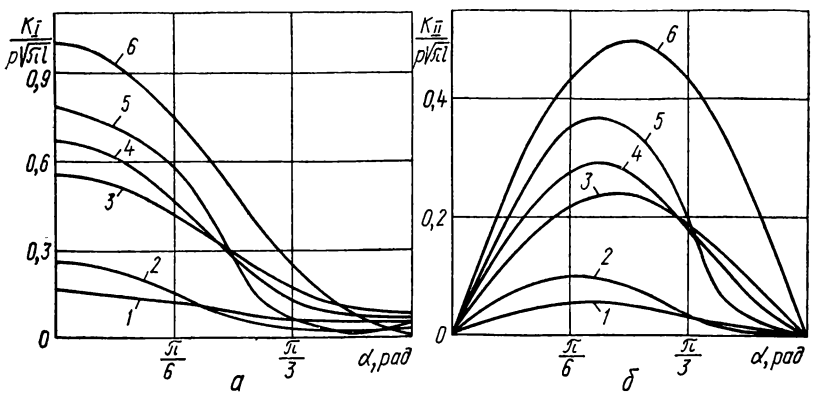


Рис. 3.196. Зависимость КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ (*а*) и $K_{II}/(p\sqrt{\pi l})$ (*б*) при одноосном растяжении ($\gamma = \pi/2$, $q = 0$) плоскости с двумя круговыми отверстиями и прямолинейной трещиной от угла ее ориентации α: *1* — $\delta = 0{,}25$, $\lambda = 2$; *2* — $\delta = 0{,}5$, $\lambda = 2$; *3* — $\delta = 0{,}5$; $\lambda = 3$; *4* — $\delta = 1$; $\lambda = 3$; *5* — $\delta = 1{,}5$, $\lambda = 3$; *6* — $R = 0$ [2, 276].

круговых отверстий в бесконечной плоскости выходят навстречу друг другу две коллинеарные трещины различной длины. Отверстия и трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности задано одноосное растяжение (рис. 3.199). Значения КИН, полученные с помощью МКЭ в работе [277], приведены в табл. 3.100.

Случай двух равных трещин (рис. 3.199; $l_1 = l_2 = l$) рассмотрен методом СИУ в работе [239]. Численные результаты приведены в табл. 3.101.

Пусть на контуры двух равных круговых отверстий с внешней стороны выходят две симметричные прямолинейные трещины. Отверстия и трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности задано одноосное

растяжение (рис. 3.200). Значения КИН, полученные методом СИУ в работе [239], приведены в табл. 3.102.

Периодическая система круговых отверстий с краевыми трещинами. Пусть бесконечная плоскость ослаблена периодической системой круговых

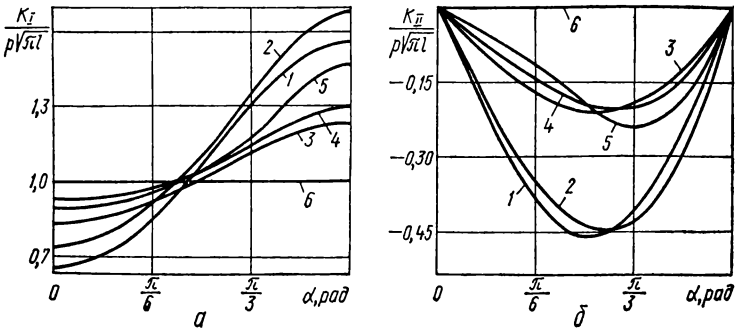
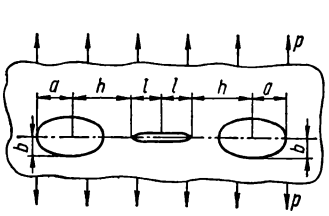


Рис. 3.197. Зависимость КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ (*а*) и $K_{II}/(p\sqrt{\pi l})$ (*б*) при всестороннем растяжении ($p = q$) плоскости с двумя круговыми отверстиями и прямолинейной трещиной от угла ее ориентации α:
1 — $\delta = 0{,}25$, $\lambda = 2$; *2* — $\delta = 0{,}5$, $\lambda = 2$; *3* — $\delta = 0{,}5$, $\lambda = 3$; *4* — $\delta = 1$, $\lambda = 3$; *5* — $\delta = 1{,}5$, $\lambda = 3$; *6* — $R = 0$ [2, 276].



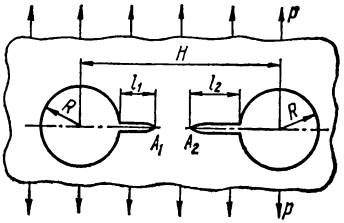


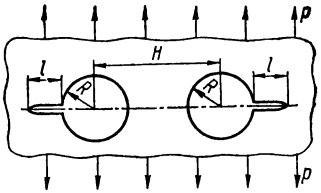
Рис. 3.198. Бесконечная плоскость с двумя эллиптическими отверстиями и симметричной трещиной на линии их центров.

Рис. 3.199. Бесконечная плоскость с двумя круговыми отверстиями, на контуры которых выходят навстречу друг другу две коллинеарные трещины.

Таблица 3.101. **Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ при растяжении бесконечной плоскости с двумя круговыми отверстиями, на контуры которых выходят навстречу друг другу две равные коллинеарные трещины [239]**

$\frac{H}{2R}$	$l/(H/2 - R)$								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2,0	2,819	2,460	2,206	2,034	1,922	1,861	1,856	1,933	2,221
2,5	2,581	2,140	1,869	1,698	1,591	1,532	1,520	1,574	1,793
3,0	2,394	1,920	1,654	1,496	1,400	1,349	1,338	1,384	1,571
3,5	2,242	1,757	1,505	1,361	1,277	1,233	1,226	1,269	1,437
4,0	2,110	1,627	1,394	1,265	1,191	1,154	1,149	1,190	1,347

Рис. 3.200. Бесконечная плоскость с двумя равными круговыми отверстиями и двумя симметричными краевыми трещинами с внешней стороны.



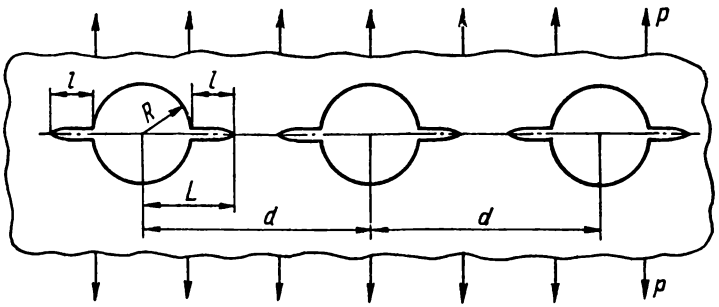


Рис. 3.201. Бесконечная плоскость с периодической системой круговых отверстий с краевыми трещинами.

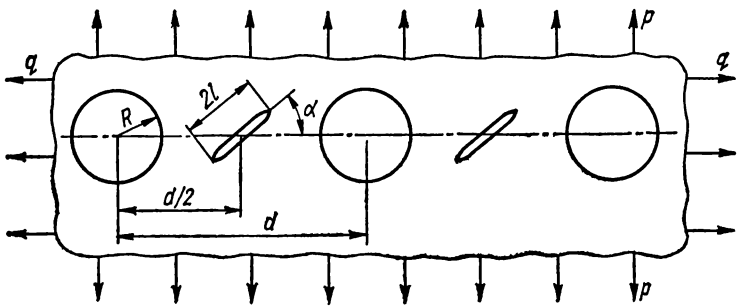


Рис. 3.202. Бесконечная плоскость с периодической системой круговых отверстий и произвольно ориентированных прямолинейных трещин.

Таблица 3.102. Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ при растяжении бесконечной плоскости с двумя круговыми отверстиями и двумя симметричными краевыми трещинами с внешней стороны [239]

$\frac{H}{2R}$	l/R				
	0,5	1,0	2,0	4,0	10,0
1,5	1,844	1,414	1,134	0,984	0,897
2,0	1,786	1,365	1,092	0,947	0,866
3,0	1,752	1,333	1,062	0,917	0,837
4,0	1,746	1,322	1,051	0,904	0,822

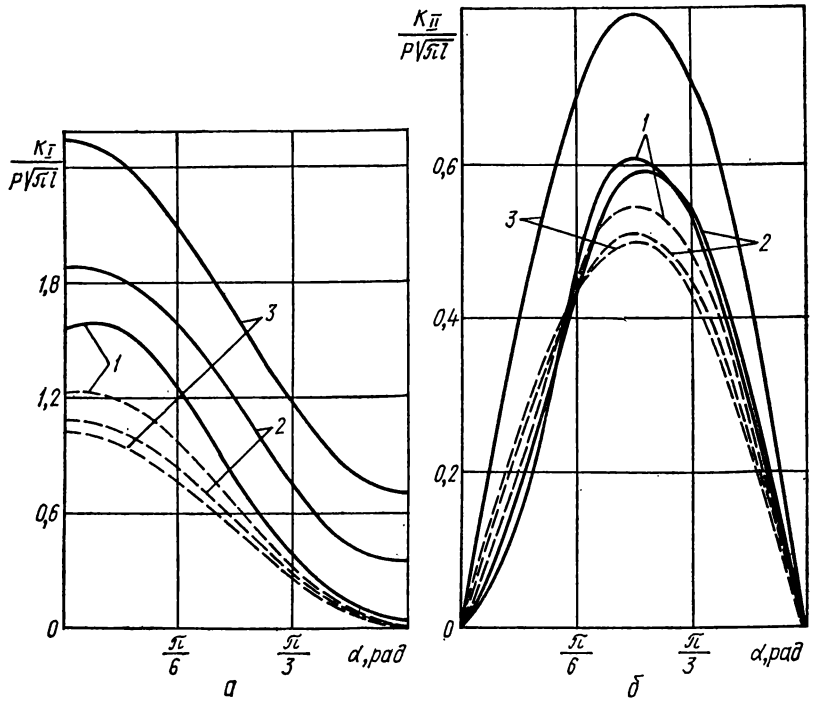


Рис. 3.203. Зависимость КИН K_I (*а*) и K_{II} (*б*) от угла α при одноосном растяжении ($q = 0$) бесконечной плоскости с периодической системой круговых отверстий и произвольно ориентированных прямолинейных трещин:
1 — $\lambda = 2R/d = 0{,}2$; $\varepsilon = 2l/d = 0{,}6$; *2* — $\lambda = 0{,}4$; $\varepsilon = 0{,}4$; *3* — $\lambda = 0{,}6$, $\varepsilon = 0{,}2$ (штриховые линии соответствуют случаю $\lambda = 0$) [281].

отверстий, из контуров которых симметрично исходят прямолинейные трещины. Контуры отверстий и берега трещин свободны от внешних усилий, а на бесконечности задано одноосное растяжение (рис. 3.201). Значения КИН, полученные методом СИУ в работе [278], приведены в табл. 3.103. Данные по КИН имеются также в работах [193, 279, 280]. Рассматривался в приближенной постановке также случай периодической системы круговых отверстий, когда одна или две трещины выходят на контур только одного отверстия [192, 193].

Периодическая система круговых отверстий и внутренних трещин. Пусть бесконечная плоскость содержит периодическую систему круговых отверстий и прямолинейных трещин произвольной ориентации, расположенных таким образом, что центры трещин и отверстий находятся на одной прямой. Контуры отверстий и берега трещин свободны от внешних усилий, а на бесконечности задано двухосное растяжение (рис. 3.202). Зависимость КИН, полученная методом СИУ в работе [281], от угла ориентации трещин показана на рис. 3.203 и 3.204.

Пусть в плоскости с периодической системой круговых отверстий имеется также периодическая система коллинеарных трещин, причем в

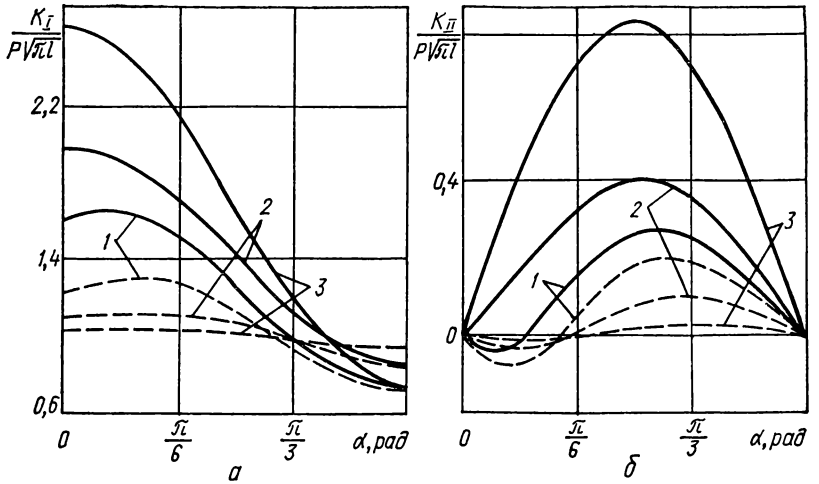


Рис. 3.204. Зависимость КИН K_I (*а*) и K_{II} (*б*) от угла α при всестороннем растяжении ($p = q$) бесконечной плоскости с периодической системой круговых отверстий и произвольно ориентированных прямолинейных трещин:

1 — $\lambda = 0{,}2$, $\varepsilon = 0{,}6$; *2* — $\lambda = 0{,}4$, $\varepsilon = 0{,}4$; *3* — $\lambda = 0{,}6$, $\varepsilon = 0{,}2$ (штриховые линии соответствуют случаю $\lambda = 0$) [281].

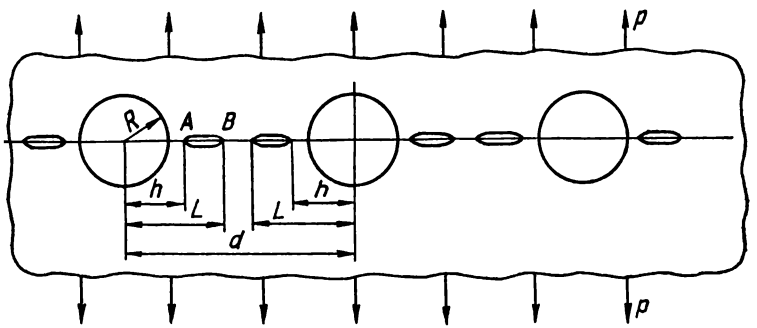


Рис. 3.205. Бесконечная плоскость с периодической системой круговых отверстий и коллинеарных трещин.

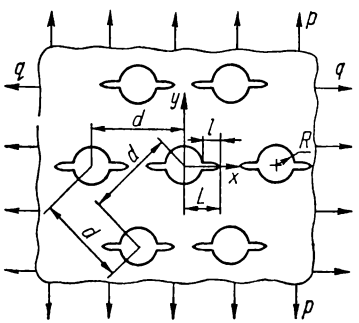


Рис. 3.206. Бесконечная плоскость с двоякопериодической системой круговых отверстий с краевыми трещинами, когда их центры образуют правильную треугольную решетку.

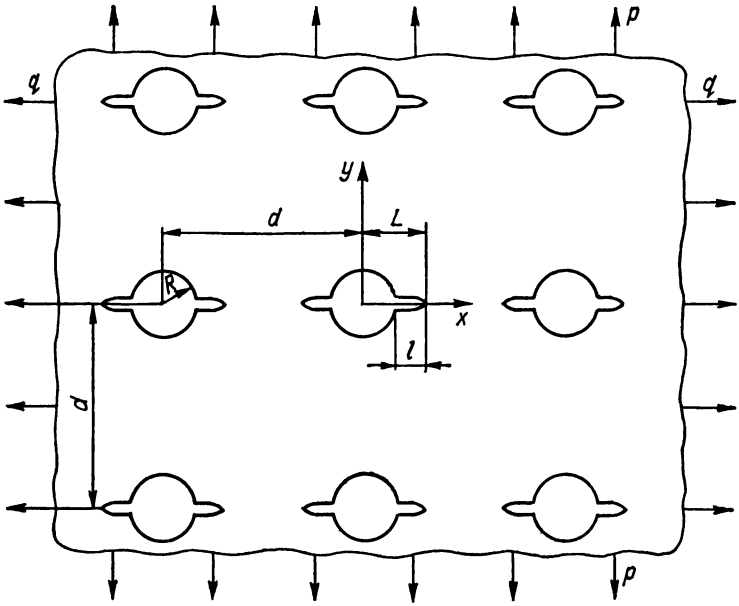


Рис. 3.207. Бесконечная плоскость с двоякопериодической системой круговых отверстий с краевыми трещинами, когда их центры образуют квадратную решетку.

Таблица 3.103. Значения КИН $K_I/[p\sqrt{\pi l(1+R/L)}]$ при растяжении бесконечной плоскости с периодической системой круговых отверстий с краевыми трещинами [278]

$\frac{2L}{d}$	$2R/d$				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,15	2,828	—	—	—	—
0,20	2,420	—	—	—	—
0,25	2,274	3,351	—	—	—
0,30	2,218	2,863	—	—	—
0,35	2,203	2,622	3,666	—	—
0,40	2,213	2,500	3,199	—	—
0,45	2,244	2,445	2,929	3,929	—
0,50	2,286	2,432	2,789	3,486	—
0,55	2,346	2,452	2,717	3,237	4,233
0,60	2,427	2,501	2,699	3,095	3,803
0,65	2,531	2,581	2,728	3,032	3,586
0,70	2,667	2,696	2,804	3,039	3,479
0,75	2,849	2,860	2,935	3,116	3,469
0,80	3,099	3,094	3,140	3,276	3,563
0,85	3,459	3,344	3,457	3,555	3,789
0,90	4,011	3,969	3,963	4,027	4,221

Таблица 3.104. Значения КИН $K_I(A) = p\sqrt{\pi L(1-\lambda^2)/\lambda}F_I(A)$ ($\lambda = h/L$) и $K_I(B) = p\sqrt{\pi L(1-\lambda^2)}\,F_I(B)$ при растяжении бесконечной плоскости с периодической системой круговых отверстий и коллинеарных трещин, когда контуры отверстий жестко защемлены (над чертой) или свободны от нагрузки (под чертой), при $(L-h)/d = 0{,}15$ [278]

$\frac{2h}{d}$	$2R/d = 0{,}2$		$\frac{2h}{d}$	$2R/d = 0{,}3$	
	$F_I(A)$	$F_I(B)$		$F_I(A)$	$F_I(B)$
0,21	0,243 / 3,169	0,963 / 1,723	0,31	0,219 / 6,948	0,894 / 2,007
0,25	0,519 / 1,528	1,045 / 1,542	0,35	0,501 / 2,553	0,921 / 1,724
0,29	0,650 / 1,249	1,074 / 1,454	0,39	0,616 / 1,618	0,962 / 1,609
0,33	0,717 / 1,153	1,089 / 1,391	0,43	0,659 / 1,421	0,997 / 1,544
0,37	0,762 / 1,101	1,097 / 1,346	0,47	0,713 / 1,329	1,024 / 1,497
0,41	0,798 / 1,069	1,104 / 1,315	0,51	0,758 / 1,274	1,049 / 1,469
0,45	0,825 / 1,051	1,112 / 1,295	0,55	0,797 / 1,241	1,078 / 1,459
0,49	0,849 / 1,042	1,123 / 1,285	0,59	0,834 / 1,225	1,117 / 1,473

Таблица 3.105. Значения КИН $K_I/[p\sqrt{\pi l(1+R/L)}]$ при одноосном растяжении ($q = 0$) бесконечной плоскости с двоякопериодической системой круговых отверстий с краевыми трещинами в случаях треугольной (под чертой) и квадратной (над чертой) решеток [280, 282]

$\frac{2L}{d}$	$2R/d$					
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0,25	1,626 / 1,733	—	—	—	—	—
0,30	1,386 / 1,521	—	—	—	—	—
0,35	1,285 / 1,417	1,842 / 1,912	—	—	—	—
0,40	1,237 / 1,366	1,560 / 1,703	—	—	—	—

$\frac{2L}{d}$	$2R/d$					
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0,45	1,218 / 1,345	1,445 / 1,595	2,058 / 2,067	—	—	—
0,50	1,219 / 1,342	1,391 / 1,537	1,747 / 1,855	—	—	—
0,55	1,234 / 1,355	1,372 / 1,513	1,623 / 1,749	2,314 / 2,235	—	—
0,60	1,266 / 1,381	1,378 / 1,513	1,573 / 1,698	1,982 / 2,020	—	—
0,65	1,314 / 1,422	1,406 / 1,536	1,565 / 1,685	1,853 / 1,930	2,670 / 2,506	—
0,70	1,382 / 1,484	1,464 / 1,585	1,595 / 1,709	1,816 / 1,904	2,322 / 2,299	—
0,75	1,481 / 1,574	1,554 / 1,667	1,666 / 1,774	1,845 / 1,935	2,206 / 2,254	3,276 / 3,156
0,80	1,628 / 1,714	1,696 / 1,802	1,795 / 1,899	1,944 / 2,038	2,227 / 2,311	2,965 / 2,973
0,85	1,865 / 1,946	1,931 / 2,035	2,023 / 2,127	2,152 / 2,255	2,392 / 2,502	2,989 / 3,084
0,90	2,293 / 2,378	2,364 / 2,476	2,455 / 2,573	2,577 / 2,701	2,804 / 2,946	3,400 / 3,518

Таблица 3.106. **Значения КИН $K_I/[p\sqrt{\pi l(1+R/L)}]$ при всестороннем растяжении ($p=q$) бесконечной плоскости с двоякопериодической системой круговых отверстий с краевыми трещинами в случаях треугольной (под чертой) и квадратной (над чертой) решеток [280, 282]**

$\frac{2L}{d}$	$2R/a$					
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0,25	1,303 / 1,345	—	—	—	—	—
0,30	1,217 / 1,285	—	—	—	—	—
0,35	1,188 / 1,257	1,463 / 1,434	—	—	—	—
0,40	1,178 / 1,248	1,338 / 1,375	—	—	—	—

Продолжение табл. 3.106

$\frac{2L}{d}$	$2R/d$					
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0,45	1,182 / 1,252	1,305 / 1,353	1,674 / 1,554	—	—	—
0,50	1,196 / 1,266	1,299 / 1,351	1,508 / 1,479	—	—	—
0,55	1,221 / 1,290	1,311 / 1,363	1,465 / 1,459	1,967 / 1,743	—	—
0,60	1,258 / 1,324	1,338 / 1,389	1,466 / 1,466	1,757 / 1,638	—	—
0,65	1,309 / 1,372	1,383 / 1,430	1,493 / 1,496	1,700 / 1,620	2,382 / 2,062	—
0,70	1,381 / 1,437	1,448 / 1,491	1,547 / 1,549	1,711 / 1,646	2,121 / 1,911	—
0,75	1,481 / 1,529	1,545 / 1,581	1,635 / 1,634	1,771 / 1,714	2,055 / 1,904	2,962 / 2,609
0,80	1,629 / 1,669	1,691 / 1,720	1,775 / 1,769	1,892 / 1,839	2,105 / 1,984	2,678 / 2,395
0,85	1,867 / 1,899	1,929 / 1,951	2,009 / 2,000	2,112 / 2,062	2,281 / 2,176	2,688 / 2,449
0,90	2,296 / 2,324	2,363 / 2,381	2,445 / 2,432	2,540 / 2,489	2,682 / 2,580	3,029 / 2,763

полосе периодов содержится одно отверстие и две симметрично расположенные трещины. Плоскость находится под действием одноосного растяжения на бесконечности. Берега трещины свободны от нагрузки, а контуры отверстий либо свободны от внешних усилий, либо жестко защемлены (рис. 3.205). Значения КИН, полученные методом СИУ в работе [278], приведены в табл. 3.104.

Двоякопериодическая система отверстий и трещин. Пусть в бесконечной плоскости имеется двоякопериодическая система круговых отверстий с симметричными краевыми трещинами, когда центры отверстий расположены в вершинах правильной треугольной (рис. 3.206) или квадратной (рис. 3.207) сетки. Контуры отверстий и берега трещин свободны от нагрузки, а в решетке имеют место средние напряжения $\sigma_x = q$, $\sigma_y = p$, $\tau_{xy} = 0$. Значения КИН, полученные методом СИУ в работах [280, 282], приведены в табл. 3.105 (одноосное растяжение: $q = 0$) и 3.106 (всестороннее растяжение: $p = q$). Суперпозицией представленных решений можно получить любые другие случаи нагружения усилиями p и q, в частности сжатие перфорированной плоскости вдоль линий трещин.

ГЛАВА 4

КОНЕЧНЫЕ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНАМИ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

4.1. Круговой диск с центральной прямолинейной трещиной

Действие постоянной нагрузки на берегах трещины. Пусть в круговом диске имеется центральная прямолинейная трещина, на берегах которой действуют постоянные нормальные (σ) и касательные (τ) усилия. Внешний край диска свободен от нагрузки (рис. 4.1; $p = 0$). Значения КИН, полученные методом СИУ [1, 2] (при действии нормальной нагрузки) и эквивалентным методом [3] (при действии сдвигающей нагрузки), приведены в табл. 4.1. Численные результаты для КИН имеются также в работах [4—10].

Асимптотическое решение задачи при малой относительной длине трещины $\lambda = l/R$ имеет вид [11]

$$\left.\begin{aligned} K_I &= \sigma\sqrt{\pi l}\,(1 + 3\lambda^2/2 + 3\lambda^6/4 + 3\lambda^8/64 + 27\lambda^{10}/128 + \\ &+ 269\lambda^{12}/512) + O(\lambda^{14}), \\ K_{II} &= \tau\sqrt{\pi l}\,(1 + \lambda^2 - \lambda^4/8 + \lambda^6 - 17\lambda^8/64 + 43\lambda^{10}/64 + \\ &+ 201\lambda^{12}/1024) + O(\lambda^{14}). \end{aligned}\right\} \quad (4.1)$$

Формула (4.1) и табл. 4.1 при $\sigma = p$ определяют также КИН для кругового диска с центральной трещиной при всестороннем растяжении диска (см. рис. 4.1; $\tau = \sigma = 0$). Относительная погрешность соотношения (4.1) не превышает 1 % при $0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}8$ и 6 % при $0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}9$. Пределы применимости асимптотического решения (4.1) можно расширить, записав его в виде [1, 12]

$$K_I = (\sigma\sqrt{\pi l}/\sqrt{1-\lambda^2})\,(1 + \lambda^2 - 7\lambda^4/8 + \lambda^6/2 - 59\lambda^8/128 + \\ + \lambda^{10}/128) + O(\lambda^{12}).$$

Прибавив сюда слагаемое с множителем λ^{12}, определяемое по известному поведению K_I при $\lambda \to 1$ [1]

$$\lim_{\lambda\to 1} \frac{K_I\sqrt{1-\lambda}}{\sigma\sqrt{\pi l}} = \frac{2}{\sqrt{\pi^2 - 4}} = 0{,}8255,$$

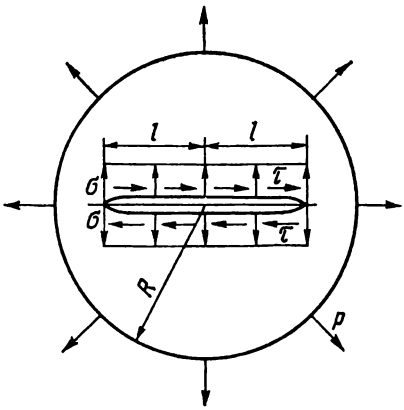
легко получить формулу [12]

$$K_I = (\sigma\sqrt{\pi l}/\sqrt{1-\lambda^2})\,(1 + \lambda^2 - 7\lambda^4/8 + \lambda^6/2 - 59\lambda^8/128 + \\ + \lambda^{10}/128 - 0{,}3447\lambda^{12}),$$

которую можно использовать во всем диапазоне $0 \leqslant \lambda < 1$, причем ее относительная погрешность не превышает 0,3 % при $0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}9$. Име-

ется также ряд других аппроксимационных формул для КИН при действии постоянного давления на трещине [10, 13—15].

Дисковый образец с центральной трещиной на сжатие вдоль диаметра. При испытаниях на трещиностойкость хрупких материалов, таких, как керамика, бетон, горные породы, а также твердые и сверхтвердые спла-



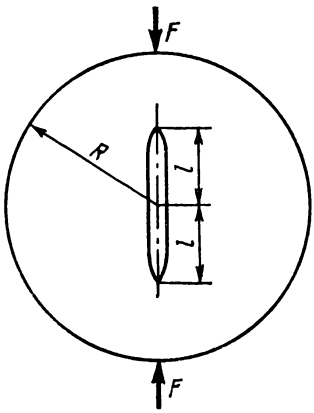


Рис. 4.1. Круговой диск с центральной трещиной при действии постоянной нагрузки на берегах трещины и на внешнем контуре.

Рис. 4.2. Схема дискового образца с центральной трещиной на сжатие вдоль диаметра.

вы, используются [16] в качестве образцов круговые цилиндры (диски) с центральной трещиной, идущей насквозь от торца к торцу, которые находятся под действием сжимающих сил вдоль плоскости трещины (рис. 4.2). Значения КИН для рассматриваемой схемы нагружения равны соответствующим значениям КИН при действии на трещине постоянного давления σ, когда $\sigma = F/(\pi R)$. Поэтому приведенные в предыдущем

Таблица 4.1. **Значения КИН при действии на берегах центральной трещины в круговом диске постоянного давления σ, постоянных касательных усилий τ, сосредоточенных нормальных сил P в центре трещины или растягивающих сил F, приложенных к контуру диска [1—3]**

$\frac{l}{R}$	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{\tau\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I}{P/\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{F/(R\sqrt{\pi l})}$
0,1	1,0150	1,0110	1,0301	3,0052
0,2	1,0600	1,0399	1,1208	3,0224
0,3	1,1356	1,0897	1,2743	3,0572
0,4	1,2431	1,1608	1,4945	3,1118
0,5	1,3872	1,2575	1,7892	3,2211
0,6	1,5783	1,3906	2,1740	3,3860
0,7	1,8403	1,5862	2,6842	3,6537
0,8	2,2384	1,9150	3,4156	4,1225
0,9	3,0382	2,6626	4,7704	5,1920
0,96	4,5205	...	7,1359	...

пункте для КИН K_I формулы и численные результаты в табл. 4.1 справедливы и в данном случае (если учесть, что $\sigma = F/\pi R$).

Приведем несколько аппроксимационных формул для КИН, которые рекомендуется использовать при изменении относительной длины трещины λ в различных интервалах [17]:

$$Y_I = K_I\, t \sqrt{2R/F} = 0{,}06614\,(21{,}437\lambda + 1) \quad (0{,}3 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5),$$

$$Y_I = 0{,}2474\,(1 - 1{,}913\lambda + 4{,}82\lambda^2) \quad (0{,}3 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5),$$

$$Y_I = 0{,}06638\,(25{,}855\lambda - 1) \quad (0{,}4 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}6),$$

$$Y_I = 0{,}3714\,(1 - 0{,}229\lambda + 4{,}887\lambda^2) \quad (0{,}4 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}6),$$

$$Y_I = \sqrt{\lambda/(1-\lambda)}\,(0{,}762 - 0{,}059\lambda + 0{,}188\lambda^2) \quad (0{,}15 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}65),$$

$$Y_I = \sqrt{\lambda/(1-\lambda)}\,(0{,}801 - 0{,}471\lambda + 1{,}409\lambda^2 - 1{,}06\lambda^3) \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}8),$$

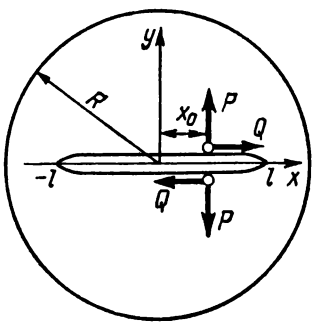


Рис. 4.3. Круговой диск с центральной трещиной при действии сосредоточенных сил на ее берегах.

где t — толщина образца. Относительная погрешность приведенных формул в указанных интервалах равна 0,96 %; 0,09 %; 1,18 %; 0,08 %; 0,44 % и 0,34 % соответственно.

В работе [18] изучен случай, когда диск сжимается усилиями, распределенными по некоторому закону на конечных участках внешней границы (учет контактных напряжений).

Действие сосредоточенных сил на берегах трещины. Пусть к берегам трещины в произвольной точке приложены равные и противоположно направленные нормальные и касательные сосредоточенные силы, а остальная граница диска свободна от нагрузки (рис. 4.3). Асимптотическое решение задачи при малой относительной длине трещины $\lambda = l/R$ получено в работе [11]. Выражения для КИН в правой (K_N^+) и левой (K_N^-) вершинах трещины имеют вид

$$K_I^{\pm} = (P/\sqrt{\pi l})\, F_I^{\pm}(x_0),$$

$$K_{II}^{\pm} = (Q/\sqrt{\pi l})\, F_{II}^{\pm}(x_0),$$

где

$$F_I^{\pm}(x_0) = \sqrt{1-t^2}\,\{1/(1 \mp t) + 3\lambda^2 + \lambda^4\,[1/2 \pm (9/2)\,t - 2t^2] +$$

$$+ \lambda^6\,[1/4 \mp 5t + 5t^2 \mp (5/2)\,t^3] + \lambda^8\,[9/8 \pm (39/4)\,t - (15/8)\,t^2 \pm$$

$$\pm (75/8)\,t^3 - (9/2)\,t^4] - \lambda^{10}\,[25/32 \pm (33/2)\,t + (1/4)\,t^2 \pm 12t^3 - (81/8)\,t^4 \pm$$

$$\pm (21/4)\,t^5] + \lambda^{12}\,[55/32 \pm (4039/128)\,t + (165/64)\,t^2 \pm (595/32)\,t^3 -$$

$$- (833/16)\,t^4 \pm (245/16)\,t^5 - (15/2)\,t^6]\} + O(\lambda^{14}), \quad t = x_0/l,$$

$$F_{II}^{\pm}(x_0) = \sqrt{1-t^2}\,\{1/(1 \mp t) + 2\lambda^2 - \lambda^4\,[\mp (5/2)\,t + t^2] +$$

$$+ \lambda^6\,[1 \mp 3t + 4t^2 \mp (3/2)\,t^3] + \lambda^8\,[1/2 \pm (19/8)\,t - (21/8)\,t^2 \pm$$

$$\pm (51/8)\,t^3 - 3t^4] + \lambda^{10}\,[\mp (15/2)\,t + (5/4)\,t^2 \mp (15/2)\,t^3 + (33/4)\,t^4 \mp (15/4)\,t^5] +$$

$$+ \lambda^{12} [{}^{43}/_{32} \pm (1639/128)\, t + ({}^{53}/_{64})\, t^2 \pm (315/32)\, t^3 - ({}^{23}/_{4})\, t^4 \pm$$
$$\pm (185/16)\, t^5 - ({}^{45}/_{8})\, t^6]\} + O(\lambda^{14}).$$

С помощью этих формул можно вычислить КИН в общем случае, когда берега трещины находятся под действием произвольной симметричной ($\sigma_y^{\pm}(x, 0) = -p(x)$) или антисимметричной ($\tau_{xy}^{\pm}(x, 0) = -q(x)$) нагрузки:

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^{l} p(x)\, F_{\mathrm{I}}^{\pm}(x)\, dx, \quad K_{\mathrm{II}}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^{l} q(x)\, F_{\mathrm{II}}^{\pm}(x)\, dx.$$

В частном случае, когда силы приложены в центре трещины ($x_0 = 0$), имеем [11]:

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}} &= (P/\sqrt{\pi l})\,(1 + 3\lambda^2 + \lambda^4/2 + \lambda^6/4 + 9\lambda^8/8 - 25\lambda^{10}/32 + \\ &+ 55\lambda^{12}/32) + O(\lambda^{14}), \\ K_{\mathrm{II}} &= (Q/\sqrt{\pi l})\,(1 + 2\lambda^2 + \lambda^6 + \lambda^8/2 + 43\lambda^{12}/32) + O(\lambda^{14}). \end{aligned}\right\} \quad (4.2)$$

В работе [1] методом СИУ получены численные значения КИН, когда диск растягивается двумя сосредоточенными нормальными силами P, приложенными в центре трещины (см. табл. 4.1). На основании этих данных можно заключить, что формула (4.2) при $\lambda \leqslant 0{,}6$ практически точна, а при $\lambda \leqslant 0{,}8$ ее максимальная ошибка не превышает 0,9 %. При использовании соотношения (4.2) в работе [1] предложена другая формула:

$$K_{\mathrm{I}} = (P/\sqrt{\pi l\,(1 - \lambda^2)})\,(1 + 5\lambda^2/2 - 9\lambda^4/8 - 7\lambda^6/16 - 0{,}1037\lambda^8), \quad (4.3)$$

которая применима во всем диапазоне изменения параметра λ ($0 \leqslant \lambda < 1$), причем ее максимальная относительная ошибка (около 1,5 %) имеет место при $\lambda = 0{,}9$. Формула (4.3) при малых λ эквивалентна решению (4.2) с точностью до величин порядка λ^8, а при $\lambda \to 1$ удовлетворяет известному условию [1]

$$\lim_{\lambda \to 1} \frac{K_{\mathrm{I}} \sqrt{\pi l\,(1 - \lambda)}}{P} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 - 4}} = 1{,}2967.$$

Вращение диска вокруг своей оси. Пусть диск равномерно вращается вокруг своего центра с угловой скоростью ω (рис. 4.4). Асимптотическое решение при малых относительных длинах трещины $\lambda = l/R$ имеет вид [10, 14, 15]

$$K_{\mathrm{I}} = (\rho\omega^2 R^2/4)\sqrt{\pi l}\,[1 + 2\lambda^2 + 3\lambda^4/8 + 11\lambda^6/16 + 25\lambda^8/32 + 15\lambda^{10}/256 +$$
$$+ 847\lambda^{12}/1024 + 2(\varkappa + 1)^{-1}(1 - 9\lambda^4/8 + 15\lambda^6/16 - 151\lambda^8/128 +$$
$$+ 171\lambda^{10}/256 - 239\lambda^{12}/1024)] + O(\lambda^{14}),$$

где ρ — плотность материала. На основании этого решения построена аппроксимационная формула [10, 15]

$$K_{\mathrm{I}} = 0{,}4488\rho\omega^2 R^{5/2}\sqrt{\lambda/(1 - \lambda)}\,[1 - 0{,}6204\lambda + 2{,}201\lambda^2 - 1{,}318\lambda^3 +$$
$$+ 1{,}9566(\varkappa + 1)^{-1}(1 - 0{,}4091\lambda - 0{,}34\lambda^2 - 0{,}3219\lambda^3)],$$

относительная погрешность которой в интервале $0{,}1 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}7$ не превышает 0,5 %.

В работе [19] методом граничной коллокации получены числовые значения КИН $K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi l}\, F_1$, где $\sigma_0 = \rho\omega^2 R^2 (3 + \varkappa)/[4 (1 + \varkappa)]$. Ниже приведены значения функции F_1 при $\mu = 0{,}3$ в случае плоского напряженного состояния:

λ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
F_I	1,000	1,012	1,048	1,108	1,192	1,302	1,445	1,640	1,937

Эти результаты для F_I практически точно (с ошибкой меньшей, чем 0,001) аппроксимируются формулой [19]

$$F_I = 1 + 0{,}0569\lambda - 0{,}3877\lambda^2 + 3{,}8544\lambda^3 - 7{,}6061\lambda^4 + 5{,}4447\lambda^5.$$

Данные для КИН имеются также в работах [20, 21].

Действие сосредоточенных сил во внутренних точках диска. Пусть круговой диск растягивается двумя сосредоточенными силами, приложен-

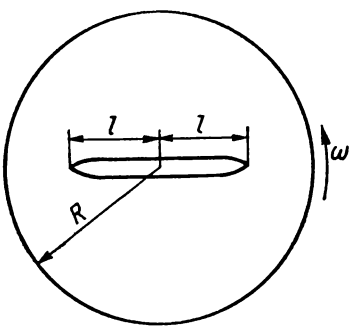


Рис. 4.4. Вращение кругового диска с центральной трещиной вокруг своей оси.

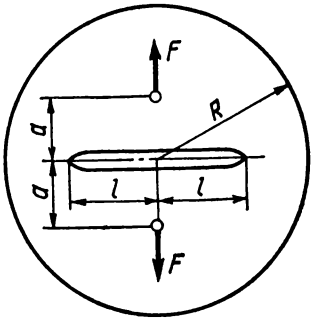


Рис. 4.5. Растяжение кругового диска с центральной трещиной двумя сосредоточенными силами.

ными в симметричных точках. Берега трещины и контур диска свободны от нагрузки (рис. 4.5). Асимптотическое решение задачи при малых значениях параметра $\lambda = l/R$ имеет вид [22, 23]

$$K_I = (F/(1 + \varkappa))\sqrt{\lambda/(\pi R)}\,\{\beta\,[2\alpha^2\beta^2 + \varkappa + 1 - 3\alpha^2 - 10\alpha^4 +$$
$$+ 2^{-1}(6 - 13\alpha^2 + 50\alpha^4 + 81\alpha^6)\,\lambda^2 + 2^{-3}(4 + 118\alpha^2 + 177\alpha^4 - 729\alpha^6 -$$
$$- 780\alpha^8)\,\lambda^4 + 2^{-4}(4 - 108\alpha^2 - 1154\alpha^4 - 573\alpha^6)\,\lambda^6 + 2^{-6}(72 + 2\alpha^2 +$$
$$+ 3149\alpha^4)\,\lambda^8 - 2^{-6}(50 - 385\alpha^2)\,\lambda^{10} + 2^{-5}\cdot 55\lambda^{12}] + \alpha\,[6 + 7\alpha^2 -$$
$$- 2^{-1}\alpha^2(63 + 66\alpha^2)\,\lambda^2 - 2^{-3}[54 - 63\alpha^2 - 792\alpha^4 - 675\alpha^6)\,\lambda^4 +$$
$$+ 2^{-4}(90 + 483\alpha^2 - 484\alpha^4 - 145\alpha^6 + 315\alpha^8)\,\lambda^6 - 2^{-7}(756 + 4284\alpha^2 +$$
$$+ 216\alpha^4 - 3240\alpha^6 - 1295\alpha^8 + 3465\alpha^{10})\,\lambda^8 + 2^{-8}(1026 + 1614\alpha^2 + 243\alpha^4 +$$
$$+ 72\alpha^6 - 8673\alpha^8 - 2835\alpha^{10} + 9009\alpha^{12})\,\lambda^{10} - 2^{-10}(1734 + 6760\alpha^2 +$$
$$+ 4839\alpha^4 - 795\alpha^6 - 854\alpha^8 - 44058\alpha^{10} - 12243\alpha^{12} + 45045\alpha^{14})\,\lambda^{12}] +$$

$$+\varkappa\alpha\,[-2-\alpha^2+2^{-1}\alpha^2\,(9+6\alpha^2)\,\lambda^2+2^{-3}\,(18-9\alpha^2-72\alpha^4-45\alpha^6)\,\lambda^4-$$

$$-2^{-4}\,(30+69\alpha^2-44\alpha^4+25\alpha^6+35\alpha^8)\,\lambda^6+2^{-7}\,(252+612\alpha^2-168\alpha^4-$$

$$-150\alpha^6+248\alpha^8+315\alpha^{10})\,\lambda^8-2^{-8}\,(342-210\alpha^2-441\alpha^4-342\alpha^6-$$

$$-273\alpha^8+567\alpha^{10}+693\alpha^{12})\,\lambda^{10}+2^{-10}\,(578-578\alpha^2-1641\alpha^4-1845\alpha^6-$$

$$-1330\alpha^8-1008\alpha^{10}+2541\alpha^{12}+3003\alpha^{14})\,\lambda^{12}]+\varkappa\beta^{-1}\,[3+2\alpha^2+$$

$$+2^{-1}\,(1-10\alpha^2-9\alpha^4)\,\lambda^4+2^{-3}\,(2+15\alpha^2+81\alpha^4+60\alpha^6)\,\lambda^4+$$

$$+2^{-4}\,(18+4\alpha^2-83\alpha^4)\,\lambda^6-2^{-6}\,(50+165\alpha^2)\,\lambda^8+55\cdot 2^{-5}\lambda^{10}]+O\,(\lambda^{14})\},$$

$$\beta=(\alpha^2+\lambda^2)^{-1/2},\quad \alpha=a/R. \tag{4.4}$$

При $\alpha=0{,}65$ эту формулу можно аппроксимировать выражением [15]

$$K_{\mathrm{I}}=F\sqrt{\lambda/R}\,[1{,}598-0{,}4766\lambda+0{,}7205\lambda^2+0{,}5233\lambda^3+$$

$$+\mu\,(0{,}9023+0{,}2574\lambda-1{,}997\lambda^2)],$$

дающим погрешность не более 0,5 % в интервале $0{,}07\leqslant\lambda\leqslant 0{,}75$ при $0{,}25\leqslant\mu\leqslant 0{,}36$ (плоская деформация).

При $0{,}16<\alpha<0{,}20$ аппроксимационная формула имеет вид [14]

$$K_{\mathrm{I}}=0{,}5583F\beta\sqrt{\lambda/(R\,(1-\lambda))}\,[1+2^{-1}\alpha^2\beta^2/(1-\mu)\,[1-0{,}0097\mu+$$

$$+0{,}3209\alpha-(0{,}7364-0{,}1895\mu+0{,}4889\alpha)\,\lambda+3{,}7917\lambda^2-2{,}5242\lambda^3].$$

Погрешность этого выражения при $0{,}05\leqslant\lambda\leqslant 0{,}7$ и $0{,}25\leqslant\mu\leqslant 0{,}36$ (плоская деформация) около 0,3 %.

Числовые значения КИН приведены в работах [5, 8, 10, 21]. Исследован также случай, когда растягивающие силы приложены к диску несимметрично относительно линии трещины [24—26].

Когда силы приложены к контуру диска ($\alpha=1$), из равенства (4.4) следует:

$$K_{\mathrm{I}}=3F\sqrt{\lambda/(\pi R)}\,[1+\lambda^2/6+\lambda^4/2+9\lambda^8/64+$$

$$+29\lambda^{10}/128-65\lambda^{12}/1536+O\,(\lambda^{14})].$$

В последнем случае решение задачи получено также эквивалентным методом [3]. Числовые значения КИН приведены в табл. 4.1. Данные для КИН имеются также в работах [21, 27]. Аппроксимационные формулы приведены в работах [10, 13, 15].

Дисковый образец с центральной трещиной нормального отрыва на осевое растяжение. При испытании листовых материалов на циклическую трещиностойкость применяется [28] дисковый образец с центральной трещиной, растягиваемый перпендикулярно ей двумя силами (рис. 4.6). Образец крепят в тягах машины с помощью сухариков, причем передача усилий от сухариков к образцу осуществляется посредством их сцепления в кольцевой зоне контакта. Такую всесторонне обжатую зону контакта в образце можно моделировать круговым жестким включением с радиусом, равным радиусу внешнего выступа сухарика. Эта расчетная схема использована в работе [29] при расчете КИН методом СИУ. Рассмотрены два типа образцов: образец с монотонно увеличивающимся по мере роста трещины КИН, в котором $\alpha=h/R=0{,}65$ и $\eta=r/R=0{,}1$ (тип I), и образец с участком независимости КИН от длины трещины в интервале $0{,}10\leqslant\lambda\leqslant 0{,}41$ (относительное отклонение КИН от среднего значения

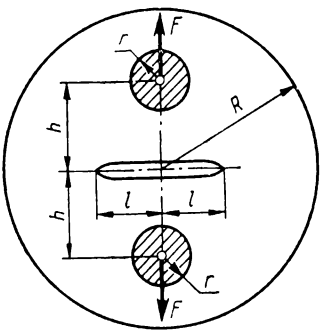
не превышает 1,5 %), когда $\alpha = 0{,}18$ и $\eta = 0{,}1$ (тип II). Для определения КИН получены следующие аппроксимационные формулы:

$$K_I = (F\sqrt{\lambda}/(t\sqrt{2R}))\,[3{,}765 - 1{,}273\lambda - 2{,}102\lambda^2 + 4{,}159\lambda^3 - \\ - \varkappa\,(0{,}448 - 0{,}573\lambda + 0{,}177\lambda^2)],\quad 0{,}05 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}80, \tag{4.5}$$

для образца типа I ($\alpha = 0{,}65$) и

$$\left.\begin{aligned} K_I &= (F/(t\sqrt{2R}))\,(2{,}268 - 0{,}144\varkappa - 0{,}158\varepsilon),\quad 0{,}10 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}41,\\ K_I &= (F/(t\sqrt{2R}))\,(2{,}594 - 3{,}128\lambda + 4{,}863\lambda^2 + 0{,}099\varkappa),\\ &\qquad\qquad 0{,}41 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}80, \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

для образца типа II ($\alpha = 0{,}18$). Здесь $\lambda = l/R$, $\varepsilon = r/h$, t — толщина образца. Формулы (4.5) и (4.6) определяют значения K_I дискового образца при принятой расчетной схеме с погрешностью до 0,5 % в интервалах $1{,}56 \leqslant \varkappa \leqslant 2{,}2$ и $0{,}05 \leqslant \varepsilon \leqslant 0{,}10$.



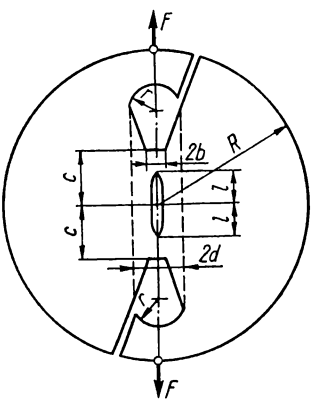


Рис. 4.6. Схема дискового образца с центральной трещиной нормального отрыва на осевое растяжение.

Рис. 4.7. Схема дискового образца с центральной трещиной поперечного сдвига на осевое растяжение ($R = 190$ мм, $r = 40$ мм, $d = 36$ мм, $c = 30$ мм).

Дисковый образец с центральной трещиной поперечного сдвига на осевое растяжение. Для исследования разрушения типа II при наличии в теле трещин поперечного сдвига ($K_I = 0$, $K_{II} \neq 0$) в работе [30] предложен дисковый образец с центральной трещиной на осевое растяжение, причем диск также содержит два симметричных относительно его центра специальных выреза (рис. 4.7). Форма вырезов обеспечивает приблизительно равенство нулю КИН K_I. Для определения КИН K_{II} с помощью МКЭ получена аппроксимационная формула

$$K_{II} = (F/(2ct))\,\sqrt{\pi l}\,[g_1\,(b/c) + (l/c)\,g_2\,(b/c) + (l/c)^2\,g_3\,(b/c)],$$
$$0{,}133 \leqslant b/c \leqslant 0{,}267,\quad 0{,}30 \leqslant l/c \leqslant 0{,}475,$$

где t — толщина образца, $g_1\,(b/c) = 1{,}466 - 3{,}439\,(b/c) + 9{,}034\,(b/c)^2$, $g_2\,(b/c) = -2{,}775 + 20{,}49\,(b/c) - 42{,}1\,(b/c)^2$, $g_3\,(b/c) = 3{,}539 - 19{,}42\,(b/c) + 40{,}44\,(b/c)^2$.

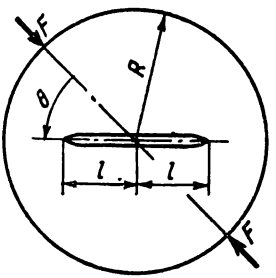


Рис. 4.8. Сжатие кругового диска сосредоточенными силами вдоль диаметра под углом к центральной трещине.

В работе [31] предложена модификация этого образца, когда растяжение диска происходит в направлении, составляющем некоторый угол α с линией трещины. Тогда появляется также КИН $K_I \neq 0$. При малых углах α будет $K_I \ll K_{II}$, поэтому такой образец можно использовать при исследовании разрушения смешанного типа при преобладающем значении КИН K_{II}.

Действие сжимающей нагрузки на контуре диска с центральной трещиной произвольной ориентации. Пусть диск сжимается двумя сосредоточенными силами, действующими вдоль диаметра, составляющего некоторый угол с линией трещины. Берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.8). Задача решена методом граничных коллокаций [18] и методом СИУ [32]. Для КИН получены аппроксимационные формулы [32]

$$\left.\begin{aligned} K_I &= \frac{F}{R}\sqrt{\frac{l}{\pi}}\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i\left(\frac{l}{R}\right)^{2i-2}A_i(\theta), \\ K_{II} &= \frac{F}{R}\sqrt{\frac{l}{\pi}}\sum_{i=1}^{n}S_i\left(\frac{l}{R}\right)^{2i-2}B_i(\theta), \end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

где первые пять коэффициентов Γ_i и S_i приведены в табл. 4.2, а $A_i(\theta)$, $B_i(\theta)$ даются формулами

$$A_1(\theta) = 1 - 4\sin^2\theta, \quad A_2(\theta) = 8\sin^2\theta(1 - 4\cos^2\theta),$$

$$A_3(\theta) = -4\sin^2\theta(3 - 36\cos^2\theta + 48\cos^4\theta),$$

$$A_4(\theta) = -16\sin^2\theta(-1 + 24\cos^2\theta - 80\cos^4\theta + 64\cos^6\theta),$$

$$A_5(\theta) = -20\sin^2\theta(1 - 40\cos^2\theta + 240\cos^4\theta - 448\cos^6\theta + 256\cos^8\theta),$$

$$B_1(\theta) = 1, \quad B_2(\theta) = -5 + 8\cos^2\theta, \quad B_3(\theta) = -3 - 8\cos 2\theta(2 - 3\cos^2\theta),$$

$$B_4(\theta) = 3 - 16\cos 2\theta - 12\cos^2 2\theta + 32\cos^3 2\theta,$$

$$B_5(\theta) = 5 + 16\cos 2\theta - 60\cos^2 2\theta - 32\cos^3 2\theta + 80\cos^4 2\theta.$$

Отметим, что при $l/R \leqslant 0{,}3$ практически точные значения КИН дают аппроксимационные выражения (4.7) при учете в них только первых двух членов ($n = 2$).

Существует такая ориентация трещины, когда КИН $K_I = 0$. Ниже при различных отношениях l/R приведены значения таких углов θ и соответствующие им значения КИН $K_{II}R\sqrt{\pi}/(F\sqrt{l}) = F_{II}$, полученные в работе [18]:

l/R	0,3	0,4	0,5	0,6
$180\theta/\pi$	27,2	25,2	22,9	20,1
F_{II}	1,866	1,977	2,133	2,352

В работе [18] изучен также случай, когда на внешнем контуре диска сжимающие усилия распределены по некоторому закону на конечных

Таблица 4.2. **Значения коэффициентов Γ_i и S_i [32]**

$\frac{l}{R}$	$\frac{\Gamma_1}{S_1}$	$\frac{\Gamma_2}{S_2}$	$\frac{\Gamma_3}{S_3}$	$\frac{\Gamma_4}{S_4}$	$\frac{\Gamma_5}{S_5}$
0,1	1,014998 1,009987	0,503597 0,502341	0,376991 0,376363	0,376991 0,376363	0,314159 0,314159
0,2	1,060049 1,039864	0,514907 0,509959	0,382430 0,379956	0,383392 0,380584	0,318086 0,316245
0,3	1,135551 1,089702	0,533477 0,522272	0,391640 0,386086	0,393835 0,387518	0,325033 0,320834
0,4	1,243134 1,160796	0,559734 0,539824	0,404603 0,394822	0,408597 0,397403	0,334831 0,327411
0,5	1,387239 1,257488	0,594892 0,563966	0,421949 0,406869	0,428353 0,410966	0,347941 0,336447
0,6	1,578258 1,390654	0,642124 0,597985	0,445387 0,424037	0,454861 0,430072	0,365559 0,349219

Таблица 4.3. **Значения КИН $K_I/q\sqrt{\pi l}$ для кругового диска с центральной трещиной при смешанных граничных условиях на его контуре при $\mu = 0{,}3$ (плоское напряженное состояние) [34]**

$\frac{18\beta}{\pi}$	l/R								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	1,0150	1,0600	1,1355	1,2431	1,3872	1,5783	1,8403	2,2384	3,0317
1	1,1835	1,2275	1,2984	1,3932	1,5088	1,6447	1,8053	1,9893	1,9224
2	1,2741	1,3167	1,3917	1,4711	1,5711	1,6680	1,7198	1,6027	1,1272
3	1,3563	1,3929	1,4462	1,5039	1,5456	1,5308	1,4001	1,1043	0,7082
4	1,4056	1,4215	1,4369	1,4325	1,3784	1,2456	1,0229	0,7279	0,4577
5	1,3621	1,3743	1,3483	1,2338	1,0988	0,9114	0,6909	0,4796	0,2835
6	1,2232	1,1554	1,0883	0,9493	0,7681	0,6013	0,4340	0,2776	0,1695
7	1,9003	0,8505	0,7950	0,6246	0,4756	0,3918	0,2482	0,1674	0,0980
8	0,3923	0,3570	0,2977	0,2349	0,1814	0,1354	0,0932	0,0609	0,0366

участках (учет контактных напряжений). Имеются и асимптотические разложения КИН при малых длине трещины и угле ее наклона [12].

Равновесие диска при заданных смещениях на его границе. Пусть берега трещины свободны от нагрузки и на контуре диска заданы постоянные радиальные смещения v_0, а касательные смещения отсутствуют (рис. 4.9). Ниже приведены значения КИН, полученные методом СИУ в работе [33], при $\mu = 0{,}3$ (плоское напряженное состояние):

l/R	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$K_I\sqrt{R}\,(\varkappa - 1)/(4Gv_0)$	0,5506	0,7404	0,8408	0,8858	0,8957

l/R	0,6	0,7	0,8	0,9
$K_I\sqrt{R}\,(\varkappa - 1)/(4Gv_0)$	0,8830	0,8530	0,8027	0,7107

Асимптотическое разложение КИН при малых отношениях l/R имеет вид [33]

$$K_I = 4G(v_0/R)\sqrt{\pi l}/[(\varkappa - 1)(1 + \eta\lambda^2)] + O(\lambda^4),$$

где $\eta = (\varkappa^3 - \varkappa^2 + 7\varkappa - 3)/[4\varkappa(\varkappa - 1)]$.

Смешанные граничные условия на контуре диска. Пусть берега трещины свободны от нагрузки и на симметричных участках границы диска

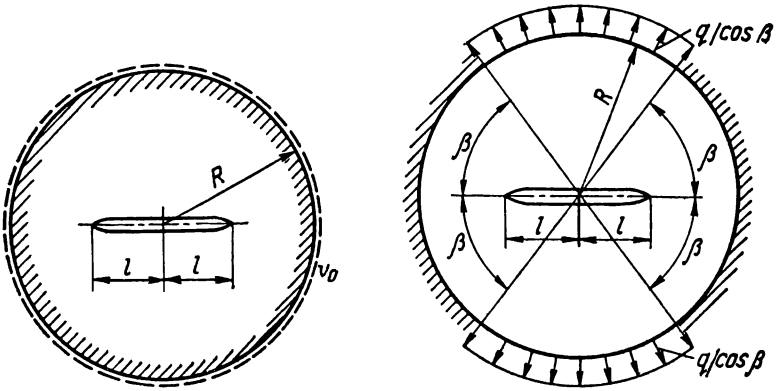


Рис. 4.9. Круговой диск с центральной трещиной при заданных постоянных радиальных смещениях на его границе.

Рис. 4.10. Круговой диск с центральной трещиной при смешанных граничных условиях на его контуре.

действует постоянная радиальная нагрузка, а остальная ее часть жестко защемлена (рис. 4.10). Значения КИН, полученные методом граничных коллокаций [34], приведены в табл. 4.3.

4.2. Круговой диск с произвольно размещенными внутренними трещинами

Эксцентрически размещенная диаметральная трещина. Пусть контур диска свободен от нагрузки, а на берегах радиальной трещины действуют постоянные нормальные усилия σ (рис. 4.11). Отметим, что КИН при этой нагрузке такие же, как в случае, когда берега трещины свободны от внешних усилий, а на контуре диска заданы постоянные радиальные напряжения σ. Значения КИН, полученные методом СИУ [35], приведены в табл. 4.4. Данные по КИН имеются также в работах [8, 36]. Рассматривался также случай растяжения диска сосредоточенными силами, приложенными в точках контура, когда берега трещины свободны от нагрузки [8, 37].

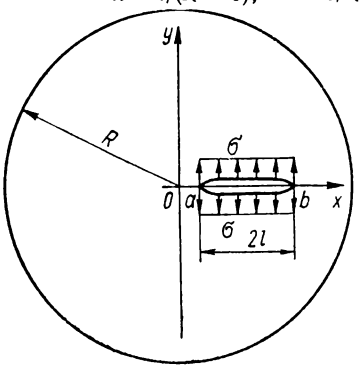
Пусть диск равномерно вращается вокруг своего центра с угловой скоростью ω. Берега трещины и контур диска свободны от нагрузки (рис. 4.12). Значения КИН $K_I = \sigma_0\sqrt{\pi l}F_I$ ($\sigma_0 = \rho\omega^2R^2(3 + \varkappa)/[4(1 + \varkappa)]$, ρ — плотность материала), полученные методом граничных коллокаций [19], приведены в табл. 4.5. Эти численные результаты описываются

аппроксимационными формулами [19]

$$K_I(A) = \sigma_0 \sqrt{\pi l}\,[0{,}9971 + 0{,}98\lambda + 0{,}6826\lambda^2 + 0{,}6704\lambda^3 + \varepsilon\,(0{,}0191 - 0{,}0749\lambda + 1{,}1709\lambda^2 - 5{,}7403\lambda^3) + \varepsilon^2(-0{,}6249 + 1{,}1082\lambda - 6{,}7943\lambda^2 + 15{,}2689\lambda^3) + \varepsilon^3(0{,}039 - 1{,}3412\lambda + 6{,}0820\lambda^2 - 12{,}0336\lambda^3)],$$

$$K_I(B) = \sigma_0 \sqrt{\pi l}\,[0{,}997 + 0{,}1038\lambda + 0{,}6525\lambda^2 + 0{,}7149\lambda^3 + \varepsilon\,(0{,}0013 - 0{,}6114\lambda - 2{,}1643\lambda^2 + 1{,}4431\lambda^3) + \varepsilon^2(-0{,}5794 + 0{,}6721\lambda + 1{,}8428\lambda^2 - 1{,}9293\lambda^3) + \varepsilon^3(0{,}0096 - 0{,}2912\lambda + 0{,}3117\lambda^2 - 0{,}9704\lambda^3)],$$

$$\lambda = l/(R - c), \quad \varepsilon = c/R, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 0{,}7, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}8.$$



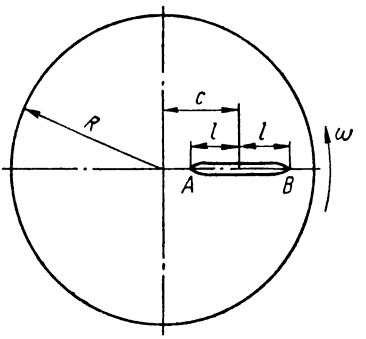


Рис. 4.11. Круговой диск с эксцентрически размещенной диаметральной трещиной при действии на ее берегах постоянного давления.

Рис. 4.12. Вращение кругового диска с диаметральной трещиной вокруг своего центра.

Числовые значения для КИН имеются также в работах [8, 20].

Пусть круговой диск с диаметральной трещиной прижимается к жесткому основанию сосредоточенной силой P, приложенной в центре. Основание имеет форму окружности, радиус $R(1 + \varepsilon)$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$ которой мало отличается от радиуса диска R. При действии сжимающей нагрузки возникает зона контакта, протяженность которой определяется углом 2β (рис. 4.13). Задача решена методом СИУ в работе [38]. Численные результаты получены для случая плоской деформации при $\mu = 0{,}3$. Значения безразмерных КИН $K_I(A)\sqrt{R}/P$ у нижней, наиболее опасной вершины трещины приведены в табл. 4.6 для различных углов β. На рис. 4.14 показана зависимость β от сжимающей силы P.

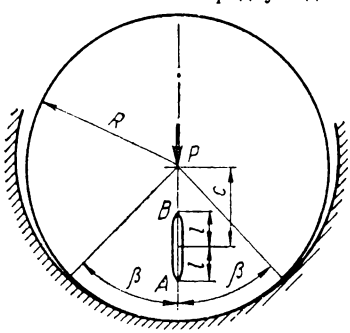


Рис. 4.13. Сжатие кругового диска с диаметральной трещиной сосредоточенной силой и жестким основанием.

Произвольно расположенная прямолинейная трещина. Пусть внешняя граница диска свободна от нагрузки, а на берегах трещины действуют сосредоточенные силы (рис. 4.15). Асимптотическое решение задачи при ма-

Таблица 4.4. Значения КИН $K_I\,(a)/(\sigma\sqrt{\pi l})$ (над чертой) и $K_I\,(b)/(\sigma\sqrt{\pi l})$ (под чертой) для кругового диска с диаметральной трещиной под давлением [35]

$\frac{a}{R}$	b/R								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
—0,9		...			...	...	...	...	3,038 3,038
—0,8			...		...		...	2,238 2,238	2,388 2,897
—0,7	...	...				...	1,840 1,840	1,954 2,124	2,112 2,773
—0,6		...	...	...	...	1,578 1,578	1,670 1,745	1,783 2,022	1,947 2,653
—0,5		...	...	...	1,387 1,387	1,463 1,498	1,551 1,658	1,663 1,926	1,831 2,533
—0,4	...	...	...	1,243 1,243	1,304 1,321	1,375 1,425	1,460 1,578	1,571 1,834	1,740 2,412
—0,3	...	...	1,136 1,136	1,183 1,190	1,238 1,261	1,305 1,359	1,386 1,502	1,494 1,744	1,662 2,290
—0,2	...	1,060 1,060	1,093 1,096	1,134 1,143	1,184 1,207	1,246 1,297	1,324 1,430	1,428 1,657	1,593 2,168
—0,1	1,015 1,015	1,034 1,034	1,060 1,063	1,095 1,103	1,139 1,159	1,196 1,239	1,269 1,362	1,369 1,571	1,530 2,045
0	1,004 1,004	1,015 1,016	1,035 1,036	1,063 1,068	1,101 1,116	1,152 1,186	1,219 1,296	1,315 1,488	1,470 1,924
0,1	—	1,004 1,004	1,016 1,017	1,037 1,040	1,068 1,078	1,113 1,138	1,175 1,235	1,264 1,407	1,413 1,804
0,2	—	—	1,004 1,004	1,018 1,019	1,042 1,047	1,079 1,095	1,134 1,177	1,216 1,324	1,357 1,686
0,3	—	—	—	1,005 1,005	1,020 1,022	1,049 1,058	1,096 1,124	1,171 1,254	1,303 1,570
0,4	—	—	—	—	1,006 1,006	1,025 1,028	1,062 1,078	1,128 1,184	1,250 1,456
0,5	—	—	—	—	—	1,007 1,008	1,033 1,039	1,086 1,119	1,196 1,346
0,6	—	—	—	—	—	—	1,010 1,011	1,049 1,063	1,143 1,239
0,7	—	—	—	—	—	—	—	1,016 1,019	1,090 1,138
0,8	—	—	—	—	—	—	—	—	1,036 1,048

Таблица 4.5. Значения КИН $K_I(A)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (над чертой) и $K_I(B)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (под чертой) при вращении кругового диска с диаметральной трещиной для $\mu = 0{,}3$ (плоское напряженное состояние) [19]

$\frac{c}{R}$	$l/(R-c)$								
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0,1	0,9942	1,0093	1,0435	1,0961	1,1663	1,2546	1,3629	1,496	1,67
	0,9942	0,9992	1,0216	1,0711	1,1397	1,2336	1,3602	1,538	1,81
0,2	0,9770	0,9943	1,0274	1,0751	1,1368	1,2124	1,3031	1,412	1,55
	0,9770	0,9763	0,9932	1,0289	1,0853	1,1659	1,2786	1,442	1,70
0,3	0,9482	0,9671	0,9989	1,0427	1,0981	1,1650	1,2445	1,340	1,46
	0,9482	0,9433	0,9535	0,9805	1,0264	1,0953	1,1952	1,344	1,58
0,4	0,9079	0,9274	0,9576	0,9978	1,0476	1,1072	1,1779	1,262	1,37
	0,9079	0,9001	0,9053	0,9252	0,9622	1,0204	1,1076	1,239	1,44
0,5	0,8561	0,8752	0,9031	0,9394	0,9836	1,0362	1,0984	1,173	1,26
	0,8561	0,8467	0,8484	0,8626	0,8920	0,9404	0,0143	1,125	1,29
0,6	0,7927	0,8104	0,8353	0,8669	0,9052	0,951	1,004	1,068	1,14
	0,7927	0,7831	0,7825	0,7925	0,8153	0,8541	0,9135	1,000	1,13
0,7	0,7179	0,7331	0,7540	0,7805	0,8124	0,850	0,894	0,95	1,00
	0,7179	0,7091	0,7074	0,7141	0,7306	0,759	0,801	0,86	0,96

Таблица 4.6. Значения КИН $K_I(A)\sqrt{R}/P$ при сжатии кругового диска с диаметральной трещиной сосредоточенной силой и жестким основанием [38]

$\frac{l}{R}$	$\frac{c}{R}$	β							
		π/18	π/9	π/6	2π/9	5π/18	π/3	7π/18	4π/9
0,6	0,05	1,42	1,69	1,83	1,85	1,83	1,80	1,77	1,74
	0,10	2,35	2,95	3,16	3,13	3,01	2,89	2,78	2,68
	0,15	3,48	4,51	4,69	4,51	4,24	3,99	3,76	3,54
	0,20	5,17	6,59	6,53	6,07	5,60	5,17	4,77	4,34
	0,25	8,14	9,49	8,81	8,01	7,31	6,60	5,84	5,02
	0,30	14,00	13,76	12,52	11,80	10,86	8,89	7,17	5,00
0,7	0,05	1,86	2,33	2,37	2,27	2,14	2,03	1,93	1,83
	0,10	3,55	4,44	4,29	3,93	3,60	3,31	3,04	2,76
	0,15	6,32	7,24	6,57	5,87	5,23	4,65	4,06	3,47
0,8	0,025	1,82	2,07	1,92	1,74	1,58	1,43	1,30	1,18
	0,05	3,38	3,63	3,19	2,79	2,44	2,12	1,84	1,59
	0,075	5,41	5,38	4,55	3,88	3,28	2,72	2,22	1,81

лых относительных длине трещины $\lambda = l/R$ и отклонении центра трещины от центра диска $\delta = c/R$ ($c = \sqrt{a^2 + b^2}$) имеет вид [39]

$$K_N^{\pm} = (P/\sqrt{\pi l})\, F_{N1}^{\pm}(x_0) + (Q/\sqrt{\pi l})\, F_{N2}^{\pm}(x_0) \quad (N = \mathrm{I}, \mathrm{II}),$$

где верхние (нижние) индексы соответствуют правой (левой) вершине трещины, а

$$F_{\mathrm{I}1}^{\pm}(x_0) = \sqrt{1 - t^2}\,\{1/(1 \mp t) + 3\lambda^2 + \lambda^4\,[{}^1/_2 \pm ({}^9/_2)\,t - 2t^2] +$$
$$+ \lambda^6\,[{}^1/_4 \mp 5t + 5t^2 \mp ({}^5/_2)\,t^3] + \beta\lambda^3\,[\pm 3 + 3t + \lambda^2\,(11t \pm 6t^2 - 5t^3)] +$$
$$+ \beta^2\lambda^2\,[6 + \lambda^2\,(-{}^{35}/_2 \pm 24t - 4t^2)] + \beta^3\lambda^3\,(\pm 12 + 8t) + 8\beta^4\lambda^2 +$$
$$+ \alpha^2\lambda^2\,[10 + \lambda^2\,(-{}^{89}/_2 \pm 30t - 20t^2)] + 16\alpha^4\lambda^2 + \alpha^2\beta\lambda^3\,(\pm 8 + 12t) +$$
$$+ 24\alpha^2\beta^2\lambda^2\} + O(\lambda^m\delta^n),$$

$$F_{\mathrm{I}2}^{\pm}(x_0) = \sqrt{1 - t^2}\,\{\alpha\lambda^3\,[\pm 6 - 5t + \lambda^2\,(\mp {}^{15}/_2 + 15t \mp 12t^2 + 3t^3)] +$$
$$+ \alpha^3\lambda^3\,(\pm 18 - 16t) + \alpha\beta\lambda^2\,[-2 + \lambda^2\,(30 \mp 3t - 21t^2/2)] +$$
$$+ \alpha\beta^2\lambda^3\,(\pm {}^{17}/_2 - 27t/2) + \alpha\beta^3\lambda^2\,(11 \pm 3t) + 4\alpha^3\beta\lambda^2\} + O(\lambda^m\delta^n),$$

$$F_{\mathrm{II}1}^{\pm}(x_0) = \sqrt{1 - t^2}\,\{1/(1 \mp t) + 2\lambda^2 + \lambda^4\,(\pm 5t/2 - t^2) + \lambda^6\,(1 \mp 3t +$$
$$+ 4t^2 \mp 3t^3/2) + \beta\lambda^3\,[\pm 2 + 2t + \lambda^2\,(\pm {}^1/_2 + 13t/2 \pm 4t^2 - 3t)] +$$
$$+ \beta^2\lambda^2\,[4 + \lambda^2\,(-{}^{17}/_2 \pm 6t - 2t^2)] + \alpha^2\lambda^2\,[4 + \lambda^2\,(-{}^{37}/_2 \pm 24t - 10t^2)] +$$
$$+ \beta^3\lambda^3\,(\pm 6 + 6t) + \beta\alpha^2\lambda^3\,(\pm 14 + 6t) + 6\beta^4\lambda^2 + 6\alpha^4\lambda^2 + 12\alpha^2\beta^2\lambda^2\} +$$
$$+ O(\lambda^m\delta^n),$$

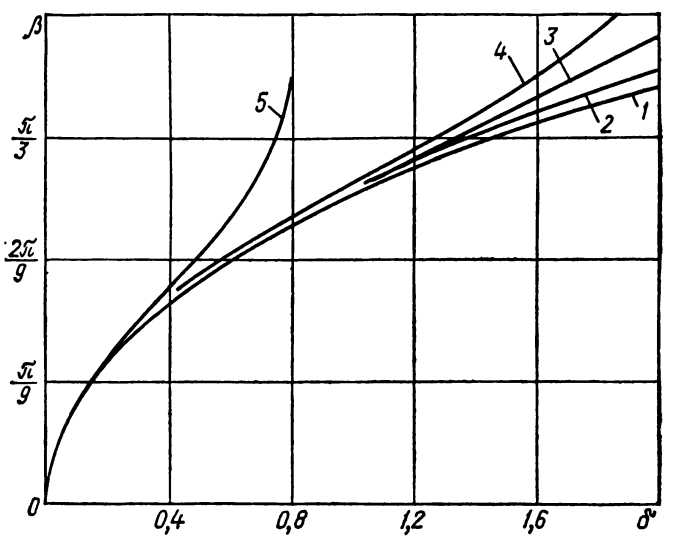


Рис. 4.14. Зависимость угла β от параметра $\delta = P(1 + \varkappa)/(G\varepsilon)$:

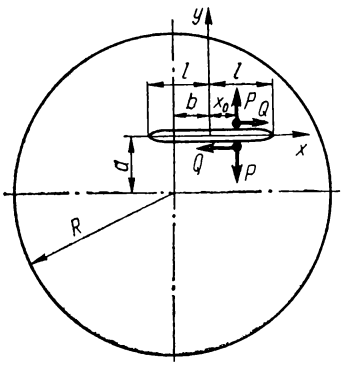
1 — $\lambda = l/R \leqslant 0{,}15$ при $\eta = c/R = 0{,}6$ или $\lambda \leqslant 0{,}10$ при $\eta = 0{,}7$; *2* — $\lambda = 0{,}025$ при $\eta = 0{,}8$; *3* — $\lambda = 0{,}15$ при $\eta = 0{,}7$; *4* — $\lambda = 0{,}25$ при $\eta = 0{,}6$; *5* — $\lambda = 0{,}30$ при $\eta = 0{,}6$ [38].

$$F^{\pm}_{II2}(x_0) = \sqrt{1-t^2}\,\{\alpha\lambda^3[\mp 5 + 6t + \lambda^2(\pm 4 - 29t/2 \pm 14t^2 - 5t^3)] +$$
$$+ \alpha\beta\lambda^2[2 + \lambda^2(-{}^{15}/_2 \mp 3t + 19t^2/2)] + \beta^2\alpha\lambda^3(\mp {}^{35}/_2 + 33t/2) +$$
$$+ \alpha^3\lambda^3(\mp 12 + 18t) + \alpha\beta^3\lambda^2({}^{11}/_2 \pm 3t/2) + 4\alpha^3\beta\lambda^2\} + O(\lambda^m\delta^n)$$
$$(m+n=8), \quad \alpha = a/R, \quad \beta = b/R, \quad t = x_0/l.$$

С помощью этих выражений можно определить КИН в общем случае, когда берега трещины нагружены произвольными симметричными ($\sigma_y^{\pm}(x, 0) = -p(x)$) или антисимметричными ($\tau_{xy}^{\pm}(x, 0) = -q(x)$) усилиями:

$$K_N^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^{l} [p(x) F_{N1}^{\pm}(x) + q(x) F_{N2}^{\pm}(x)]\, dx.$$

Для случая, когда берега трещины и контур диска свободны от нагрузки, а диск равномерно вращается вокруг своего центра с угловой



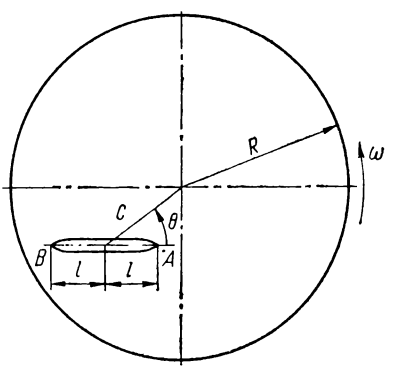


Рис. 4.15. Круговой диск с произвольно расположенной прямолинейно трещиной при действии на его берегах сосредоточенных сил.

Рис. 4.16. Вращение кругового диска с произвольно расположенной прямолинейной трещиной вокруг своей оси.

скоростью ω (рис. 4.16), решение задачи методом граничных коллокаций получено в работе [19]. Значения КИН $K_I = \sigma_0\sqrt{\pi l}F_I$ ($\sigma_0 = \rho\omega^2R^2(3 + \varkappa)/[4(1 + \varkappa)]$, ρ — плотность материала) приведены в табл. 4.7—4.9. Значения K_{II} намного меньше соответствующих значений K_I. Для одного случая расположения трещины они приведены в табл. 4.10.

Концентрическая дугообразная трещина. Пусть в круговом диске вдоль концентрической окружности имеется трещина. Край диска и берега трещины свободны от нагрузки. Диск вращается вокруг своего центра с угловой скоростью ω (рис. 4.17). Значения КИН $K_I = \sigma_0\sqrt{\pi s}F_I$ и $K_{II} = \sigma_0\sqrt{\pi s}F_{II}$ ($\sigma_0 = (\rho\omega^2/4)(R^2 - r^2)(3 + \varkappa)/(1 + \varkappa)$, $s = r\sin\beta$, ρ — плотность материала), полученные с помощью МГЭ в работе [40], приведены в табл. 4.11.

Крестообразная трещина. Пусть круговой диск ослаблен крестообразной трещиной с равными ветвями. Берега трещины свободны от нагрузки, а на контуре диска задана постоянная радиальная нагрузка p (рис. 4.18).

Таблица 4.7. Значения КИН $K_I\,(A)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (над чертой) и $K_I\,(B)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (под чертой) при вращении кругового диска с произвольно расположенной трещиной при $\theta = \pi/6$ [19]

$\frac{c}{R}$	$l/(R-c)$								
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0	1,0000 1,0000	1,0121 1,0121	1,0482 1,0482	1,1079 1,1079	1,1916 1,1916	1,3016 1,3016	1,4452 1,4452	1,640 1,640	1,93 1,93
0,1	0,9932 0,9932	1,0076 0,9988	1,0413 1,0249	1,0934 1,0718	1,1635 1,1404	1,2518 1,2335	1,3603 1,3577	1,495 1,530	1,66 1,78
0,2	0,9727 0,9727	0,9890 0,9733	1,0211 0,9915	1,0681 1,0282	1,1293 1,0846	1,2045 1,1636	1,2944 1,2717	1,404 1,426	1,54 1,67
0,3	0,9386 0,9386	0,9561 0,9355	0,9868 0,9476	1,0299 0,9759	1,0845 1,0221	1,0505 1,0890	1,2287 1,1827	1,320 1,316	1,43 1,51
0,4	0,8909 0,8909	0,9088 0,8852	0,9379 0,8926	0,9773 0,9143	1,0263 0,9518	1,0850 1,0079	1,1535 1,0876	1,236 1,203	1,33 1,37
0,5	0,8296 0,8296	0,8470 0,8224	0,8738 0,8264	0,9094 0,8427	0,9530 0,8728	1,0045 0,9188	1,0650 0,9857	1,139 1,085	1,23 1,23
0,6	0,7545 0,7545	0,7707 0,7470	0,7946 0,7488	0,8258 0,7609	0,8637 0,7845	0,9080 0,8211	0,960 0,874	1,022 0,946	1,09 1,04
0,7	0,6659 0,6659	0,6799 0,6589	0,7002 0,6595	0,7267 0,6684	0,7586 0,6858	0,796 0,712	0,838 0,747	0,890 0,795	0,95 0,85

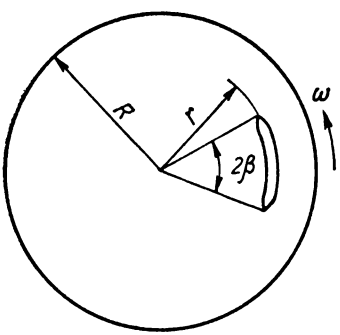


Рис. 4.17. Вращение кругового диска с дугообразной трещиной.

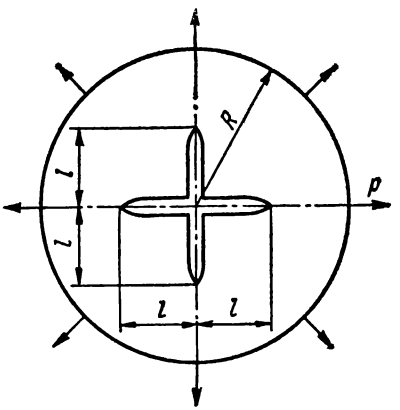


Рис. 4.18. Круговой диск с центральной крестообразной трещиной.

Таблица 4.8. Значения КИН $K_I(A)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (над чертой) и $K_I(B)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (под чертой) при вращении кругового диска с произвольно расположенной трещиной при $\theta = \pi/3$ [19]

$\frac{c}{R}$	$l/(R-c)$								
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0	1,0000 1,0000	1,0121 1,0121	1,0482 1,0482	1,1079 1,1079	1,1916 1,1916	1,3016 1,3016	1,4452 1,4452	1,640 1,640	1,93 1,93
0,1	0,9911 0,9911	1,0037 0,9986	1,0359 1,0264	1,0870 1,0744	1,1565 1,1432	1,2450 1,2343	1,3548 1,3529	1,492 1,511	1,67 1,74
0,2	0,9642 0,9642	0,9774 0,9683	1,0069 0,9898	1,0520 1,0289	1,1118 1,0858	1,2861 1,1619	1,2754 1,2606	1,382 1,390	1,51 1,57
0,3	0,9196 0,9196	0,9329 0,9210	0,9605 0,9378	1,0010 0,9698	1,0537 1,0172	1,1177 1,0808	1,2930 1,1631	1,281 1,270	1,39 1,41
0,4	0,8570 0,8570	0,8703 0,8566	0,8958 0,8696	0,9324 0,8959	0,9791 0,9354	1,0351 0,9885	1,0999 1,0568	1,174 1,144	1,26 1,26
0,5	0,7765 0,7765	0,7892 0,7750	0,8125 0,7850	0,8452 0,8063	0,8863 0,8389	0,9349 0,8827	0,991 0,939	1,055 1,010	1,13 1,10
0,6	0,6782 0,6782	0,6898 0,6761	0,7102 0,6836	0,7385 0,7006	0,7738 0,7266	0,8152 0,7618	0,862 0,806	0,915 0,861	0,97 0,93
0,7	0,5620 0,5620	0,5717 0,5596	0,5884 0,5648	0,6114 0,5772	0,6399 0,5967	0,675 0,624	0,712 0,656	0,756 0,698	0,80 0,74

Таблица 4.9. Значения $K_I(A)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ ($K_I(B) = K_I(A)$) при вращении кругового диска с произвольно расположенной трещиной при $\theta = \pi/2$ [19]

$\frac{c}{R}$	$l/(R-c)$							
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0	1,0000	1,0121	1,0482	1,1079	1,1916	1,3016	1,4452	1,640
0,1	0,9900	1,0001	1,0301	1,0797	1,1488	1,2382	1,3514	1,496
0,2	0,9600	0,9687	0,9944	1,0366	1,0948	1,1690	1,2607	1,373
0,3	0,9100	0,9176	0,9401	0,9766	1,0265	1,0891	1,1649	1,255
0,4	0,8400	0,8467	0,8664	0,8983	0,9413	0,9947	1,0582	1,132
0,5	0,7500	0,7558	0,7729	0,8005	0,8374	0,8827	0,9358	0,997
0,6	0,6400	0,6449	0,6593	0,6824	0,7132	0,7507	0,7942	0,843
0,7	0,5100	0,5139	0,5253	0,5435	0,5678	0,5971	0,6309	0,669

Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$, полученные методом дуальных интегральных уравнений в работе [41], приведены ниже:

l/R	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	0,9787	1,1662	1,5606	2,5949	9,3911

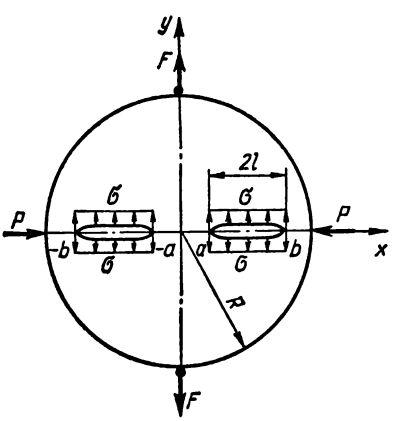
Отметим, что такие же значения КИН будут и в случае, когда внешняя граница свободна от нагрузки, а на берегах трещины действует постоянное давление p.

Две коллинеарные диаметральные трещины. Пусть контур диска свободен от нагрузки, а на берегах двух симметричных коллинеарных

Таблица 4.10. **Значения КИН K_{II} $(B)/(-\sigma_0\sqrt{\pi l})$ при вращении кругового диска с произвольно расположенной трещиной при $\theta = \pi/3$ [19]**

$\frac{c}{R}$	$l/(R-c)$						
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0,1	0,002	0,004	0,006	0,011	0,017	0,026	0,038
0,2	0,007	0,010	0,015	0,022	0,032	0,046	0,066
0,3	0,017	0,021	0,026	0,034	0,047	0,064	0,087
0,4	0,029	0,034	0,040	0,049	0,061	0,079	0,103
0,5	0,046	0,051	0,056	0,065	0,077	0,095	0,117
0,6	0,066	0,071	0,076	0,084	0,095	0,111	0,131

трещин действует постоянное давление σ (рис. 4.19; $P = F = 0$). Решение задачи получено методом рядов Лорана в работе [42]. Значения КИН приведены в табл. 4.12. Отметим, что такие же КИН будут в случаях, когда трещины свободны от нагрузки и на контуре диска заданы радиальные растягивающие усилия p ($\sigma = p$) или действуют две радиальные



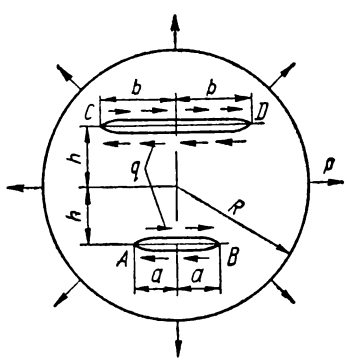


Рис. 4.19. Круговой диск с двумя коллинеарными радиальными трещинами.

Рис. 4.20. Круговой диск с двумя параллельными трещинами.

Таблица 4.11. **Значения КИН $K_N = \sigma_0 \sqrt{\pi s} F_N$ при вращении кругового диска с концентрической дугообразной трещиной [40]**

β	$r/R = 0{,}25$		$r/R = 0{,}5$		$r/R = 0{,}75$	
	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
π/36	...	...	...	...	1,04	0,05
π/12	0,96	0,13	1,01	0,15	1,25	0,29
π/6	0,91	0,26	1,00	0,35	1,32	0,77
π/4	0,82	0,38	0,90	0,53	0,99	1,05
π/3	0,70	0,46	0,73	0,64	0,59	1,10
5π/12	0,58	0,52	0,55	0,69	0,29	1,05

Таблица 4.12. **Значения КИН $K_I(b)/(\sigma\sqrt{\pi l})$ (над чертой) и $K_I(a)/(\sigma\sqrt{\pi l})$ (под чертой) для кругового диска с двумя коллинеарными трещинами под давлением [42]**

$\frac{l}{a+l}$	$l/(R-b+l)$				$\frac{l}{a+l}$	$l/(R-b+l)$			
	0,1	0,5	0,8	0,9		0,1	0,5	0,8	0,9
0,1	1,007 / 1,006	1,118 / 1,076	1,457 / 1,191	1,780 / 1,259	0,8	1,108 / 1,261	1,334 / 1,553	1,717 / 1,762	2,149 / 1,900
0,5	1,048 / 1,069	1,189 / 1,188	1,562 / 1,305	1,971 / 1,378	0,9	1,149 / 1,496	1,434 / 1,940	1,856 / 2,288	2,372 / 2,612

сжимающие силы P (см. рис. 4.19; $\sigma = 0$, $F = 0$) ($\sigma = P/(\pi R)$). Данные для КИН имеются также в работе [43].

Известно также асимптотическое решение данной задачи при малых значениях параметра $\lambda = b/R$ [44, 45]:

$$\left.\begin{aligned} K_I(a) &= (\sigma\sqrt{\pi}/\sqrt{a(b^2-a^2)})\{(Eb^2/K - a^2)(1 + c_0\lambda^2 + c_1\lambda^4 + \\ &+ c_3\lambda^6) + (c_2\lambda^4 + c_4\lambda^6)[a^2(b^2-a^2) - \beta] + O(\lambda^8)\}, \\ K_I(b) &= (\sigma\sqrt{\pi}/\sqrt{b(b^2-a^2)})\{b^2(1 - E/K)(1 + c_0\lambda^2 + c_1\lambda^4 + \\ &+ c_3\lambda^6) + (c_2\lambda^4 + c_4\lambda^6)[b^2(b^2-a^2) + \beta] + O(\lambda^8)\}, \end{aligned}\right\} \quad (4.8)$$

где $E = E(q_0)$ и $K = K(q_0)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем $q_0 = \sqrt{1 - a^2/b^2}$,

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= A_0[(a^2+b^2)/(2b^2) - E/K], \quad c_2 = A_2 c_0/(2A_0 b^2), \\ c_1 &= c_0^2 + A_1[c_0(1 + a^2/b^2)/A_0 + (1 - a^2/b^2)^2/4], \\ c_3 &= c_0[c_1 + (c_1 - c_0^2)(1 + A_2/(3A_1))], \\ c_4 &= 2c_0c_2 + A_3(c_1 - c_0^2)/(A_1b^2), \\ \beta &= [2a^2/3 - (a^2+b^2)E/(3K)]b^2. \end{aligned}\right\} \quad (4.9)$$

Здесь $A_0 = 3$, $A_1 = -2$, $A_2 = -6$, $A_3 = 16$.

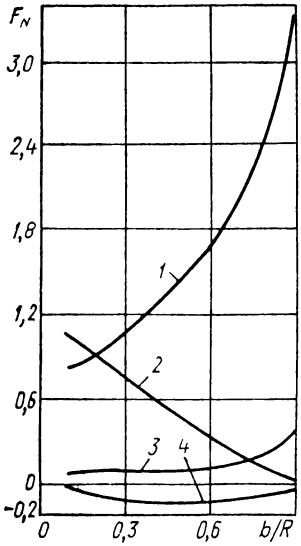
Формулы (4.8) и (4.9) при $A_0 = -5/4$, $A_1 = 1$, $A_2 = 3$, $A_3 = -9/2$ определяют также решение задачи в случае, когда внешняя граница диска жестко защемлена при $\mu = 1/4$ (плоская деформация) [44]. Пусть на контуре диска действуют две растягивающие силы F, а остальная граница диска и берега трещин свободны от нагрузки (см. рис. 4.19; $\sigma = 0$, $P = 0$). Значения КИН, полученные методом СИУ [46], приведены в табл. 4.13.

Таблица 4.13. Значения КИН $K_I(a)/(\sigma_0\sqrt{\pi R})$ (над чертой) и $K_I(b)/(\sigma_0\sqrt{\pi R})$ (под чертой) ($\sigma_0 = F/(\pi R)$) при растяжении кругового диска с двумя коллинеарными трещинами двумя сосредоточенными силами [46]

$\frac{a}{R}$	b/R							
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1	0,2078 0,1989	0,2943 0,2612	0,3560 0,2880	0,4064 0,2917	0,4426 0,2812	0,4685 0,2655	0,4862 0,2560	0,4996 0,2722
0,2	—	0,1873 0,1753	0,2579 0,2202	0,3059 0,2333	0,3399 0,2281	0,3673 0,2145	0,3797 0,2035	0,3922 0,2150
0,3	—	—	0,1618 0,1478	0,2192 0,1784	0,2558 0,1829	0,2800 0,1726	0,2956 0,1617	0,3068 0,1688
0,4	—	—	—	0,1331 0,1184	0,1777 0,1373	0,2045 0,1348	0,2207 0,1255	0,2309 0,1284
0,5	—	—	—	—	0,1038 0,0897	0,1366 0,0993	0,1546 0,0939	0,1645 0,0933
0,6	—	—	—	—	—	0,0761 0,0633	0,0981 0,0660	0,1085 0,0636
0,7	—	—	—	—	—	—	0,0511 0,0402	0,0637 0,0395
0,8	—	—	—	—	—	—	—	0,0295 0,0208

Таблица 4.14. Значения КИН $K_I = p\sqrt{\pi l}F_I$ при растяжении кругового диска с тремя равными трещинами [42]

$\frac{l}{R-2c}$	$l/c = 0{,}5$			$l/c = 0{,}8$		
	$F_I(C)$	$F_I(B)$	$F_I(A)$	$F_I(C)$	$F_I(B)$	$F_I(A)$
0,1	1,056	1,080	1,100	1,144	1,325	1,365
0,5	1,172	1,167	1,143	1,315	1,531	1,569
0,8	1,529	1,284	1,134	1,680	1,680	1,637
0,9	1,914	1,360	1,130	2,094	1,765	1,664



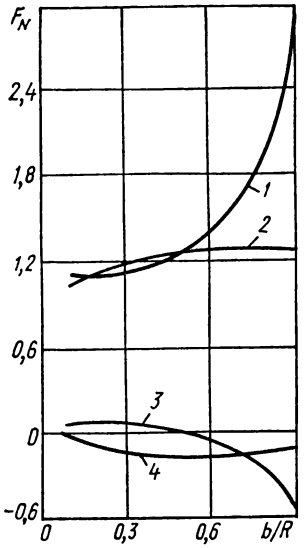
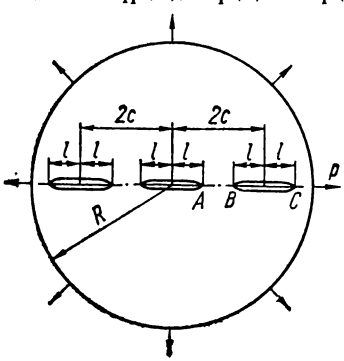


Рис. 4.21. Зависимость функций F_N от параметра b/R при растяжении кругового диска с двумя параллельными трещинами для $h/R = 0{,}2$ и $a/R = 0{,}2$:
1 — $F_{\mathrm{I}}(C)$; *2* — $F_{\mathrm{I}}(A)$; *3* — $F_{\mathrm{II}}(C)$; *4* — $F_{\mathrm{II}}(A)$ [47].

Рис. 4.22. Зависимость функций F_N от параметра b/R для кругового диска с двумя параллельными трещинами при действии на их берегах сдвигающих усилий для $h/R = 0{,}2$ и $a/R = 0{,}2$:
1 — $F_{\mathrm{II}}(C)$; *2* — $F_{\mathrm{II}}(A)$; *3* — $F_{\mathrm{I}}(C)$; *4* — $F_{\mathrm{I}}(A)$ [47].

Две параллельные трещины. Пусть на контуре диска заданы радиальные растягивающие напряжения p, а на берегах двух параллельных трещин сдвигающие усилия q (рис. 4.20). Задача решена методом интегральных уравнений в работе [47]. Из условий симметрии в случае растяжения следует, что $K_{\mathrm{I}}(A) = K_{\mathrm{I}}(B) = p\sqrt{\pi a}F_{\mathrm{I}}(A)$, $K_{\mathrm{II}}(A) = -K_{\mathrm{II}}(B) = p\sqrt{\pi a}F_{\mathrm{II}}(A)$, $K_{\mathrm{I}}(C) = K_{\mathrm{I}}(D) = p\sqrt{\pi b}F_{\mathrm{I}}(C)$, $K_{\mathrm{II}}(C) = -K_{\mathrm{II}}(D) = p\sqrt{\pi a}F_{\mathrm{II}}(C)$; функции F_N приведены на рис. 4.21. Эти же значения КИН соответствуют также случаю, когда контур диска свободен от нагрузки, а на берегах трещин действует постоянное давление σ ($p = \sigma$).



При действии сдвигающих усилий на трещинах имеем $K_{\mathrm{I}}(A) = -K_{\mathrm{I}}(B) = q\sqrt{\pi a}F_{\mathrm{I}}(A)$, $K_{\mathrm{II}}(A) = K_{\mathrm{II}}(B) =$

Рис. 4.23. Круговой диск с тремя равными коллинеарными трещинами.

$= q\sqrt{\pi a}F_{II}(A)$, $K_I(C) = -K_I(D) = q\sqrt{\pi b}F_I(C)$, $K_{II}(C) = K_{II}(D) = q\sqrt{\pi b}F_{II}(C)$; функции F_N показаны на рис. 4.22.

Три коллинеарные трещины. Пусть в диске имеются три равные диаметральные трещины, расположенные симметрично относительно его центра. Берега трещин свободны от нагрузки, а на контуре диска заданы постоянные радиальные напряжения (рис. 4.23). Значения КИН, полученные методом рядов Лорана [42], приведены в табл. 4.14.

4.3. Круговой диск с краевыми трещинами

Радиальная краевая трещина. Пусть на границу диска выходит радиальная трещина. Контур диска свободен от нагрузки, а на берегах трещины действует постоянное давление σ (рис. 4.24). В работе [48] показано, что точное выражение КИН имеет вид

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l}\,A(2-\lambda)^{-3/2}, \quad \lambda = l/R. \tag{4.10}$$

Здесь A — постоянная, определяемая равенством

$$A = 2/[\sqrt{\pi}\,K_+(i)], \tag{4.11}$$

$$K_+(i) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi^2-4}{8\pi}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{i}{\alpha_n}\right)\left(1-\frac{i}{\alpha_n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)},$$

где $\alpha_n = (2n+1)\,l + x_n + iy_n$, x_n и y_n удовлетворяют системе уравнений

$$\operatorname{ch}(\pi x_n/2)\cos(\pi y_n/2) = 2n+1+y_n,$$
$$\operatorname{sh}(\pi x_n/2)\sin(\pi y_n/2) = -x_n.$$

Решение этой системы находилось методом итераций при использовании в качестве нулевого приближения выражений

$$x_n^{(0)} = (2/\pi)\ln(4n+2), \quad y_n^{(0)} = -(8/\pi^2)\ln(4n+2)/(4n+2),$$

следующих из асимптотики при $n \to \infty$. В результате вычислений получено [48]: $A = 3{,}17214$.

Отметим, что при $\lambda = 0$ формула (4.10) определяет решение задачи для полуплоскости с краевой трещиной под действием постоянного давления (см. п. 3.1). Поэтому постоянную A можно выразить также через определенный интеграл и воспользоваться известным его числовым значением.

Ниже приведены значения КИН K_I, вычисленные по формуле (4.10):

l/R	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
$K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$	1,1215	1,3135	1,5674	1,9150	2,4131	3,1721	4,4332	6,8254	12,539

Данные по КИН имеются также в работах [1, 2, 49—52].

Соотношение (4.10) при $\sigma = p$ определяет также значение K_I в случае, когда берега трещины свободны от нагрузки, а на краю диска заданы растягивающие радиальные напряжения p.

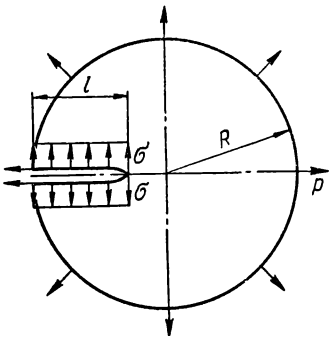
Пусть круговой диск с краевой трещиной вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего центра. Берега трещины и контур

диска свободны от нагрузки (рис. 4.25, *а*). Задача решена методом СИУ в работе [53]. КИН K_I можно представить в виде

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi l}\,[F(\lambda) - (5 - \varkappa) H(\lambda)/(3 + \varkappa)], \quad \lambda = l/R,$$

где $\sigma_0 = \rho\omega^2 R^2 (3 + \varkappa) / [4 (1 + \varkappa)]$, ρ — плотность материала, функция $F(\lambda) = 3{,}17214\,(2 - \lambda)^{-3/2}$ является безразмерным КИН при действии на берегах трещины постоянного давления, функция $H(\lambda)$ показана на рис. 4.25, *б*. Здесь же приведена зависимость КИН от параметра λ. Данные по КИН имеются также в работах [8, 21, 49, 51, 54].

Контур диска свободен от нагрузки, а на берегах трещины действуют сосредоточенные силы (рис. 4.26; $M = 0$). Зависимость



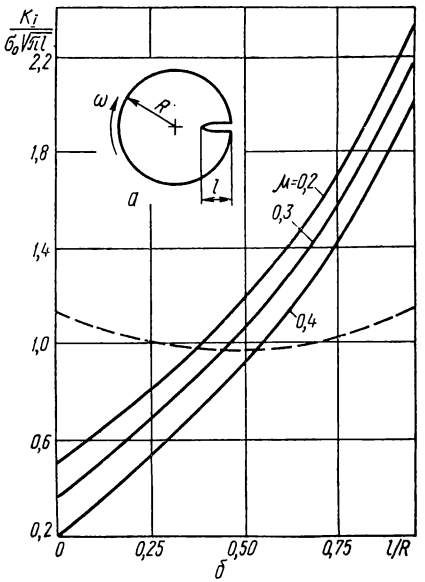


Рис. 4.24. Круговой диск с краевой радиальной трещиной под давлением и при всестороннем растяжении.

Рис. 4.25. Схема задачи о вращении диска с краевой трещиной (*а*) и зависимость от параметра λ КИН $K_I/\sigma_0\sqrt{\pi l}$ в случае плоской деформации при $\mu = 0{,}2$; 0,3; 0,4 и функция $H(\lambda)$ (штриховая линия) (*б*) [8, 53].

КИН $K_I/P\sqrt{\pi/l}$ от параметра c/l, полученная методом СИУ [1, 2], показана на рис. 4.27.

В случае, когда в точках выхода трещины на край диска действуют сосредоточенные силы P и моменты M (см. рис. 4.26, $c = 0$), точное решение задачи получено методом Винера — Хопфа в работе [55]. Выражение для КИН имеет вид

$$K_I = (2R\sqrt{l/\pi})^{-1}\,[2B\,(M + PR)\,(2 - \lambda)^{-1/2} + A\,(M + 2PR)\,\lambda\,(2 - \lambda)^{-3/2}],$$
$$\lambda = l/R,$$

где постоянная A определяется формулой (4.11), а $B = 2\sqrt{2}/\sqrt{\pi^2 - 4} \approx \approx 1{,}16746$.

Пусть на краю диска действует система горизонтальных и вертикальных сосредоточенных сил, а остальная граница и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.28). Значения КИН, полученные методом граничных коллокаций [56], приведены в табл. 4.15 и 4.16.

Таблица 4.15. **Значения КИН $K_I/((Q/2R)\sqrt{\pi l})$ для кругового диска с краевой радиальной трещиной при действии на его крае горизонтальных сосредоточенных сил [56]**

$\frac{2\beta}{\pi}$	$l/2R$						
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
1	0,0166	0,023	0,030	0,0415	0,0605	0,0943	0,1624
2	0,0697	0,090	0,119	0,1649	0,2388	0,3689	0,6234
3	0,1551	0,200	0,265	0,3644	0,5235	0,7970	1,3093
4	0,2720	0,350	0,462	0,6305	0,8959	1,3370	2,1208
5	0,4183	0,535	0,703	0,9520	1,3323	1,9395	2,9583
6	0,5873	0,750	0,980	1,3104	1,8005	2,5466	3,7329
7	0,7803	0,989	1,280	1,6886	2,2678	3,1062	4,3844
8	0,9849	1,245	1,592	2,0608	2,6944	3,5674	4,8703
9	1,2055	1,507	1,899	2,4018	3,0433	3,8934	5,1723
10	1,4259	1,766	2,182	2,6812	3,2783	4,0586	5,2847
11	1,6523	2,011	2,419	2,8639	3,3670	4,0497	5,2094
12	1,8674	2,226	2,582	2,9180	3,2909	3,8714	4,9005
13	2,0768	2,391	2,632	2,8044	3,0376	3,5316	4,5467
14	2,2660	2,479	2,522	2,4982	2,6182	3,0540	3,9889
15	2,4375	2,438	2,188	1,9835	2,0540	2,4509	3,3013
16	2,5826	3,174	1,556	1,2768	1,3820	1,7736	2,5029
17	2,6992	1,481	0,571	0,4390	0,6459	1,0200	1,6158
18	2,7866	—0,107	—0,700	—0,4400	—0,1226	0,2144	0,6562
19	2,8332	—3,156	—1,943	—1,2824	—0,9047	—0,6271	—0,3531
20	...	—5,469	—2,764	—1,958	—1,598	—1,379	—1,255

Таблица 4.16. **Значения КИН $K_I/((P/2R)\sqrt{\pi l})$ для кругового диска с краевой радиальной трещиной при действии на его крае вертикальных сосредоточенных сил [56]**

$\frac{2\beta}{\pi}$	$l/2R$						
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
1	—0,1113	—0,130	—0,154	—0,1883	—0,2360	—0,3076	—0,4235
2	—0,2146	—0,250	—0,295	—0,3556	—0,4386	—0,5568	—0,7313
3	—0,3062	—0,361	—0,409	—0,4838	—0,5784	—0,6978	—0,8362
4	—0,3746	—0,425	—0,483	—0,5515	—0,6247	—0,6870	—0,6863
5	—0,4190	—0,461	—0,505	—0,5437	—0,5566	—0,5012	—0,2784
6	—0,4270	—0,452	—0,463	—0,4422	—0,3542	—0,1287	0,3617
7	—0,3978	—0,388	—0,344	—0,2354	—0,0092	0,4210	1,1953
8	—0,3204	—0,260	—0,138	0,0879	0,4803	1,1257	2,1616
9	—0,1907	—0,060	0,165	0,5342	1,1053	1,9505	3,2119
10	—0,0005	0,224	0,577	1,1040	1,8453	2,8524	4,2990
11	0,2624	0,604	1,106	1,7923	2,6699	3,7866	5,3839
12	0,6061	1,096	1,761	2,5838	3,5386	4,7093	6,4332
13	1,0594	1,725	2,550	3,4496	4,4028	5,5812	7,4183
14	1,6454	2,526	3,473	4,3469	5,2149	6,3737	8,3185
15	2,4306	3,556	4,515	5,2106	5,9282	7,0630	9,1125
16	3,5532	4,907	5,623	5,9637	6,5114	7,6362	9,7851
17	5,3008	6,713	6,666	6,5357	6,9530	8,0889	10,3264
18	8,5732	9,051	7,417	6,8888	7,2528	8,4131	10,7191
19	17,8835	11,157	7,707	7,0627	7,4300	8,6119	10,9607
20	...	11,488	7,721	7,051	7,451	8,636	10,990

Таблица 4.17. **Значения КИН $K_I\sqrt{R}/F$ при внецентренном растяжении $\alpha = a/R$, $\beta = b/R$ [57]**

λ	$\alpha = 0.9$			$\alpha = 0{,}8$				
	$\beta = 0{,}1$	$\beta = 0{,}2$	$\beta = 0{,}4$	$\beta = 0{,}1$	$\beta = 0{,}3$	$\beta = 0{,}4$	$\beta = 0{,}6$	$\beta = 0{,}1$
0,45	4,082	4,073	3,995	...	...	...	...	...
0,50	4,202	4,200	4,160	3,871	3,780	3,701	3,581	...
0,55	4,351	4,352	4,335	4,006	3,956	3,901	3,814	3,722
0,60	4,527	4,529	4,525	4,171	4,144	4,109	4,048	3,853
0,65	4,731	4,733	4,737	4,365	4,351	4,329	4,289	4,022
0,70	4,964	4,967	4,974	4,537	4,581	4,568	4,544	4,225
0,80	5,532	5,533	5,542	5,128	5,128	5,126	5,120	4,729
0,90	6,259	6,260	6,268	5,820	5,822	5,823	5,825	5,381
1,00	7,197	7,197	7,203	6,710	6,712	6,714	6,718	6,221
1,10	8,425	8,425	8,429	7,873	7,874	7,877	7,881	7,319
1,20	10,07	10,06	10,07	9,427	9,427	9,429	9,433	8,785
1,30	12,33	12,33	12,33	11,57	11,57	11,57	11,57	10,81
1,40	15,59	15,59	15,60	14,66	14,66	14,66	14,66	13,72
1,50	20,58	20,58	20,58	19,38	19,38	19,38	19,38	18,17

В случае, когда край диска и берега трещины свободны от нагрузки, а во внутренних симметричных точках действуют две растягивающие сосредоточенные силы (рис. 4.29), решение задачи получено методом СИУ в работе [57]. Значения КИН приведены в табл. 4.17.

Таблица 4.18. **Значения КИН $K_I\sqrt{W}/F$ для дисковых компактных образцов [60, 62]**

$\frac{a}{W}$	Тип I	Тип II	$\frac{a}{W}$	Тип I	Тип II	$\frac{a}{W}$	Тип I	Тип II
0,20	4,138	4,115	0,45	8,697	8,700	0,65	17,92	17,93
0,25	4,853	4,839	0,50	10,17	10,17	0,70	22,81	22,82
0,30	5,636	5,629	0,55	12,05	12,05	0,75	30,28	30,29
0,35	6,506	6,503	0,60	14,52	14,53	0,80	42,75	42,76
0,40	7,505	7,506						

Когда линия действия сил проходит через трещину ($l > R - a$) и $a \to R$ или $l \to 2R$, справедлива асимптотическая формула [55]

$$K_I = (F/\sqrt{R\lambda})\{\lambda(1+\alpha)/[A_1(2-\lambda)^{3/2}] + 2\alpha/[B_1(2-\lambda)^{1/2}]\} +$$

$$+ F\sqrt{R}/l \cdot O\{(r_1/r_2)^{\beta}(2R/l-1)^{\gamma-1/2}\},$$

где $A_1 = 0{,}355715$, $B_1 = 0{,}966528$, $\gamma = 2{,}73959$, $r_1 = \sqrt{b^2 + (R-a)^2}$, $r_2 = \sqrt{b^2 + (R+a)^2}$, $\lambda = l/R$, $\alpha = a/R$.

Данные по КИН имеются также в работах [58—61].

Дисковый компактный образец с краевой трещиной на внецентренное растяжение. При определении характеристик трещиностойкости при ста-

кругового диска с краевой радиальной трещиной для $\varkappa = 1{,}8$ ($\lambda = l/R$,

$\alpha = 0{,}7$			$\alpha = 0{,}6$				$\alpha = 0{,}5$	
$\beta = 0{,}4$	$\beta = 0{,}5$	$\beta = 0{,}7$	$\beta = 0{,}1$	$\beta = 0{,}4$	$\beta = 0{,}5$	$\beta = 0{,}8$	$\beta = 0{,}1$	$\beta = 0{,}6$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
3,464	3,379	3,288	...	...	...	...	...	...
3,690	3,622	3,543	3,637	3,248	3,153	3,042	...	...
3,920	3,868	3,805	3,744	3,498	3,416	3,313	...	...
4,161	4,123	4,075	3,904	3,748	3,682	3,592	...	...
4,707	4,689	4,665	4,348	4,287	4,250	4,191	4,009	3,752
5,375	5,369	5,359	4,950	4,928	4,910	4,877	4,533	4,415
6,222	6,221	6,219	5,736	5,730	5,722	5,708	5,259	5,205
7,322	7,323	7,325	6,766	6,267	6,765	6,761	6,218	6,198
8,788	8,789	8,792	8,144	8,146	8,146	8,147	7,504	7,500
10,81	10,81	10,81	10,04	10,05	10,05	10,05	9,280	9,283
13,72	13,72	13,72	12,78	12,78	12,78	12,78	11,84	11,84
18,17	18,17	18,17	16,96	16,97	16,97	16,97	15,76	15,76

тическом нагружении нашли применение дисковые компактные образцы с краевой трещиной. Образец нагружается двумя растягивающими силами F, приложенными к контурам круговых отверстий, симметрично расположенных относительно линии трещины. Для указанных на рис. 4.30 двух типов таких образцов в работах [60—62] методом граничных коллокаций получены числовые значения КИН (табл. 4.18). На основании этих данных построена аппроксимационная формула [60, 62]

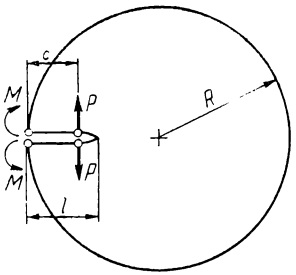
$$K_I = (F(2+\lambda)/[t\sqrt{W}(1-\lambda)^{3}])\,(0{,}76 + 4{,}8\lambda - 11{,}58\lambda^2 + 11{,}43\lambda^3 - 4{,}08\lambda^4) \qquad (4.12)$$

($\lambda = a/W$, t — толщина образца), которая в интервале $0{,}2 \leqslant \lambda < 1$ дает отклонение от данных табл. 4.18, не превышающее 0,3 % для обоих типов образцов. Справедливость формулы (4.12) подтверждена также в работе [63] на основе решения задачи методом СИУ. Из анализа численных результатов следует, что срез стандартного дискового компактного образца меняет КИН не более чем на 0,5 % при $0{,}2 \leqslant \lambda < 1$. Известны также данные по КИН для дисковых компактных образцов других размеров [64, 65]. Их сравнительный анализ имеется в работах [57, 60].

Дисковый образец с краевым вырезом и выходящей на него трещиной. При экспериментальном исследовании процесса зарождения и развития усталостных трещин нашли применение дисковые образцы с краевым вырезом различного радиуса закругления, а также с краевым вырезом и трещиной, выходящей на его край, при внецентренном растяжении посредством пальцев, вставляемых в отверстия в образцах (рис. 4.31). В случае, когда трещина отсутствует ($l_s = 0$), напряжения в вершине выреза определяются аппроксимационной формулой [63]

$$\sigma_{max} = (1/\sqrt{\rho})\,K_I(\lambda)\,(1{,}128 + 6{,}595\alpha - 116{,}5\alpha^2 + 705\alpha^3). \qquad (4.13)$$

Здесь $\alpha = \rho/W$, $K_I(\lambda)$ — КИН в вершине краевой трещины эквивалентной длины $\lambda = a/W$, определяемый соотношением (4.12). Относительная



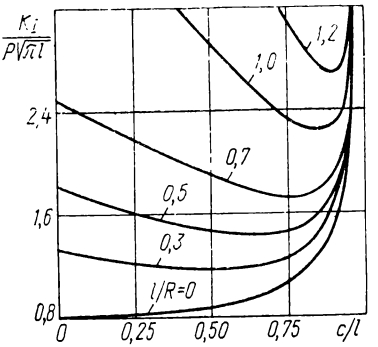
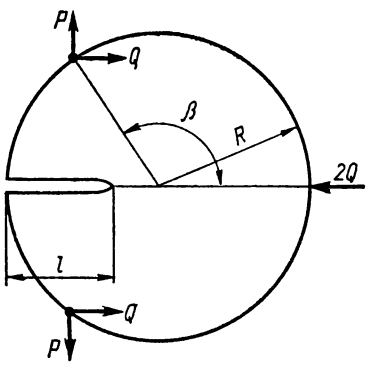


Рис. 4.26. Круговой диск с краевой радиальной трещиной при действии на ее берегах сосредоточенной нагрузки.

Рис. 4.27. Зависимость КИН $K_I/P\sqrt{\pi/l}$ от отношения c/l при действии сосредоточенных сил на берегах краевой радиальной трещины в круговом диске [1, 2].



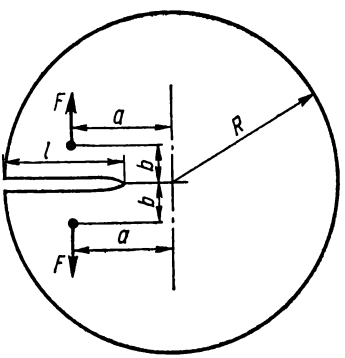


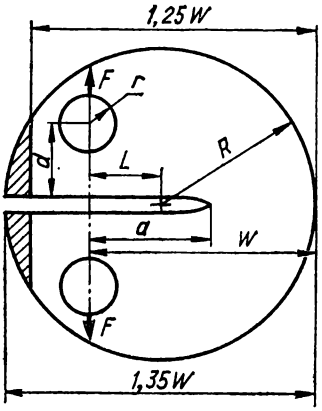
Рис. 4.28. Действие системы сосредоточенных сил на контуре кругового диска с краевой радиальной трещиной.

Рис. 4.29. Внецентренное растяжение сосредоточенными силами кругового диска с краевой радиальной трещиной.

погрешность формулы (4.13) при $0 < \rho/W \leqslant 0{,}1$; $0{,}2 \leqslant a/W \leqslant 0{,}3$ не превышает 1 %. При выбранном диапазоне изменения параметра $0{,}2 \leqslant a/W \leqslant 0{,}3$ влияние способа приложения внешней нагрузки (величины дуги контакта между пальцем и контуром отверстия) незначительно [63].

В случае, когда из вершины выреза исходит симметрично прямолинейная трещина (см. рис. 4.31), для определения КИН в ее вершине получена аппроксимационная формула [63]

$$K_I^s(\lambda_s) = K_I(\lambda)\sqrt{2\lambda_s}\,(1 + 0{,}01\lambda_s - 0{,}2\lambda_s\alpha)/(0{,}6 + \\ + 1{,}06\lambda_s - 0{,}19\lambda_s^2 - 0{,}52\alpha), \qquad (4.14)$$



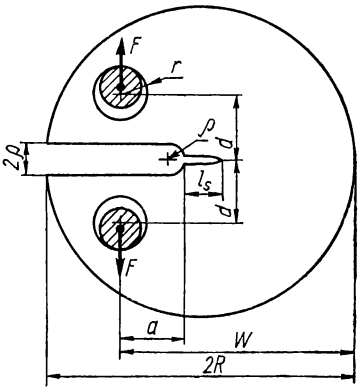
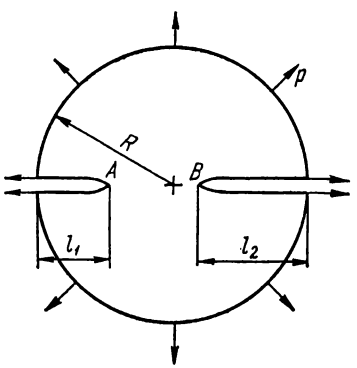


Рис. 4.30. Схемы кругового компактного образца (тип I) и дискового компактного образца со срезом (без заштрихованной части) (тип II): $r = 0{,}125W$; $d = 0{,}275W$; $L = 0{,}325W$; $R = 0{,}675W$.

Рис. 4.31. Схема дискового образца с краевым вырезом и краевой трещиной на внецентренное растяжение: $W = 1{,}5R$; $d = 0{,}275W$; $r = 0{,}125W$.

где $K_I(\lambda)$ — КИН в вершине краевой трещины (4.12) эквивалентной длины $\lambda = (a + l_s)/W$; $\lambda_s = l_s/\rho$; $\alpha = \rho/W$. Относительная погрешность формулы (4.14) при $0{,}2 \leqslant a/W \leqslant 0{,}3$; $0{,}03 \leqslant \rho/W \leqslant 0{,}10$; $0 \leqslant l_s/\rho \leqslant 1{,}5$ не превышает 1,5 %. Для более длинных трещин ($l_s/\rho > 1{,}5$) K_I^s следует принимать равным $K_I(\lambda)$.

Обратим внимание на то, что в формулы (4.13) и (4.14) в качестве параметра входит КИН $K_I(\lambda)$ для краевой трещины при отсутствии краевого выреза ($\rho = 0$), учитывающий геометрию и способ нагружения образца. Поэтому можно предположить, что эти формулы окажутся также справедливыми для других плоских



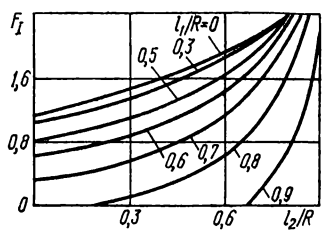


Рис. 4.32. Всестороннее растяжение кругового диска с двумя краевыми радиальными трещинами.

Рис. 4.33. Зависимость КИН $K_I(B) = p\sqrt{\pi l_2} F_I$ от параметра l_2/R при всестороннем растяжении кругового диска с двумя краевыми радиальными трещинами [54].

образцов с краевым вырезом, в частности для компактного образца.

Соответствующие результаты для σ_{max} и K_I^s получены также в работе [61] при внецентренном растяжении диска сосредоточенными силами ($r = 0$), т. е. не учитывалась реальная схема нагружения образца.

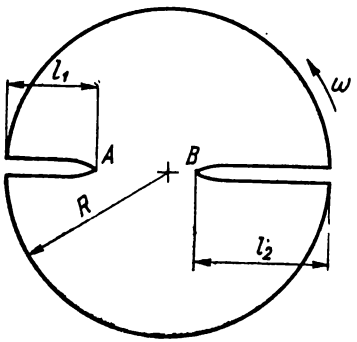
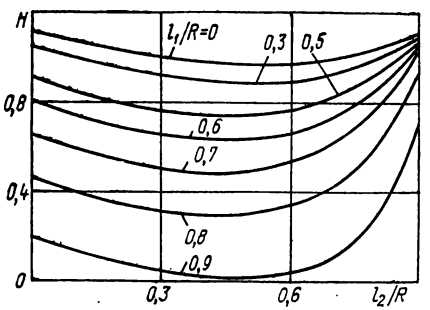


Рис. 4.34. Вращение кругового диска с двумя краевыми радиальными трещинами.

Две краевые радиальные трещины. Круговой диск ослаблен двумя краевыми трещинами различной длины, расположенными на одном диаметре. Берега трещин свободны от нагрузки, а на внешнем контуре действуют постоянные радиальные напряжения p (рис. 4.32). Зависимость КИН K_I (B) от параметра l_2/R для некоторых значений l_1/R, полученная методом СИУ в работе [54], приведена на рис. 4.33. Эти же значения КИН K_I (B) соответствуют случаю, когда край диска свободен от нагрузки, а на берегах трещин действует постоянное давление $\sigma = p$. Для равных трещин ($l_1 = l_2$) данные по КИН имеются также в работах [1, 2, 51].

Пусть круговой диск с двумя краевыми трещинами вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего центра. Берега трещин и контур диска свободны от нагрузки (рис. 4.34). Задача решена методом СИУ в работе [54]. КИН K_I (B) можно представить в виде

$$K_I(B) = \sigma_0 \sqrt{\pi l_2}\,[F_I(l_1/R,\ l_2/R) - (5 - \varkappa)\,H(l_1/R,\ l_2/R)/(3 + \varkappa)], \quad (4.15)$$



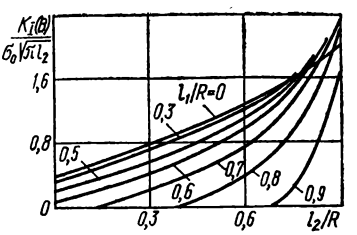


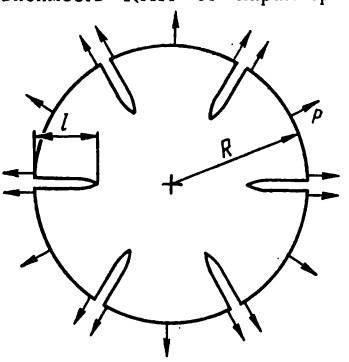
Рис. 4.35. Зависимость функции H $(l_1/R,\ l_2/R)$ от параметра l_2/R при некоторых значениях l_1/R [54].

Рис. 4.36. Зависимость КИН K_I (B) / $(\sigma_0 \sqrt{\pi l_2})$ от параметра l_2/R при вращении кругового диска с двумя краевыми радиальными трещинами при $\mu = 0{,}3$ (плоская деформация) [54].

где $\sigma_0 = \rho\omega^2 R^2 (3 + \varkappa)/[4\,(1 + \varkappa)]$, ρ — плотность материала, функция F_I $(l_1/R,\ l_2/R)$ является безразмерным КИН при действии на берегах трещин постоянного давления (см. рис. 4.33), функция H $(l_1/R,\ l_2/R)$ показана на рис. 4.35.

Приведенные на рис. 4.33 и 4.35 результаты и формула (4.15) позволяют определить $K_I(B)$ при любых значениях упругой постоянной $\varkappa$. На рис. 4.36 показана зависимость $K_I(B)$ от отношения l_2/R при $\mu = 0{,}3$ в случае плоской деформации.

Система краевых радиальных трещин при циклической симметрии. Круговой диск ослаблен N циклически размещенными трещинами равной длины. Берега трещин свободны от нагрузки, а на контуре диска заданы постоянные радиальные напряжения p (рис. 4.37). Зависимость КИН от параметра



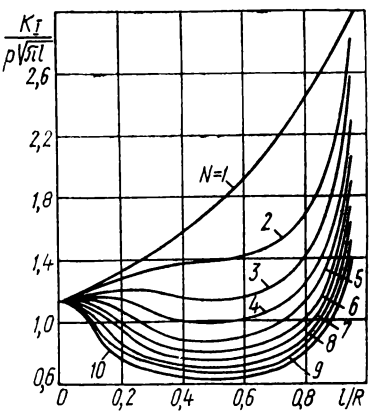


Рис. 4.37. Всестороннее растяжение кругового диска с циклически размещенными краевыми радиальными трещинами.

Рис. 4.38. Зависимость КИН $K_I/p\sqrt{\pi l}$ от относительной длины трещины l/R при всестороннем растяжении кругового диска с N циклически размещенными краевыми радиальными трещинами [1, 2].

l/R, полученная методом СИУ [1, 2], приведена на рис. 4.38. Такие же значения КИН имеют в случае, когда край диска свободен от нагрузки, а на берегах трещин задано постоянное давление $\sigma = p$.

4.4. Круговое кольцо с внутренней краевой радиальной трещиной

Действие нагрузки на берегах трещины. Пусть граничные окружности кругового кольца свободны от нагрузки, а на берегах краевой радиальной трещины задана симметричная нормальная нагрузка $p(x) = (x/h)^n$ ($n = 0, 1, ..., 6$), где x—радиальная координата, отсчитываемая от внутренней окружности (рис. 4.39). Значения КИН $K_I = \sqrt{\pi l} F_n$, полученные модифицированным методом конформных отображений и коллокаций [66], представлены в табл. 4.19 (в скобках приведены показатели степени множителя 10). Эти результаты могут быть использованы при вычислении КИН, когда на берегах трещины действует произвольная нормальная нагрузка $p(x)$, аппроксимируемая полиномом

$$p(x) = \sum_{n=0}^{6} a_n (x/h)^n.$$

Таблица 4.19. Значения КИН $K_I/\sqrt{\pi l}$ для кругового кольца с внутренней

$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{l}{h}$	0	1	2
3,0	0,01	1,108	6,781 (—3)	5,231 (—5)
	0,02	1,097	1,348 (—2)	2,085 (—4)
	0,03	1,084	2,006 (—2)	4,659 (—4)
	0,04	1,073	2,657 (—2)	8,241 (—4)
	0,05	1,068	3,314 (—2)	1,286 (—3)
	0,06	1,064	3,969 (—2)	1,850 (—3)
	0,07	1,059	4,616 (—2)	2,513 (—3)
	0,08	1,056	5,267 (—2)	3,278 (—3)
	0,09	1,051	5,905 (—2)	4,138 (—3)
	0,1	1,051	6,566 (—2)	5,113 (—3)
	0,2	1,052	1,316 (—1)	2,049 (—2)
	0,3	1,077	2,005 (—1)	4,665 (—2)
	0,4	1,119	2,744 (—1)	8,461 (—2)
	0,5	1,179	3,563 (—1)	1,362 (—1)
	0,6	1,261	4,501 (—1)	2,045 (—1)
	0,7	1,385	5,676 (—1)	2,972 (—1)
	0,8	1,590	7,334 (—1)	4,324 (—1)
2,5	0,01	1,112	6,796 (—3)	5,240 (—5)
	0,02	1,104	1,354 (—2)	2,091 (—4)
	0,03	1,094	2,018 (—2)	4,680 (—4)
	0,04	1,086	2,677 (—2)	8,286 (—4)
	0,05	1,084	3,344 (—2)	1,295 (—3)
	0,06	1,083	4,013 (—2)	1,866 (—3)
	0,07	1,079	4,671 (—2)	2,534 (—3)
	0,08	1,075	5,323 (—2)	3,302 (—3)
	0,09	1,075	5,990 (—2)	4,180 (—3)
	0,1	1,077	6,669 (—2)	5,171 (—3)
	0,2	1,097	1,351 (—1)	2,088 (—2)
	0,3	1,139	2,076 (—1)	4,783 (—2)
	0,4	1,196	2,859 (—1)	8,715 (—2)
	0,5	1,270	3,731 (—1)	1,408 (—1)
	0,6	1,365	4,730 (—1)	2,120 (—1)
	0,7	1,497	5,956 (—1)	3,077 (—1)
	0,8	1,713	7,682 (—1)	4,472 (—1)
2,0	0,01	1,116	6,811 (—3)	5,248 (—5)
	0,02	1,112	1,360 (—2)	2,098 (—4)
	0,03	1,105	2,031 (—2)	4,701 (—4)
	0,04	1,100	2,699 (—2)	8,335 (—4)
	0,05	1,101	3,377 (—2)	1,304 (—3)
	0,06	1,103	4,060 (—2)	1,881 (—3)
	0,07	1,102	4,734 (—2)	2,559 (—3)
	0,08	1,101	5,404 (—2)	3,338 (—3)
	0,09	1,104	6,090 (—2)	4,231 (—3)
	0,1	1,109	6,793 (—2)	5,241 (—3)
	0,2	1,156	1,395 (—1)	2,136 (—2)
	0,3	1,232	2,182 (—1)	4,959 (—2)
	0,4	1,326	3,056 (—1)	9,152 (—2)
	0,5	1,428	4,023 (—1)	1,487 (—1)
	0,6	1,553	5,140 (—1)	2,252 (—1)

краевой радиальной трещиной, нагруженной давлением $p(x) = (x/h)^n$ [66]

n			
3	4	5	6
4,397 (—7)	3,861 (—9)	3,481 (—11)	3,194 (—13)
3,508 (—6)	6,165 (—8)	1,112 (—9)	2,042 (—11)
1,177 (—5)	3,105 (—7)	8,408 (—9)	2,316 (—10)
2,779 (—5)	9,778 (—7)	3,531 (—8)	1,297 (—9)
5,424 (—5)	2,387 (—6)	1,078 (—7)	4,950 (—9)
9,368 (—5)	4,948 (—6)	2,681 (—7)	1,478 (—8)
1,485 (—4)	9,153 (—6)	5,788 (—7)	3,723 (—8)
2,215 (—4)	1,561 (—5)	1,128 (—6)	8,293 (—8)
3,146 (—4)	2,494 (—5)	2,029 (—6)	1,678 (—7)
4,320 (—4)	3,807 (—5)	3,440 (—6)	3,162 (—7)
3,463 (—3)	6,101 (—4)	1,103 (—4)	2,026 (—5)
1,180 (—2)	3,113 (—3)	8,427 (—4)	2,321 (—4)
2,842 (—2)	9,970 (—3)	3,592 (—3)	1,317 (—3)
5,689 (—2)	2,486 (—2)	1,117 (—2)	5,108 (—3)
1,018 (—1)	5,310 (—2)	2,851 (—2)	1,561 (—2)
1,710 (—1)	1,034 (—1)	6,441 (—2)	4,095 (—2)
2,808 (—1)	1,921 (—1)	1,356 (—1)	9,786 (—2)
4,402 (—7)	3,865 (—9)	3,484 (—11)	3,196 (—13)
3,516 (—6)	6,177 (—8)	1,114 (—9)	2,045 (—11)
1,181 (—5)	3,114 (—7)	8,427 (—9)	2,321 (—10)
2,790 (—5)	9,812 (—7)	3,541 (—8)	1,301 (—9)
5,452 (—5)	2,397 (—6)	1,081 (—7)	4,965 (—9)
9,429 (—5)	4,975 (—6)	2,694 (—7)	1,484 (—8)
1,495 (—4)	9,203 (—6)	5,815 (—7)	3,738 (—8)
2,226 (—4)	1,567 (—5)	1,131 (—6)	8,312 (—8)
3,171 (—4)	2,511 (—5)	2,040 (—6)	1,686 (—7)
4,358 (—4)	3,834 (—5)	3,461 (—6)	3,178 (—7)
3,514 (—3)	6,175 (—4)	1,114 (—4)	2,044 (—5)
1,203 (—2)	3,162 (—3)	8,540 (—4)	2,348 (—4)
2,907 (—2)	1,016 (—2)	3,649 (—3)	1,335 (—3)
5,837 (—2)	2,538 (—2)	1,136 (—2)	5,186 (—3)
1,047 (—1)	5,434 (—2)	2,908 (—2)	1,587 (—2)
1,757 (—1)	1,057 (—1)	6,560 (—2)	4,160 (—2)
2,883 (—1)	1,962 (—1)	1,381 (—1)	9,942 (—2)
4,408 (—7)	3,869 (—9)	3,487 (—11)	3,199 (—13)
3,525 (—6)	6,189 (—8)	1,116 (—9)	2,048 (—11)
1,186 (—5)	3,123 (—7)	8,449 (—9)	2,326 (—10)
2,803 (—5)	9,849 (—7)	3,553 (—8)	1,304 (—9)
5,482 (—5)	2,408 (—6)	1,086 (—7)	4,981 (—9)
9,492 (—5)	5,002 (—6)	2,706 (—7)	1,490 (—8)
1,506 (—4)	9,261 (—6)	5,846 (—7)	3,755 (—8)
2,245 (—4)	1,578 (—5)	1,138 (—6)	8,355 (—8)
3,201 (—4)	2,530 (—5)	2,053 (—6)	1,695 (—7)
4,404 (—4)	3,867 (—5)	3,486 (—6)	3,198 (—7)
3,575 (—3)	6,259 (—4)	1,126 (—4)	2,063 (—5)
1,237 (—2)	3,235 (—3)	8,704 (—4)	2,387 (—4)
3,022 (—2)	1,049 (—2)	3,749 (—3)	1,367 (—3)
6,091 (—2)	2,628 (—2)	1,170 (—2)	5,318 (—3)
1,098 (—1)	5,649 (—2)	3,005 (—2)	1,633 (—2)

$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{l}{h}$	0	1	2
	0,7	1,706	6,478 (—1)	3,271 (—1)
	0,8	1,935	8,309 (—1)	4,735 (—1)
1,75	0,01	1,118	6,819 (—3)	5,253 (—5)
	0,02	1,116	1,363 (—2)	2,101 (—4)
	0,03	1,111	2,037 (—2)	4,713 (—4)
	0,04	1,108	2,710 (—2)	8,361 (—4)
	0,05	1,110	3,395 (—2)	1,309 (—3)
	0,06	1,114	4,086 (—2)	1,890 (—3)
	0,07	1,115	4,769 (—2)	2,573 (—3)
	0,08	1,116	5,449 (—2)	3,958 (—3)
	0,09	1,120	6,147 (—2)	4,260 (—3)
	0,1	1,127	6,864 (—2)	5,281 (—3)
	0,2	1,200	1,430 (—1)	2,178 (—2)
	0,3	1,300	2,260 (—1)	5,091 (—2)
	0,4	1,427	3,209 (—1)	9,490 (—2)
	0,5	1,563	4,274 (—1)	1,556 (—1)
	0,6	1,718	5,500 (—1)	2,368 (—1)
	0,7	1,901	6,965 (—1)	3,451 (—1)
	0,8	2,239	9,170 (—1)	5,099 (—1)
1,5	0,01	1,120	6,827 (—3)	5,257 (—5)
	0,02	1,120	1,366 (—2)	2,105 (—4)
	0,03	1,117	2,044 (—2)	4,724 (—4)
	0,04	1,116	2,722 (—2)	8,388 (—4)
	0,05	1,120	3,413 (—2)	1,314 (—3)
	0,06	1,126	4,113 (—2)	1,899 (—3)
	0,07	1,129	4,806 (—2)	2,587 (—3)
	0,08	1,131	5,498 (—2)	3,380 (—3)
	0,09	1,138	6,209 (—2)	4,291 (—3)
	0,1	1,147	6,941 (—2)	5,324 (—3)
	0,2	1,248	1,468 (—1)	2,220 (—2)
	0,3	1,389	2,364 (—1)	5,264 (—2)
	0,4	1,571	3,428 (—1)	9,975 (—2)
	0,5	1,773	4,665 (—1)	1,663 (—1)
	0,6	2,001	6,121 (—1)	2,569 (—1)
	0,7	2,241	7,816 (—1)	3,767 (—1)
	0,8	3,010	1,134	6,009 (—1)
1,25	0,01	1,122	6,835 (—3)	5,262 (—5)
	0,02	1,124	1,369 (—2)	2,108 (—4)
	0,03	1,123	2,051 (—2)	4,736 (—4)
	0,04	1,123	2,735 (—2)	8,416 (—4)
	0,05	1,130	3,433 (—2)	1,320 (—3)
	0,06	1,138	4,141 (—2)	1,909 (—3)
	0,07	1,143	4,845 (—2)	2,603 (—3)
	0,08	1,148	5,550 (—2)	3,404 (—3)
	0,09	1,157	6,275 (—2)	4,325 (—3)
	0,1	1,169	7,025 (—2)	5,371 (—3)
	0,2	1,304	1,512 (—1)	2,269 (—2)
	0,3	1,506	2,499 (—1)	5,492 (—2)
	0,4	1,784	3,755 (—1)	1,070 (—1)
	0,5	2,132	5,337 (—1)	1,847 (—1)

n			
3	4	5	6
1,843 (—1)	1,099 (—1)	6,780 (—2)	4,280 (—2)
3,016 (—1)	2,037 (—1)	1,425 (—1)	1,022 (—1)
4,411 (—7)	3,871 (—9)	3,488 (—11)	3,200 (—13)
3,530 (—6)	6,196 (—8)	1,117 (—9)	2,049 (—11)
1,188 (—5)	3,128 (—7)	8,460 (—9)	2,328 (—10)
2,810 (—5)	9,869 (—7)	3,559 (—8)	1,306 (—9)
5,499 (—5)	2,414 (—6)	1,088 (—7)	4,990 (—9)
9,526 (—5)	5,017 (—6)	2,713 (—7)	1,493 (—8)
1,513 (—4)	9,293 (—6)	5,863 (—7)	3,765 (—8)
2,256 (—4)	1,584 (—5)	1,142 (—6)	8,379 (—8)
3,218 (—4)	2,541 (—5)	2,061 (—6)	1,701 (—7)
4,430 (—4)	3,886 (—5)	3,500 (—6)	3,209 (—7)
3,631 (—3)	6,343 (—4)	1,139 (—4)	2,085 (—5)
1,263 (—2)	3,290 (—3)	8,831 (—4)	2,417 (—4)
3,110 (—2)	1,074 (—2)	3,825 (—3)	1,391 (—3)
6,312 (—2)	2,707 (—2)	1,200 (—2)	5,435 (—3)
1,142 (—1)	5,836 (—2)	3,088 (—2)	1,672 (—2)
1,923 (—1)	1,138 (—1)	6,984 (—2)	4,392 (—2)
3,199 (—1)	2,138 (—1)	1,486 (—1)	1,059 (—1)
4,414 (—7)	3,873 (—9)	3,490 (—11)	3,201 (—13)
3,534 (—6)	6,203 (—8)	1,118 (—9)	2,051 (—11)
1,190 (—5)	3,133 (—7)	8,471 (—9)	2,331 (—10)
2,817 (—5)	9,889 (—7)	3,565 (—8)	1,308 (—9)
5,516 (—5)	2,420 (—6)	1,090 (—7)	5,000 (—9)
9,562 (—5)	5,033 (—6)	2,720 (—7)	1,497 (—8)
1,519 (—4)	9,327 (—6)	5,881 (—7)	3,775 (—8)
2,268 (—4)	1,590 (—5)	1,146 (—6)	8,405 (—8)
3,237 (—4)	2,553 (—5)	2,069 (—6)	1,707 (—7)
4,459 (—4)	3,906 (—5)	3,516 (—6)	3,222 (—7)
3,687 (—3)	6,423 (—4)	1,152 (—4)	2,104 (—5)
1,297 (—2)	3,364 (—3)	8,999 (—4)	2,457 (—4)
3,236 (—2)	1,110 (—2)	3,935 (—3)	1,426 (—3)
6,658 (—2)	2,830 (—2)	1,246 (—2)	5,617 (—3)
1,219 (—1)	6,162 (—2)	3,235 (—2)	1,741 (—2)
2,062 (—1)	1,206 (—1)	7,341 (—2)	4,586 (—2)
3,655 (—1)	2,391 (—1)	1,635 (—1)	1,152 (—1)
4,416 (—7)	3,875 (—9)	3,492 (—11)	3,202 (—13)
3,539 (—6)	6,209 (—8)	1,119 (—9)	2,052 (—11)
1,192 (—5)	3,108 (—7)	8,483 (—9)	2,334 (—10)
2,825 (—5)	9,910 (—7)	3,571 (—8)	1,310 (—9)
5,534 (—5)	2,426 (—6)	1,093 (—7)	5,009 (—9)
9,600 (—5)	5,049 (—6)	2,728 (—7)	1,500 (—8)
1,527 (—4)	9,363 (—6)	5,900 (—7)	3,786 (—8)
2,280 (—4)	1,598 (—5)	1,150 (—6)	8,434 (—8)
3,256 (—4)	2,566 (—5)	2,078 (—6)	1,713 (—7)
4,490 (—4)	3,929 (—5)	3,533 (—6)	3,236 (—7)
3,752 (—3)	6,517 (—4)	1,166 (—4)	2,127 (—5)
1,342 (—2)	3,461 (—3)	9,221 (—4)	2,510 (—4)
3,425 (—2)	1,164 (—2)	4,099 (—3)	1,478 (—3)
7,253 (—2)	3,041 (—2)	1,326 (—2)	5,932 (—3)

$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{l}{h}$	0	1	2
1,25	0,6	2,566	7,361 (—1)	2,971 (—1)
	0,7	3,043	9,823 (—1)	4,514 (—1)
	0,8	3,461	1,256	6,508 (—1)

Тогда

$$K_I = \sqrt{\pi l} \sum_{n=0}^{6} a_n F_n.$$

Аналогичные данные для КИН приведены также в работе [67] при $R_2/R_1 = 2$. Изучался также случай постоянной нагрузки на трещине ($n = 0$) [68, 69].

Таблица 4.20. **Значения КИН $K_I/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ ($\sigma_0 = \sigma(R_2^2 + R_1^2)/(R_2^2 - R_1^2)$) для внутренней краевой радиальной трещины в круговом кольце, находящемся под действием внутреннего давления [69]**

$\frac{l}{h}$	R_1/h				
	1/3	1/2	1	2	3
0	1,122	1,122	1,122	1,122	1,122
0,1	0,878	0,957	1,058	1,113	1,137
0,2	0,756	0,878	1,057	1,189	1,239
0,3	0,685	0,834	1,089	1,305	1,397
0,4	0,643	0,813	1,138	1,461	1,613
0,5	0,620	0,808	1,199	1,635	1,883
0,6	0,611	0,816	1,273	1,834	2,189
0,7	0,616	0,841	1,359	2,046	2,527

Таблица 4.21. **Значения КИН $K_I/(P/\sqrt{l})$ для кругового кольца с внутренней краевой радиальной трещиной при действии растягивающих сосредоточенных сил на внутренней круговой границе [71]**

$\frac{l}{h}$	R_2/R_1				
	2	4	10	15	20
0,1	0,515	0,385	0,402	0,399	0,386
0,2	0,900	0,566	0,447	0,399	0,364
0,3	1,226	0,683	0,467	0,399	0,354
0,4	1,510	0,778	0,490	0,408	0,357
0,5	1,762	0,866	0,521	0,426	0,370
0,6	1,980	0,957	0,561	0,454	0,392
0,7	2,170	1,064	0,616	0,495	0,425
0,8	2,357	1,218	0,702	0,561	0,480

n			
3	4	5	6
1,373 (—1)	6,815 (—2)	3,530 (—2)	1,880 (—2)
2,393 (—1)	1,368 (—1)	8,184 (—2)	5,046 (—2)
3,899 (—1)	2,524 (—1)	1,713 (—1)	1,199 (—1)

Таблица 4.22. **Значения КИН K_I $(1 - R_1^2/R_2^2)/(2{,}24\, p\sqrt{\pi l})$ для кругового кольца с внутренней краевой радиальной трещиной при действии постоянных растягивающих усилий на внешней границе [75]**

$\frac{l}{h}$	R_2/R_1					
	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1	...	0,99	0,96	0,94	0,91	0,88
0,2	...	1,03	0,98	0,93	0,88	0,84
0,3	1,15	1,14	1,03	0,96	0,89	0,83
0,4	1,40	1,27	1,11	1,00	0,91	0,84
0,5	1,66	1,42	1,20	1,05	0,94	0,86
0,6	1,90	1,56	1,28	1,11	0,99	0,90
0,7	...	1,70	1,39	1,19	1,06	0,97
0,8	...	1,83	1,51	1,31	1,18	1,08
0,9	...	2,09	1,75	1,56	1,42	1,32

Таблица 4.23. **Значения КИН $K_I/(F/\sqrt{\pi R_1})$ для кругового кольца с внутренней краевой радиальной трещиной при действии сжимающих сил на внешней границе [76, 77]**

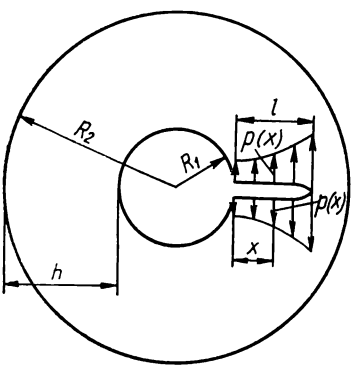
$\frac{l}{h}$	R_2/R_1			$\frac{l}{h}$	R_2/R_1		
	2	3	4		2	3	4
0,1	2,693	1,103	0,663	0,5	3,364	1,090	0,630
0,2	3,114	1,134	0,638	0,6	3,301	1,086	0,650
0,3	3,286	1,115	0,619	0,7	3,190	1,089	0,684
0,4	3,363	1,101	0,618	0,8	3,075	1,110	0,743

Действие нагрузки на внутренней круговой границе. Пусть берега трещины и внешняя круговая граница свободны от нагрузки, а внутренняя граничная окружность находится под действием постоянного давления (рис. 4.40). Значения КИН, полученные методом СИУ [69], приведены в табл. 4.20. Данные по КИН имеются также в работах [8, 9, 70, 71].

Пусть на внутренней граничной окружности в концах диаметра, перпендикулярного линии трещины, приложены две равные и противоположно направленные силы P, а остальная часть границы кольца и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.41). Значения КИН, полученные методом СИУ [71], приведены в табл. 4.21. Данные по КИН имеются также в работах [72—74].

Таблица 4.24. Значения КИН $K_I/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ ($\sigma_0 = ((3+\mu)/4)\,\rho\omega^2 \times \times [R_2^2 + (1-\mu)\,R_1^2/(3+\mu)]$, ρ — плотность материала) при вращении кругового кольца с внутренней краевой радиальной трещиной для $\mu = 0{,}3$ (плоское напряженное состояние) [69]

$\frac{l}{h}$	R_1/h				
	1/3	1/2	1	2	3
0	1,122	1,122	1,122	1,122	1,122
0,1	1,008	1,040	1,089	1,120	1,139
0,2	0,962	1,018	1,114	1,202	1,240
0,3	0,944	1,018	1,168	1,324	1,401
0,4	0,943	1,032	1,235	1,477	1,617
0,5	0,956	1,058	1,315	1,664	1,879
0,6	0,981	1,096	1,405	1,867	2,196
0,7	1,025	1,153	1,508	2,082	2,526



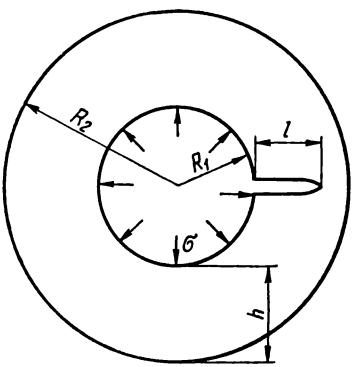
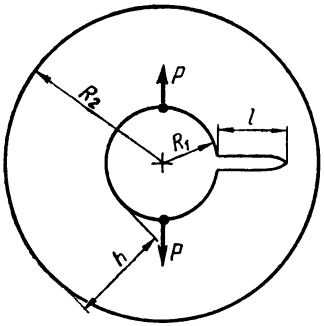


Рис. 4.39. Круговое кольцо с внутренней краевой радиальной трещиной, нагруженной переменным давлением.

Рис. 4.40. Круговое кольцо с внутренней краевой радиальной трещиной при действии давления на внутренней круговой границе.

Действие нагрузки на внешней круговой границе. Пусть наружная граница кольца загружена постоянными растягивающими усилиями, а внутренняя граница и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.42). Значения КИН, полученные модифицированным методом конформных отображений и коллокаций [75], приведены в табл. 4.22. Данные по КИН имеются также в работах [68, 71].

Пусть на внешней границе кольца в концах диаметра, на котором расположена трещина, действуют две сжимающие сосредоточенные силы F, а остальная часть границы и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.43). Значения КИН, полученные методом СИУ [76, 77], приведены в табл. 4.23. Данные по КИН имеются также в работах [72—74].



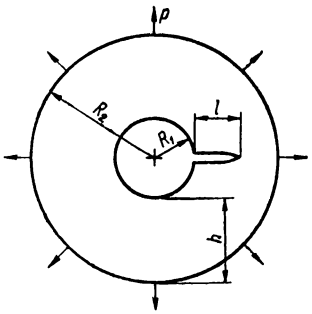
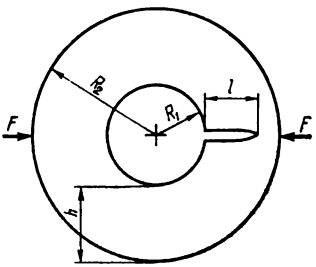


Рис. 4.41. Круговое кольцо с внутренней краевой радиальной трещиной при действии растягивающих сосредоточенных сил на внутренней круговой границе.

Рис. 4.42. Круговое кольцо с внутренней краевой радиальной трещиной при действии постоянных растягивающих усилий на внешней границе.



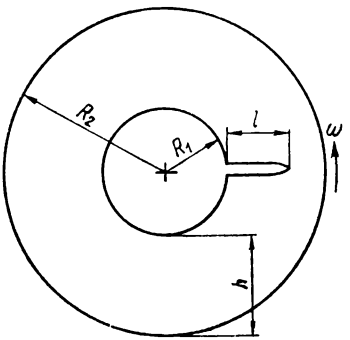


Рис. 4.43. Круговое кольцо с внутренней краевой радиальной трещиной при действии сжимающих сил на внешней границе.

Рис. 4.44. Вращение кругового кольца с внутренней краевой радиальной трещиной вокруг своей оси.

Вращение кругового кольца вокруг своей оси. Пусть круговое кольцо равномерно вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Берега трещины и граница кольца свободны от нагрузки (рис. 4.44). Значения КИН, полученные методом СИУ [69], приведены в табл. 4.24. Данные по КИН имеются также в работах [78—80].

4.5. Круговое кольцо с системой внутренних краевых радиальных трещин

Две коллинеарные трещины равной длины. Пусть круговое кольцо содержит две коллинеарные радиальные трещины, выходящие на внутреннюю границу. На берегах трещин действует симметричная нормальная

Таблица 4.25. Значения КИН $K_I/\sqrt{\pi l}$ для кругового кольца с двумя давлением $p(x) = (x/h)^n$ [66]

$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{l}{h}$	0	1	2
3,0	0,01	1,108	6,783 (—3)	5,233 (—5)
	0,02	1,095	1,345 (—2)	2,080 (—4)
	0,03	1,088	2,011 (—2)	4,667 (—4)
	0,04	1,086	2,679 (—2)	8,298 (—4)
	0,05	1,083	3,344 (—2)	1,295 (—3)
	0,06	1,079	4,003 (—2)	1,861 (—3)
	0,07	1,079	4,671 (—2)	2,534 (—3)
	0,08	1,083	5,354 (—2)	3,318 (—3)
	0,09	1,086	6,037 (—2)	4,207 (—3)
	0,1	1,088	6,713 (—2)	5,196 (—3)
	0,2	1,259	1,399 (—1)	2,143 (—2)
	0,3	1,274	2,236 (—1)	5,056 (—2)
	0,4	1,414	3,197 (—1)	9,471 (—2)
	0,5	1,588	4,338 (—1)	1,576 (—1)
	0,6	1,805	5,726 (—1)	2,449 (—1)
	0,7	2,071	7,451 (—1)	3,647 (—1)
	0,8	2,451	9,853 (—1)	5,410 (—1)
2,5	0,01	1,112	6,798 (—3)	5,241 (—5)
	0,02	1,102	1,351 (—2)	2,085 (—4)
	0,03	1,097	2,021 (—2)	4,684 (—4)
	0,04	1,096	2,696 (—3)	8,335 (—4)
	0,05	1,095	3,368 (—2)	1,302 (—3)
	0,06	1,093	4,035 (—2)	1,872 (—3)
	0,07	1,094	4,711 (—2)	2,549 (—3)
	0,08	1,099	5,403 (—2)	3,340 (—3)
	0,09	1,104	6,097 (—2)	4,238 (—3)
	0,1	1,107	6,784 (—2)	5,235 (—3)
	0,2	1,188	1,421 (—1)	2,167 (—2)
	0,3	1,315	2,280 (—1)	5,127 (—2)
	0,4	1,477	3,293 (—1)	9,685 (—2)
	0,5	1,667	4,480 (—1)	1,615 (—1)
	0,6	1,901	5,929 (—1)	2,513 (—1)
	0,7	2,181	7,716 (—1)	3,743 (—1)
	0,8	2,563	1,015	5,530 (—1)
2,0	0,01	1,114	6,804 (—3)	5,243 (—5)
	0,02	1,112	1,360 (—2)	2,098 (—4)
	0,03	1,109	2,036 (—2)	4,711 (—4)
	0,04	1,105	2,707 (—2)	8,355 (—4)
	0,05	1,107	3,387 (—2)	1,307 (—3)
	0,06	1,111	4,079 (—2)	1,888 (—3)
	0,07	1,115	4,769 (—2)	2,573 (—3)
	0,08	1,117	5,455 (—2)	3,362 (—3)
	0,09	1,122	6,155 (—2)	4,264 (—3)
	0,1	1,130	6,877 (—2)	5,288 (—3)
	0,2	1,230	1,453 (—1)	2,203 (—2)
	0,3	1,384	2,361 (—1)	5,264 (—2)
	0,4	1,572	3,434 (—1)	9,990 (—2)
	0,5	1,806	4,738 (—1)	1,685 (—1)

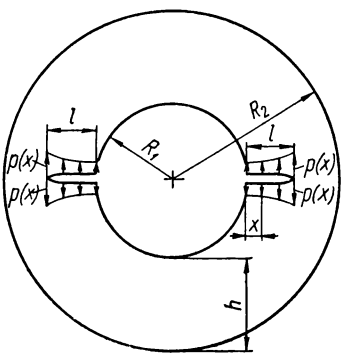
3	4	5	6
4,398 (—7)	3,861 (—9)	3,481 (—11)	3,194 (—13)
3,499 (—6)	6,149 (—8)	1,109 (—9)	2,036 (—11)
1,179 (—5)	3,108 (—7)	8,413 (—9)	2,317 (—10)
2,795 (—5)	9,831 (—7)	3,548 (—8)	1,303 (—9)
5,456 (—5)	2,399 (—6)	1,082 (—7)	4,969 (—9)
9,409 (—5)	4,965 (—6)	2,689 (—7)	1,481 (—8)
1,494 (—4)	9,199 (—6)	5,811 (—7)	3,736 (—8)
2,236 (—4)	1,573 (—5)	1,135 (—6)	8,340 (—8)
3,189 (—4)	2,523 (—5)	2,049 (—6)	1,693 (—7)
4,374 (—4)	3,845 (—5)	3,469 (—6)	3,184 (—7)
3,585 (—3)	6,275 (—4)	1,129 (—4)	2,068 (—5)
1,257 (—2)	3,280 (—3)	8,812 (—4)	2,413 (—4)
3,106 (—2)	1,073 (—2)	3,823 (—3)	1,391 (—3)
6,386 (—2)	2,735 (—2)	1,211 (—2)	5,480 (—3)
1,175 (—1)	5,983 (—2)	3,157 (—2)	1,705 (—2)
2,014 (—1)	1,184 (—1)	7,231 (—2)	4,528 (—2)
3,363 (—1)	2,233 (—1)	1,543 (—1)	1,096 (—1)
4,403 (—7)	3,865 (—9)	3,484 (—11)	3,196 (—13)
3,506 (—6)	6,159 (—8)	1,111 (—9)	2,039 (—11)
1,182 (—5)	3,115 (—7)	8,430 (—9)	2,321 (—10)
2,805 (—5)	9,859 (—7)	3,557 (—8)	1,306 (—9)
5,477 (—5)	2,407 (—6)	1,085 (—7)	4,981 (—9)
9,451 (—5)	4,983 (—6)	2,697 (—7)	1,485 (—8)
1,501 (—4)	9,235 (—6)	5,831 (—7)	3,746 (—8)
2,247 (—4)	1,579 (—5)	1,139 (—6)	8,366 (—8)
3,206 (—4)	2,534 (—5)	2,057 (—6)	1,698 (—7)
4,400 (—4)	3,863 (—5)	3,483 (—6)	3,195 (—7)
3,617 (—3)	6,320 (—4)	1,136 (—4)	2,079 (—5)
1,270 (—2)	3,307 (—3)	8,871 (—4)	2,427 (—4)
3,162 (—2)	1,089 (—2)	3,873 (—3)	1,407 (—3)
6,508 (—2)	2,778 (—2)	1,227 (—2)	5,543 (—3)
1,199 (—1)	6,085 (—2)	3,203 (—2)	1,727 (—2)
2,055 (—1)	1,204 (—1)	7,335 (—2)	4,585 (—2)
3,422 (—1)	2,265 (—1)	1,562 (—1)	1,107 (—1)
4,403 (—7)	3,865 (—9)	3,483 (—11)	3,195 (—13)
3,525 (—6)	6,188 (—8)	1,116 (—9)	2,047 (—11)
1,188 (—5)	3,128 (—7)	8,461 (—9)	2,329 (—10)
2,809 (—5)	9,867 (—7)	3,558 (—8)	1,306 (—9)
5,491 (—5)	2,411 (—6)	1,087 (—7)	4,985 (—9)
9,516 (—5)	5,012 (—6)	2,711 (—7)	1,492 (—8)
1,513 (—4)	9,296 (—6)	5,865 (—7)	3,766 (—8)
2,258 (—4)	1,585 (—5)	1,143 (—6)	8,386 (—8)
3,221 (—4)	2,543 (—5)	2,062 (—6)	1,702 (—7)
4,435 (—4)	3,889 (—5)	3,503 (—6)	3,211 (—7)
3,663 (—3)	6,388 (—4)	1,146 (—4)	2,095 (—5)
1,298 (—2)	3,367 (—3)	9,010 (—4)	2,460 (—4)
3,240 (—2)	1,111 (—2)	3,938 (—3)	1,427 (—3)
6,734 (—2)	2,858 (—2)	1,257 (—2)	5,663 (—3)

$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{l}{h}$	0	1	2
	0,6	2,078	6,307 (—1)	2,633 (—1)
	0,7	2,398	8,246 (—1)	3,937 (—1)
	0,8	2,808	1,082	5,806 (—1)
1,75	0,01	1,115	6,800 (—3)	5,239 (—5)
	0,02	1,113	1,360 (—2)	2,096 (—4)
	0,03	1,115	2,043 (—2)	4,725 (—4)
	0,04	1,114	2,723 (—2)	8,395 (—4)
	0,05	1,116	3,408 (—2)	1,313 (—3)
	0,06	1,117	4,090 (—2)	1,890 (—3)
	0,07	1,124	4,795 (—2)	2,584 (—3)
	0,08	1,130	5,499 (—2)	3,383 (—3)
	0,09	1,134	6,198 (—2)	4,286 (—3)
	0,1	1,141	6,914 (—2)	5,307 (—3)
	0,2	1,260	1,478 (—1)	2,232 (—2)
	0,3	1,430	2,414 (—1)	5,352 (—2)
	0,4	1,646	3,545 (—1)	1,024 (—1)
	0,5	1,918	4,944 (—1)	1,741 (—1)
	0,6	2,235	6,647 (—1)	2,742 (—1)
	0,7	2,603	8,750 (—1)	4,122 (—1)
	0,8	3,018	1,138	6,032 (—1)
1,5	0,01	1,119	6,821 (—3)	5,253 (—5)
	0,02	1,115	1,361 (—2)	2,096 (—4)
	0,03	1,116	2,042 (—2)	4,718 (—4)
	0,04	1,119	2,730 (—2)	8,408 (—4)
	0,05	1,125	3,427 (—2)	1,319 (—3)
	0,06	1,129	4,119 (—2)	1,901 (—3)
	0,07	1,132	4,812 (—2)	2,588 (—3)
	0,08	1,139	5,523 (—2)	3,392 (—3)
	0,09	1,149	6,255 (—2)	4,317 (—3)
	0,1	1,158	6,986 (—2)	5,350 (—3)
	0,2	1,290	1,502 (—1)	2,259 (—2)
	0,3	1,488	2,481 (—1)	5,464 (—2)
	0,4	1,748	3,699 (—1)	1,057 (—1)
	0,5	2,084	5,252 (—1)	1,824 (—1)
	0,6	2,490	7,201 (—1)	2,920 (—1)
	0,7	2,964	9,643 (—1)	4,452 (—1)
	0,8	3,478	1,265	6,557 (—1)
1,25	0,01	1,120	6,826 (—3)	5,255 (—5)
	0,02	1,121	1,366 (—2)	2,103 (—4)
	0,03	1,124	2,054 (—2)	4,742 (—4)
	0,04	1,125	2,738 (—2)	8,424 (—4)
	0,05	1,130	3,433 (—2)	1,319 (—3)
	0,06	1,139	4,142 (—2)	1,909 (—3)
	0,07	1,144	4,845 (—2)	2,602 (—3)
	0,08	1,151	5,561 (—2)	3,409 (—3)
	0,09	1,163	6,300 (—2)	4,339 (—3)
	0,1	1,172	7,037 (—2)	5,377 (—3)
	0,2	1,327	1,530 (—1)	2,290 (—2)

n			
3	4	5	6
1,245 (—1)	6,275 (—2)	3,287 (—2)	1,766 (—2)
2,140 (—1)	1,246 (—1)	7,550 (—2)	4,702 (—2)
3,559 (—1)	2,340 (—1)	1,607 (—1)	1,135 (—1)
4,399 (—7)	3,861 (—9)	3,480 (—11)	3,192 (—13)
3,522 (—6)	6,182 (—8)	1,114 (—9)	2,045 (—11)
1,191 (—5)	3,135 (—7)	8,478 (—9)	2,333 (—10)
2,821 (—5)	9,903 (—7)	3,570 (—8)	1,310 (—9)
5,513 (—5)	2,419 (—6)	1,090 (—7)	5,000 (—9)
9,523 (—5)	5,014 (—6)	2,711 (—7)	1,492 (—8)
1,518 (—4)	9,320 (—6)	5,877 (—7)	3,773 (—8)
2,270 (—4)	1,593 (—5)	1,148 (—6)	8,418 (—8)
3,234 (—4)	2,552 (—5)	2,068 (—6)	1,706 (—7)
4,446 (—4)	3,896 (—5)	3,507 (—6)	3,215 (—7)
3,704 (—3)	6,448 (— 4)	1,156 (—4)	2,111 (—5)
1,315 (—2)	3,404 (—3)	9,094 (—4)	2,480 (—4)
3,304 (—2)	1,129 (—2)	3,993 (—3)	1,444 (—3)
6,913 (—2)	2,922 (—2)	1,281 (—2)	5,757 (—3)
1,286 (—1)	6,450 (—2)	3,366 (—2)	1,803 (—2)
2,222 (—1)	1,285 (—1)	7,755 (—2)	4,813 (—2)
3,668 (—1)	2,399 (—1)	1,640 (—1)	1,155 (—1)
4,410 (—7)	3,870 (—9)	3,487 (—11)	3,199 (—13)
3,520 (—6)	6,179 (—8)	1,114 (—9)	2,043 (—11)
1,188 (—5)	3,129 (—7)	8,459 (—9)	2,328 (—10)
2,823 (—5)	9,910 (—7)	3,572 (—8)	1,310 (—9)
5,533 (—5)	2,427 (—6)	1,093 (—7)	5,012 (—9)
9,568 (—5)	5,034 (—6)	2,721 (—7)	1,497 (—8)
1,519 (—4)	9,324 (—6)	5,878 (—7)	3,772 (—8)
2,274 (—4)	1,594 (—5)	1,148 (—6)	8,421 (—8)
3,253 (—4)	2,565 (—5)	2,077 (—6)	1,713 (—7)
4,476 (—4)	3,919 (—5)	3,526 (—6)	3,230 (—7)
3,739 (—3)	6,499 (—4)	1,163 (—4)	2,123 (—5)
1,337 (—2)	3,452 (—3)	9,202 (—4)	2,506 (—4)
3,392 (—2)	1,154 (—2)	4,070 (—3)	1,468 (—3)
7,184 (—2)	3,017 (—2)	1,317 (—2)	5,899 (—3)
1,355 (—1)	6,737 (—2)	3,495 (—2)	1,864 (—2)
2,367 (—1)	1,356 (—1)	8,122 (—2)	5,013 (—2)
3,928 (—1)	2,542 (—1)	1,724 (—1)	1,207 (—1)
4,412 (—7)	3,871 (—9)	3,488 (—11)	3,199 (—13)
3,530 (—6)	6,194 (—8)	1,116 (—9)	2,048 (—11)
1,194 (—5)	3,141 (—7)	8,491 (—9)	2,336 (—10)
2,827 (—5)	9,919 (—7)	3,574 (—8)	1,311 (—9)
5,533 (—5)	2,426 (—6)	1,092 (—7)	5,008 (—9)
9,598 (—5)	5,048 (—6)	2,727 (—7)	1,500 (—8)
1,526 (—4)	9,357 (—6)	5,896 (—7)	3,783 (—8)
2,283 (—4)	1,599 (—5)	1,151 (—6)	8,440 (—8)
3,266 (—4)	2,573 (—5)	2,083 (—6)	1,717 (—7)
4,493 (—4)	3,930 (—5)	3,534 (—6)	3,236 (—7)
3,780 (—3)	6,559 (—4)	1,172 (—4)	2,138 (—5)

$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{l}{h}$	0	1	2
1,25	0,3	1,563	2,568 (—1)	5,610 (—2)
	0,4	1,893	3,920 (—1)	1,106 (—1)
	0,5	2,349	5,745 (—1)	1,959 (—1)
	0,6	2,958	8,226 (—1)	3,251 (—1)
	0,7	3,723	1,153	5,152 (—1)
	0,8	4,633	1,586	7,893 (—1)

нагрузка $p(x) = (x/h)^n$ ($n = 0, 1, \ldots, 6$), где x — радиальная координата, отсчитываемая от внутренней окружности. Круговые границы свободны от нагрузки (рис. 4.45). Значения КИН, полученные модифицированным методом конформных отображений и коллокаций [66], представлены в табл. 4.25 (в скобках приведены показатели степени множителя



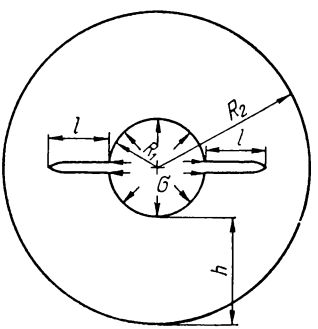


Рис. 4.45. Круговое кольцо с двумя внутренними краевыми радиальными трещинами, симметрично нагруженными переменным давлением.

Рис. 4.46. Круговое кольцо с двумя внутренними краевыми радиальными трещинами при действии давления на внутренней круговой границе.

10). Эти результаты могут быть использованы при вычислении КИН в случае произвольной нагрузки $p(x)$ (см. п. 4.4).

Аналогичные данные для КИН приведены в работах [67] (при $R_2/R_1 = 2$) и [81] (при $R_2/R_1 = 3$). Изучался также случай постоянной нагрузки на трещинах ($n = 0$) [68].

В случае, когда берега трещин и внешняя круговая граница свободны от нагрузки, а внутренняя граничная окружность находится под действием постоянного давления (рис. 4.46), зависимости КИН от параметра l/h, взятые из работы [9], приведены на рис. 4.47. Данные по КИН имеются также в работах [70, 71, 81, 82].

Пусть на внутренней круговой границе в концах диаметра, перпендикулярного линии трещин, приложены две равные и противоположно

n			
3	4	5	6
1,366 (—2)	3,513 (—3)	9,343 (—4)	2,539 (—4)
3,519 (—2)	1,191 (—2)	4,180 (—3)	1,503 (—3)
7,618 (—2)	3,171 (—2)	1,375 (—2)	6,128 (—3)
1,481 (—1)	7,273 (—2)	3,736 (—2)	1,977 (—2)
2,676 (—1)	1,507 (—1)	8,909 (—2)	5,442 (—2)
4,592 (—1)	2,908 (—1)	1,940 (—1)	1,340 (—1)

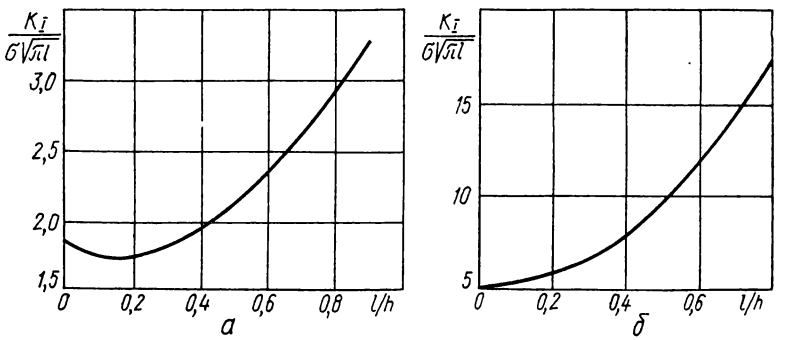


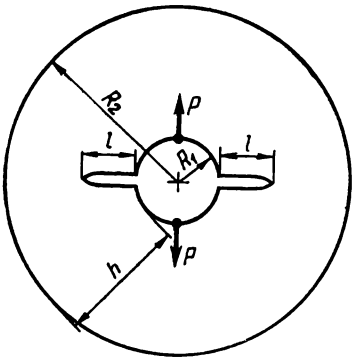
Рис. 4.47. Зависимость КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$ от отношения l/h для кругового кольца с двумя внутренними краевыми радиальными трещинами при действии давления на внутренней круговой границе для $R_1/R_2 = 0{,}5$ (*а*) и $R_1/R_2 = 0{,}8$ (*б*) [9].

Таблица 4.26. **Значения КИН $K_I/(P/\sqrt{l})$ для кругового кольца с двумя краевыми радиальными трещинами при действии растягивающих сосредоточенных сил на внутренней круговой границе [71]**

$\frac{l}{h}$	R_2/R_1				
	2	4	10	15	20
0,1	0,526	0,408	0,468	0,499	0,516
0,2	0,965	0,661	0,620	0,618	0,618
0,3	1,402	0,888	0,759	0,740	0,732
0,4	1,867	1,126	0,922	0,890	0,876
0,5	2,375	1,392	1,121	1,077	1,058
0,6	2,923	1,700	1,367	1,313	1,288
0,7	3,498	2,070	1,682	1,617	1,587
0,8	4,090	2,561	2,123	2,048	2,012

направленные силы P, а остальная часть границы кольца и берега трещин свободны от нагрузки (рис. 4.48). Значения КИН, полученные методом СИУ [71], приведены в табл. 4.26. Данные по КИН имеются также в работе [72].

Пусть на внешней границе кольца в концах диаметра, на котором расположены трещины, действуют две сжимающие сосредоточенные силы, а остальная граница и берега трещин свободны от нагрузки (рис. 4.49).



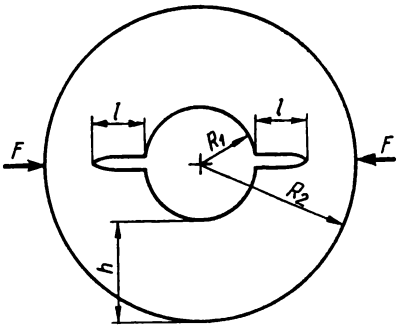


Рис. 4.48. Круговое кольцо с двумя внутренними краевыми радиальными трещинами при действии растягивающих сосредоточенных сил на внутренней круговой границе.

Рис. 4.49. Круговое кольцо с двумя внутренними краевыми радиальными трещинами при действии сжимающих сил на внешней границе.

Таблица 4.27. **Значения КИН $K_I/(F/\sqrt{\pi R_1})$ для кругового кольца с двумя внутренними краевыми радиальными трещинами при действии сжимающих сил на внешней границе [76, 77]**

$\frac{l}{h}$	R_2/R_1			$\frac{l}{h}$	R_2/R_1		
	2	3	4		2	3	4
0,1	2,750	1,150	0,705	0,5	4,649	1,679	1,014
0,2	3,349	1,288	0,754	0,6	5,067	1,849	1,146
0,3	3,792	1,397	0,816	0,7	5,499	2,042	1,308
0,4	4,223	1,529	0,904	0,8	6,292	2,306	1,536

Значения КИН, полученные методом СИУ [76, 77], приведены в табл. 4.27. Данные по КИН имеются также в работах [68, 72]. В работе [83] исследовано влияние малого кругового отверстия на КИН в дисковом образце с центральной трещиной для испытаний на сжатие. Такое отверстие в центре образца выполняется из технологических соображений для выведения трещины. Оказалось, что при рассматриваемой схеме нагружения образца наличие малого отверстия в центре диска существенно влияет на значение КИН. Запишем безразмерный КИН $Y_I = K_I\sqrt{\pi R_2}/F$ в виде суммы

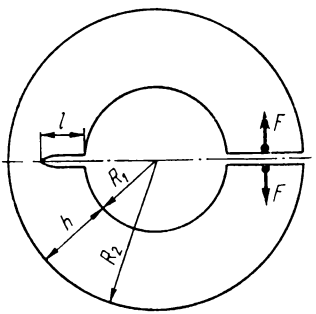
$$Y_I = Y_0(\lambda) + f(\lambda, \varepsilon) \quad (\lambda = (l + R_1)/R_2,\ \varepsilon = R_1/R_2), \qquad (4.16)$$

где $Y_0(\lambda)$ — безразмерный КИН для кругового диска с центральной трещиной, а $f(\lambda, \varepsilon)$ — поправочная функция, учитывающая наличие отверстия. Для $f(\lambda, \varepsilon)$ построена аппроксимационная формула [83]

$$f(\lambda, \varepsilon) = \begin{cases} (4{,}199 + 6{,}852\lambda)\,\varepsilon^2 - (0{,}836 + 0{,}191\lambda)\,\varepsilon & (0{,}4 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}6), \\ (4{,}602 + 6{,}189\lambda)\,\varepsilon^2 - (0{,}858 + 0{,}196\lambda)\,\varepsilon & (0{,}3 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5). \end{cases} \quad (4.17)$$

В качестве Y_0 можно взять выражения [17]

$$Y_0 = \sqrt{\pi/2} \begin{cases} 0{,}3714\,(1 - 0{,}229\lambda + 4{,}887\lambda^2) & (0{,}4 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}6), \\ 0{,}2473\,(1 + 1{,}913\lambda + 4{,}82\lambda^2) & (0{,}3 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5). \end{cases} \quad (4.18)$$



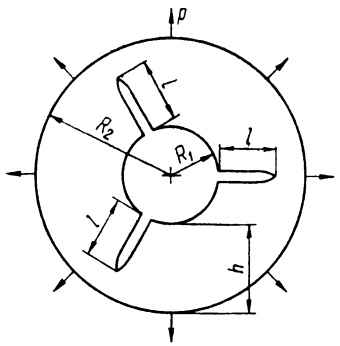


Рис. 4.50. Схема разрезанного кольцевого образца с краевой радиальной трещиной.

Рис. 4.51. Круговое кольцо с системой циклически размещенных внутренних краевых радиальных трещин при действии постоянных растягивающих усилий на внешней границе.

Таблица 4.28. Значения КИН $K_1/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ ($\sigma_0 = 2R_1^2 p/(R_2^2 - R_1^2)$) для кругового кольца с n циклически размещенными радиальными трещинами, выходящими на внутреннюю границу, при действии постоянных растягивающих усилий на внешней границе [85]

$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{l}{h}$	n			
		1	2	3	4
3	0,1	0,941	0,974	0,954	0,932
	0,2	0,871	0,974	0,904	0,854
	0,3	0,841	1,01	0,907	0,827
	0,4	0,836	1,08	0,937	0,837
	0,5	0,847	1,18	1,07	0,908
2	0,1	1,05	1,06	...	1,03
	0,2	1,04	1,11	...	1,03
	0,3	1,08	1,21	...	1,04
	0,4	1,12	1,33	...	1,12
	0,5	1,18	1,50	...	1,31

Относительная погрешность формулы (4.16), в которой функции $f(\lambda, \varepsilon)$ и $Y_0(\lambda)$ даются соотношениями (4.17) и (4.18), не превышает 0,25 % для $0{,}4 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}6$ и 0,6 % в случае $0{,}3 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5$.

Разрезанный кольцевой образец с краевой радиальной трещиной. Пусть в круговом кольце имеется внутренняя краевая радиальная тре-

Таблица 4.29. **Значения КИН $K_I/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ $(\sigma_0 = (\rho\omega^2/4)\,[(3 + \mu)\,R_2^2 + (1 - \mu)\,R_1^2]$, ρ — плотность материала) при вращении кругового кольца с n циклически размещенными радиальными трещинами, выходящими на внутреннюю границу, для $\mu = 0{,}3$ (плоское напряженное состояние) [79]**

$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{l}{h}$	n			
		1	2	3	4
3	0,1	0,938	0,975	0,947	0,926
	0,2	0,858	0,954	0,889	0,836
	0,3	0,818	0,980	0,880	0,801
	0,4	0,798	1,03	0,895	0,799
	0,5	0,796	1,11	0,943	0,833
	0,6	0,810	1,21	...	0,905
	0,7	0,842	1,34	...	1,02
2	0,1	1,04	1,06	1,04	1,03
	0,2	1,03	1,10	1,05	1,00
	0,3	1,04	1,18	1,09	1,01
	0,4	1,08	1,29	1,15	1,04
	0,5	1,11	1,43	1,24	1,09
	0,6	1,16	1,59	1,35	1,20
	0,7	1,21	1,77	1,46	1,31

щина и коллинеарный ей радиальный разрез, соединяющий внутреннюю и внешнюю границы кольца. В центре берегов разреза приложены нормальные растягивающие силы, остальная граница кольца и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.50). Задача решена методом граничных коллокаций в работе [84]. На основе полученных численных результатов для КИН построена аппроксимационная формула

$$K_I = (F/(t\sqrt{h}))\,[(1 + \varepsilon)/(1 - \varepsilon)]^{3/2}\,Y(\lambda),$$

где

$$Y(\lambda) = \begin{cases} 3{,}58\lambda^{0{,}45} & (0 < \lambda \leqslant 0{,}369), \\ 11{,}18\lambda^{1{,}57} & (0{,}369 < \lambda \leqslant 0{,}54), \end{cases}$$

t — толщина образца; $\varepsilon = R_1/R_2$; $\lambda = l/h$. В указанных интервалах относительных длин трещин погрешность этой формулы не превышает 1 %.

Система циклически размещенных краевых радиальных трещин. Пусть на внутреннюю границу кругового кольца выходит n циклически раз-

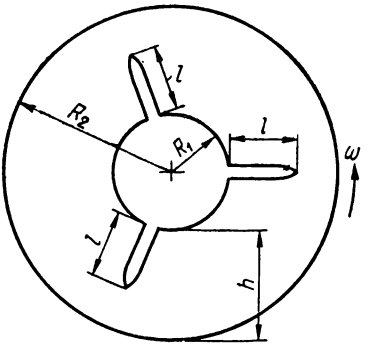


Рис. 4.52. Вращение кругового кольца с системой циклически размещенных внутренних краевых радиальных трещин.

мещенных радиальных трещин равной длины. Берега трещин и внутренняя граница свободны от нагрузки, а на внешней граничной окружности действуют постоянные растягивающие напряжения (рис. 4.51). Значения КИН, полученные модифицированным методом конформных отображений и коллокаций [85], приведены в табл. 4.28. В случае двух трещин данные по КИН имеются также в работах [68, 81]. При действии давления на внутренней граничной окружности аналогичные результаты приведены в работах [70, 82, 86].

Пусть круговое кольцо равномерно вращается вокруг своего центра с угловой скоростью ω. Берега трещин и граница кольца свободны от нагрузки (рис. 4.52). Значения КИН, полученные модифицированным методом конформных отображений и коллокаций [79], приведены в табл. 4.29. В случае двух трещин данные по КИН имеются также в работе [87].

4.6. Круговое кольцо с наружной краевой радиальной трещиной

Действие нагрузки на берегах трещины. Пусть граничные окружности свободны от нагрузки, а на берегах радиальной трещины задана симметричная нормальная нагрузка $p(x) = (x/h)^n$ $(n = 0, 1, \ldots, 6)$, где x — радиальная координата, отсчитываемая от наружной окружности (рис. 4.53). Значения КИН, полученные модифицированным методом конформных отображений и коллокаций [66], представлены в табл. 4.30 (в скобках приведены показатели степени множителя 10). Приведенные результаты могут быть использованы при вычислении КИН, когда на берегах трещины действует произвольная нормальная нагрузка $p(x)$ (см. п. 4.4).

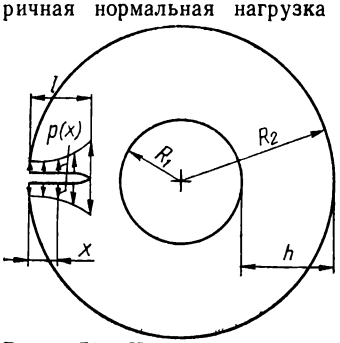


Рис. 4.53. Круговое кольцо с наружной краевой радиальной трещиной, нагруженной переменным давлением.

Действие постоянного давления на внутренней границе. Пусть берега трещины и внешняя граница свободны от нагрузки, а внутренняя граничная окружность находится под действием постоянного давления (рис. 4.54). Значения КИН, полученные методом СИУ [69], приведены в табл. 4.31. Данные по КИН имеются также в работе [88].

Вращение кругового кольца вокруг своей оси. Пусть круговое кольцо равномерно вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Берега

Таблица 4.30. Значения КИН $K_1/\sqrt{\pi l}$ для кругового кольца с $p(x) = (x/h)^n$ [66]

$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{l}{h}$	0	1	2
3,0	0,01	1,129	6,862 (—3)	5,277 (—5)
	0,02	1,137	1,379 (—2)	2,119 (—4)
	0,03	1,140	2,071 (—2)	4,769 (—4)
	0,04	1,144	2,766 (—2)	8,485 (—4)
	0,05	1,152	3,476 (—2)	1,331 (—3)
	0,06	1,162	4,197 (—2)	1,927 (—3)
	0,07	1,168	4,912 (—2)	2,629 (—3)
	0,08	1,173	5,624 (—2)	3,436 (—3)
	0,09	1,181	6,354 (—2)	4,362 (—3)
	0,1	1,191	7,106 (—2)	5,414 (—3)
	0,2	1,280	1,490 (—1)	2,242 (—2)
	0,3	1,388	2,358 (—1)	5,250 (—2)
	0,4	1,518	3,343 (—1)	9,774 (—2)
	0,5	1,683	4,496 (—1)	1,616 (—1)
	0,6	1,877	5,833 (—1)	2,472 (—1)
	0,7	2,147	7,538 (—1)	3,653 (—1)
	0,8	2,561	9,935 (—1)	5,376 (—1)
2,5	0,01	1,128	6,860 (—3)	5,275 (—5)
	0,02	1,136	1,378 (—2)	2,118 (—4)
	0,03	1,139	2,070 (—2)	4,767 (—4)
	0,04	1,142	2,763 (—2)	8,479 (—4)
	0,05	1,151	3,472 (—2)	1,330 (—3)
	0,06	1,160	4,192 (—2)	1,925 (—3)
	0,07	1,166	4,906 (—2)	2,626 (—3)
	0,08	1,171	5,617 (—2)	3,433 (—3)
	0,09	1,178	6,346 (—2)	4,359 (—3)
	0,1	1,189	7,098 (—2)	5,410 (—3)
	0,2	1,278	1,488 (—1)	2,240 (—2)
	0,3	1,398	2,371 (—1)	5,274 (—2)
	0,4	1,542	3,382 (—1)	9,867 (—2)
	0,5	1,715	4,556 (—1)	1,633 (—1)
	0,6	1,930	5,956 (—1)	2,514 (—1)
	0,7	2,213	7,713 (—1)	3,721 (—1)
	0,8	2,637	1,017	5,486 (—1)
2,0	0,01	1,127	6,857 (—3)	5,274 (—5)
	0,02	1,134	1,377 (—2)	2,117 (—4)
	0,03	1,137	2,067 (—2)	4,763 (—4)
	0,04	1,140	2,760 (—2)	4,472 (—4)
	0,05	1,148	3,467 (—2)	1,329 (—3)
	0,06	1,157	4,186 (—2)	1,923 (—3)
	0,07	1,163	4,899 (—2)	2,623 (—3)
	0,08	1,168	5,609 (—2)	3,429 (—3)
	0,09	1,176	6,338 (—2)	4,355 (—3)
	0,1	1,187	7,090 (—2)	5,406 (—3)
	0,2	1,282	1,491 (—1)	2,242 (—2)
	0,3	1,418	2,395 (—1)	5,316 (—2)
	0,4	1,581	3,439 (—1)	9,991 (—2)

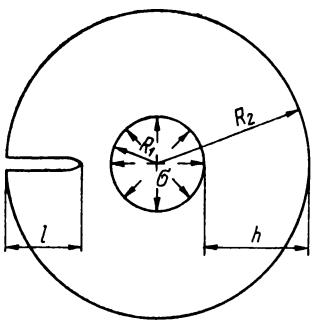
n			
3	4	5	6
4,426 (—7)	3,882 (—9)	3,497 (—11)	3,207 (—13)
3,553 (—6)	6,230 (—8)	1,122 (—9)	2,057 (—11)
1,199 (—5)	3,152 (—7)	8,515 (—9)	2,342 (—10)
2,843 (—5)	9,962 (—7)	3,587 (—8)	1,315 (—9)
5,572 (—5)	2,440 (—6)	1,098 (—7)	5,030 (—9)
9,671 (—5)	5,079 (—6)	2,742 (—7)	1,507 (—8)
1,538 (—4)	9,421 (—6)	5,931 (—7)	3,803 (—8)
2,297 (—4)	1,607 (—5)	1,156 (—6)	8,469 (—8)
3,278 (—4)	2,580 (—5)	2,087 (—6)	1,719 (—7)
4,517 (—4)	3,948 (—5)	3,547 (—6)	3,247 (—7)
3,714 (—3)	6,460 (—4)	1,157 (—4)	2,112 (—5)
1,294 (—2)	3,356 (—3)	8,980 (—4)	2,452 (—4)
3,181 (—2)	1,094 (—2)	3,884 (—3)	1,409 (—3)
6,507 (—2)	2,776 (—2)	1,226 (—2)	5,539 (—3)
1,181 (—1)	5,996 (—2)	3,159 (—2)	1,705 (—2)
2,008 (—1)	1,178 (—1)	7,189 (—2)	4,500 (—2)
3,321 (—1)	2,199 (—1)	1,518 (—1)	1,078 (—1)
4,426 (—7)	3,881 (—9)	3,497 (—11)	3,206 (—13)
3,552 (—6)	6,228 (—8)	1,122 (—9)	2,057 (—11)
1,199 (—5)	3,151 (—7)	8,513 (—9)	2,241 (—10)
2,841 (—5)	9,958 (—7)	3,586 (—8)	1,315 (—9)
5,569 (—5)	2,439 (—6)	1,097 (—7)	5,028 (—9)
9,665 (—5)	5,077 (—6)	2,740 (—7)	1,506 (—8)
1,537 (—4)	9,416 (—6)	5,928 (—7)	3,801 (—8)
2,295 (—4)	1,606 (—5)	1,155 (—6)	8,465 (—8)
3,276 (—4)	2,578 (—5)	2,086 (—6)	1,719 (—7)
4,514 (—4)	3,946 (—5)	3,546 (—6)	3,245 (—7)
3,710 (—3)	6,453 (—4)	1,156 (—4)	2,110 (—5)
1,299 (—2)	3,368 (—3)	9,009 (—4)	2,459 (—4)
3,207 (—2)	1,101 (—2)	3,909 (—3)	1,418 (—3)
6,561 (—2)	2,795 (—2)	1,233 (—2)	5,568 (—3)
1,197 (—1)	6,070 (—2)	3,193 (—2)	1,722 (—2)
2,039 (—1)	1,194 (—1)	7,275 (—2)	4,549 (—2)
3,380 (—1)	2,233 (—1)	1,540 (—1)	1,091 (—1)
4,425 (—7)	3,881 (—9)	3,496 (—11)	3,206 (—13)
3,551 (—6)	6,226 (—8)	1,122 (—9)	2,057 (—11)
1,198 (—5)	3,150 (—7)	8,509 (—9)	2,340 (—10)
2,839 (—5)	9,952 (—7)	3,584 (—8)	1,314 (—9)
5,565 (—5)	2,437 (—6)	1,097 (—7)	5,026 (—9)
9,657 (—5)	5,073 (—6)	2,739 (—7)	1,506 (—8)
1,536 (—4)	9,410 (—6)	5,925 (—7)	3,799 (—8)
2,293 (—4)	1,605 (—5)	1,155 (—6)	8,461 (—8)
3,274 (—4)	2,577 (—5)	2,085 (—6)	1,718 (—7)
4,512 (—4)	3,944 (—5)	3,544 (—6)	3,244 (—7)
3,713 (—3)	6,456 (—4)	1,156 (—4)	2,110 (—5)
1,307 (—2)	3,386 (—3)	9,050 (—4)	2,469 (—4)
3,239 (—2)	1,110 (—2)	3,935 (—3)	1,425 (—3)

$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{l}{h}$	0	1	2
	0,5	1,787	4,691 (—1)	1,670 (—1)
	0,6	2,033	6,185 (—1)	2,589 (—1)
	0,7	2,345	8,053 (—1)	3,850 (—1)
	0,8	2,606	1,012	5,469 (—1)
1,75	0,01	1,127	6,854 (—3)	5,273 (—5)
	0,02	1,133	1,377 (—2)	2,116 (—4)
	0,03	1,135	2,066 (—2)	4,761 (—4)
	0,04	1,139	2,758 (—2)	8,467 (—4)
	0,05	1,146	3,464 (—2)	1,328 (—3)
	0,06	1,156	4,182 (—2)	1,922 (—3)
	0,07	1,162	4,895 (—2)	2,622 (—3)
	0,08	1,167	5,605 (—2)	3,428 (—3)
	0,09	1,175	6,335 (—2)	4,353 (—3)
	0,1	1,186	7,087 (—2)	5,405 (—3)
	0,2	1,293	1,501 (—1)	2,255 (—2)
	0,3	1,438	2,417 (—1)	5,352 (—2)
	0,4	1,628	3,514 (—1)	1,016 (—1)
	0,5	1,852	4,810 (—1)	1,702 (—1)
	0,6	2,134	6,408 (—1)	2,661 (—1)
	0,7	2,478	8,391 (—1)	3,977 (—1)
	0,8	3,107	1,154	6,074 (—1)
1,5	0,01	1,126	6,852 (—3)	5,271 (—5)
	0,02	1,132	1,376 (—2)	2,115 (—4)
	0,03	1,134	2,064 (—2)	4,758 (—4)
	0,04	1,137	2,755 (—2)	8,461 (—4)
	0,05	1,145	3,461 (—2)	1,327 (—3)
	0,06	1,154	4,178 (—2)	1,921 (—3)
	0,07	1,160	4,891 (—2)	2,620 (—3)
	0,08	1,165	5,601 (—2)	3,426 (—3)
	0,09	1,174	6,333 (—2)	4,353 (—3)
	0,1	1,186	7,088 (—2)	5,405 (—3)
	0,2	1,305	1,511 (—1)	2,267 (—2)
	0,3	1,473	2,460 (—1)	5,424 (—2)
	0,4	1,700	3,624 (—1)	1,041 (—1)
	0,5	1,975	5,042 (—1)	1,766 (—1)
	0,6	2,327	6,833 (—1)	2,799 (—1)
	0,7	2,702	8,959 (—1)	4,190 (—1)
	0,8	3,240	1,192	6,233 (—1)
1,25	0,01	1,125	6,848 (—3)	5,269 (—5)
	0,02	1,130	1,374 (—2)	2,114 (—4)
	0,03	1,132	2,062 (—2)	4,754 (—4)
	0,04	1,134	2,752 (—2)	8,453 (—4)
	0,05	1,143	3,457 (—2)	1,326 (—3)
	0,06	1,152	4,174 (—2)	1,920 (—3)
	0,07	1,159	4,887 (—2)	2,619 (—3)
	0,08	1,165	5,600 (—2)	3,426 (—3)
	0,09	1,174	6,336 (—2)	4,354 (—3)
	0,1	1,187	7,094 (—2)	5,409 (—3)

Продолжение табл. 4.30

n			
3	4	5	6
6,681 (—2)	2,838 (—2)	1,250 (—2)	5,632 (—3)
1,226 (—1)	6,193 (—2)	3,249 (—2)	1,748 (—2)
2,098 (—1)	1,223 (—1)	7,426 (—2)	4,632 (—2)
3,373 (—1)	2,230 (—1)	1,537 (—1)	1,090 (—1)
4,424 (—7)	3,880 (—9)	3,496 (—11)	3,206 (—13)
3,549 (—6)	6,225 (—8)	1,121 (—9)	2,056 (—11)
1,197 (—5)	3,149 (—7)	8,507 (—9)	2,340 (—10)
2,838 (—5)	9,949 (—7)	3,583 (—8)	1,314 (—9)
5,562 (—5)	2,436 (—6)	1,096 (—7)	5,024 (—9)
9,652 (—5)	5,071 (—6)	2,738 (—7)	1,505 (—8)
1,535 (—4)	9,406 (—6)	5,923 (—7)	3,798 (—8)
2,292 (—4)	1,605 (—5)	1,155 (—6)	8,460 (—8)
3,273 (—4)	2,576 (—5)	2,085 (—6)	1,718 (—7)
4,511 (—4)	3,943 (—5)	3,544 (—6)	3,244 (—7)
3,732 (—3)	6,487 (—4)	1,161 (—4)	2,119 (—5)
1,314 (—2)	3,400 (—3)	9,082 (—4)	2,477 (—4)
3,284 (—2)	1,124 (—2)	3,977 (—3)	1,439 (—3)
6,782 (—2)	2,873 (—2)	1,262 (—2)	5,681 (—3)
1,254 (—1)	6,310 (—2)	3,302 (—2)	1,773 (—2)
2,154 (—1)	1,251 (—1)	7,572 (—2)	4,712 (—2)
3,681 (—1)	2,403 (—1)	1,642 (—1)	1,155 (—1)
4,423 (—7)	3,879 (—9)	3,495 (—11)	3,205 (—13)
3,548 (—6)	6,223 (—8)	1,121 (—9)	2,056 (—11)
1,197 (—5)	3,147 (—7)	8,504 (—9)	2,339 (—10)
2,836 (—5)	9,944 (—7)	3,582 (—8)	1,313 (—9)
5,559 (—5)	2,435 (—6)	1,096 (—7)	5,023 (—9)
9,647 (—5)	5,069 (—6)	2,737 (—7)	1,505 (—8)
1,535 (—4)	9,403 (—6)	5,922 (—7)	3,797 (—8)
2,292 (—4)	1,604 (—5)	1,154 (—6)	8,458 (—8)
3,273 (—4)	2,576 (—5)	2,085 (—6)	1,718 (—7)
4,512 (—4)	3,944 (—5)	3,544 (—6)	3,245 (—7)
3,747 (—3)	6,509 (—4)	1,165 (—4)	2,125 (—5)
4,328 (—2)	3,431 (—3)	9,153 (—4)	2,494 (—4)
3,349 (—2)	1,142 (—2)	4,033 (—3)	1,457 (—3)
6,989 (—2)	2,947 (—2)	1,290 (—2)	5,792 (—3)
1,307 (—1)	6,535 (—2)	3,403 (—2)	1,821 (—2)
2,249 (—1)	1,297 (—1)	7,815 (—2)	4,844 (—2)
3,759 (—1)	2,446 (—1)	1,666 (—1)	1,170 (—1)
4,421 (—7)	3,878 (—9)	3,494 (—11)	3,204 (—13)
3,546 (—6)	6,220 (—8)	1,121 (—9)	2,055 (—11)
1,196 (—5)	3,146 (—7)	8,500 (—9)	2,338 (—10)
2,834 (—5)	9,939 (—7)	3,580 (—8)	1,313 (—9)
5,556 (—5)	2,434 (—6)	1,096 (—7)	5,021 (—9)
9,643 (—5)	5,067 (—6)	2,736 (—7)	1,504 (—8)
1,534 (—4)	9,401 (—6)	5,920 (—7)	3,797 (—8)
2,292 (—4)	1,604 (—5)	1,154 (—6)	8,458 (—8)
3,274 (—4)	2,577 (—5)	2,085 (—6)	1,718 (—7)
4,515 (—4)	3,946 (—5)	3,546 (—6)	3,246 (—7)

$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{l}{h}$	0	1	2
1,25	0,2	1,327	1,528 (—1)	2,287 (—2)
	0,3	1,536	2,533 (—1)	5,546 (—2)
	0,4	1,833	3,828 (—1)	1,086 (—1)
	0,5	2,219	5,499 (—1)	1,891 (—1)
	0,6	2,729	7,720 (—1)	3,087 (—1)
	0,7	2,829	9,277 (—1)	4,309 (—1)
	0,8	4,007	1,408	7,140 (—1)



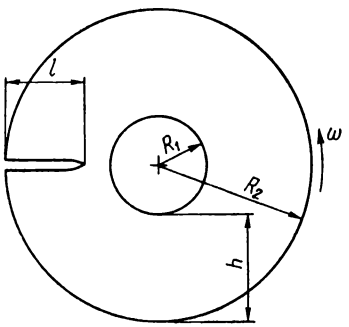


Рис. 4.54. Круговое кольцо с наружной краевой трещиной при действии давления на внутренней круговой границе.

Рис. 4.55. Вращение кругового кольца с внешней краевой радиальной трещиной вокруг своей оси.

Таблица 4.31. Значения КИН $K_1/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ $(\sigma_0 = 2R_1^2\sigma/(R_2^2 - R_1^2))$ для наружной краевой радиальной трещины в круговом кольце, находящемся под действием внутреннего давления [69]

$\frac{l}{h}$	R_1/h				
	1/3	1/2	1	2	3
0	1,122	1,122	1,122	1,122	1,122
0,1	1,250	1,245	1,219	1,203	1,208
0,2	1,413	1,391	1,368	1,355	1,352
0,3	1,617	1,587	1,557	1,560	1,574
0,4	1,874	1,829	1,797	1,832	1,873
0,5	2,207	2,137	2,095	2,170	2,259
0,6	2,655	2,540	2,462	2,586	2,740
0,7	3,301	3,103	2,941	3,085	3,320

n			
3	4	5	6
3,775 (—3)	6,550 (—4)	1,171 (—4)	2,135 (—5)
1,352 (—2)	3,484 (—3)	9,273 (—4)	2,522 (—4)
3,467 (—2)	1,176 (—2)	4,136 (—3)	1,490 (—3)
7,396 (—2)	3,092 (—2)	1,345 (—2)	6,008 (—3)
1,418 (—1)	7,005 (—2)	3,615 (—2)	1,920 (—2)
2,302 (—1)	1,323 (—1)	7,949 (—2)	4,918 (—2)
4,214 (—1)	2,698 (—1)	1,816 (—1)	1,263 (—1)

Таблица 4.32. Значения КИН $K_I/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ ($\sigma_0 = ((3+\mu)/4)\,\rho\omega^2[R_1^2 + (1-\mu)\,R_2^2/(3+\mu)]$, ρ — плотность материала) при вращении кругового кольца с внешней краевой радиальной трещиной для $\mu = 0{,}3$ (плоское напряженное состояние) [69]

$\frac{l}{h}$	R_1/h				
	1/3	1/2	1	2	3
0	1,122	1,122	1,122	1,122	1,122
0,1	1,312	1,288	1,245	1,217	1,214
0,2	1,530	1,486	1,419	1,377	1,367
0,3	1,774	1,714	1,632	1,608	1,601
0,4	2,053	1,982	1,893	1,894	1,911
0,5	2,380	2,299	2,210	2,242	2,309
0,6	2,777	2,691	2,601	2,682	2,811
0,7	3,301	3,210	3,093	3,199	3,406

трещины и границы кольца свободны от нагрузки (рис. 4.55). Значения КИН, полученные методом СИУ [69], приведены в табл. 4.32. Данные по КИН имеются также в работе [79].

4.7. Круговое кольцо с системой наружных краевых радиальных трещин

Две коллинеарные трещины равной длины. Пусть круговое кольцо содержит две коллинеарные радиальные трещины, выходящие на наружную границу. На берегах трещин действует симметричная нормальная нагрузка $p(x) = (x/h)^n$ ($n = 0, 1, \ldots, 6$), где x — радиальная координата, отсчитываемая от внешней окружности. Круговые границы свободны от нагрузки (рис. 4.56). Значения КИН, полученные модифицированным методом конформных отображений и коллокаций [66], представлены в табл. 4.33 (в скобках приведены показатели степени множителя 10). Приведенные результаты можно использовать при вычислении КИН в случае произвольной нагрузки $p(x)$ (см. п. 4.4).

Таблица 4.33. Значения КИН $K_I/\sqrt{\pi l}$ для кругового кольца с двумя давлением $p(x) = (x/h)^n$ [66]

$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{l}{h}$	0	1	2
3,0	0,01	1,129	6,862 (—3)	5,277 (—5)
	0,02	1,137	1,379 (—2)	2,119 (—4)
	0,03	1,140	2,071 (—2)	4,770 (—4)
	0,04	1,144	2,766 (—2)	8,486 (—4)
	0,05	1,153	3,476 (—2)	1,332 (—3)
	0,06	1,163	4,198 (—2)	1,927 (—3)
	0,07	1,169	4,914 (—2)	2,629 (—3)
	0,08	1,174	5,626 (—2)	3,437 (—3)
	0,09	1,182	6,357 (—2)	4,364 (—3)
	0,1	1,192	7,111 (—2)	5,417 (—3)
	0,2	1,285	1,494 (—1)	2,248 (—2)
	0,3	1,388	2,360 (—1)	5,254 (—2)
	0,4	1,501	3,315 (—1)	9,712 (—2)
	0,5	1,621	4,367 (—1)	1,579 (—1)
	0,6	1,749	5,532 (—1)	2,370 (—1)
	0,7	1,905	6,896 (—1)	3,405 (—1)
	0,8	2,136	8,693 (—1)	4,841 (—1)
2,5	0,01	1,130	6,870 (—3)	5,284 (—5)
	0,02	1,133	1,375 (—2)	2,114 (—4)
	0,03	1,136	2,066 (—2)	4,758 (—4)
	0,04	1,145	2,768 (—2)	8,494 (—4)
	0,05	1,154	3,481 (—2)	1,334 (—3)
	0,06	1,160	4,191 (—2)	1,925 (—3)
	0,07	1,165	4,898 (—2)	2,622 (—3)
	0,08	1,172	5,623 (—2)	3,436 (—3)
	0,09	1,183	6,368 (—2)	4,372 (—3)
	0,1	1,192	7,110 (—2)	5,417 (—3)
	0,2	1,291	1,500 (—1)	2,254 (—2)
	0,3	1,411	2,386 (—1)	5,300 (—2)
	0,4	1,548	3,388 (—1)	9,875 (—2)
	0,5	1,699	4,516 (—1)	1,620 (—1)
	0,6	1,864	5,791 (—1)	2,455 (—1)
	0,7	2,054	7,282 (—1)	3,552 (—1)
	0,8	2,311	9,210 (—1)	5,066 (—1)
2,0	0,01	1,129	6,868 (—3)	5,282 (—5)
	0,02	1,132	1,374 (—2)	2,112 (—4)
	0,03	1,135	2,064 (—2)	4,755 (—4)
	0,04	1,143	2,765 (—2)	8,487 (—4)
	0,05	1,152	3,477 (—2)	1,333 (—3)
	0,06	1,158	4,186 (—2)	1,923 (—3)
	0,07	1,163	4,893 (—2)	2,620 (—3)
	0,08	1,171	5,618 (—2)	3,434 (—3)
	0,09	1,182	6,363 (—2)	4,370 (—3)
	0,1	1,191	7,107 (—2)	5,416 (—3)
	0,2	1,302	1,509 (—1)	2,265 (—2)
	0,3	1,444	2,424 (—1)	5,361 (—2)
	0,4	1,622	3,500 (—1)	1,012 (—1)

n			
3	4	5	6
4,426 (—7)	3,882 (—9)	3,497 (—11)	3,207 (—13)
3,553 (—6)	6,230 (—8)	1,122 (—9)	2,057 (—11)
1,199 (—5)	3,153 (—7)	8,516 (—9)	2,342 (—10)
2,843 (—5)	9,963 (—7)	3,587 (—8)	1,315 (—9)
5,573 (—5)	2,440 (—6)	1,098 (—7)	5,030 (—9)
9,672 (—5)	5,080 (—6)	2,742 (—7)	1,507 (—8)
1,538 (—4)	9,423 (—6)	5,932 (—7)	3,803 (—8)
2,297 (—4)	1,607 (—5)	1,156 (—6)	8,470 (—8)
3,279 (—4)	2,580 (—5)	2,087 (—6)	1,720 (—7)
4,519 (—4)	3,949 (—5)	3,548 (—6)	3,247 (—7)
3,723 (—3)	6,475 (—4)	1,159 (—4)	2,117 (—5)
1,295 (—2)	3,360 (—3)	8,990 (—4)	2,455 (—4)
3,165 (—2)	1,089 (—2)	3,870 (—3)	1,405 (—3)
6,379 (—2)	2,729 (—2)	1,208 (—2)	5,465 (—3)
1,140 (—1)	5,822 (—2)	3,079 (—2)	1,667 (—2)
1,895 (—1)	1,122 (—1)	6,891 (—2)	4,336 (—2)
3,048 (—1)	2,045 (—1)	1,426 (—1)	1,020 (—1)
4,432 (—7)	3,887 (—9)	3,501 (—11)	3,211 (—13)
3,544 (—6)	6,215 (—8)	1,120 (—9)	2,053 (—11)
1,196 (—5)	3,146 (—7)	8,498 (—9)	2,337 (—10)
2,846 (—5)	9,973 (—7)	3,591 (—8)	1,317 (—9)
5,582 (—5)	2,444 (—6)	1,100 (—7)	5,039 (—9)
9,661 (—5)	5,074 (—6)	2,739 (—7)	1,506 (—8)
1,534 (—4)	9,400 (—6)	5,918 (—7)	3,795 (—8)
2,297 (—4)	1,607 (—5)	1,156 (—6)	8,469 (—8)
3,285 (—4)	2,585 (—5)	2,091 (—6)	1,723 (—7)
4,520 (—4)	3,950 (—5)	3,549 (—6)	3,248 (—7)
3,732 (—3)	6,487 (—4)	1,161 (—4)	2,120 (—5)
1,304 (—2)	3,379 (—3)	9,035 (—4)	2,466 (—4)
3,208 (—2)	1,101 (—2)	3,908 (—3)	1,417 (—3)
6,514 (—2)	2,777 (—2)	1,226 (—2)	5,537 (—3)
1,173 (—1)	5,964 (—2)	3,144 (—2)	1,698 (—2)
1,961 (—1)	1,155 (—1)	7,064 (—2)	4,431 (—2)
3,163 (—1)	2,111 (—1)	1,465 (—1)	1,045 (—1)
4,431 (—7)	3,886 (—9)	3,501 (—11)	3,210 (—13)
3,543 (—6)	6,213 (—8)	1,119 (—9)	2,052 (—11)
1,196 (—5)	3,144 (—7)	8,495 (—9)	2,336 (—10)
2,844 (—5)	9,968 (—7)	3,590 (—8)	1,316 (—9)
5,578 (—5)	2,443 (—6)	1,099 (—7)	5,037 (—9)
9,654 (—5)	5,072 (—6)	2,738 (—7)	1,505 (—8)
1,534 (—4)	9,395 (—6)	5,916 (—7)	3,793 (—8)
2,295 (—4)	1,606 (—5)	1,156 (—6)	8,467 (—8)
3,284 (—4)	2,584 (—5)	2,091 (—6)	1,723 (—7)
4,519 (—4)	3,949 (—5)	3,549 (—6)	3,248 (—7)
3,746 (—3)	6,500 (—4)	1,165 (—4)	2,125 (—5)
1,316 (—2)	3,404 (—3)	9,090 (—4)	2,478 (—4)
3,272 (—2)	1,120 (—2)	3,963 (—3)	1,434 (—3)

$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{l}{h}$	0	1	2
	0,5	1,829	4,762 (—1)	1,687 (—1)
	0,6	2,066	6,243 (—1)	2,604 (—1)
	0,7	2,318	7,957 (—1)	3,806 (—1)
	0,8	2,620	1,010	5,449 (—1)
1,75	0,01	1,127	6,855 (—3)	5,273 (—5)
	0,02	1,131	1,373 (—2)	2,112 (—4)
	0,03	1,136	2,066 (—2)	4,762 (—4)
	0,04	1,139	2,759 (—2)	8,469 (—4)
	0,05	1,148	3,467 (—2)	1,329 (—3)
	0,06	1,157	4,186 (—2)	1,923 (—3)
	0,07	1,164	4,901 (—2)	2,624 (—3)
	0,08	1,169	5,614 (—2)	3,432 (—3)
	0,09	1,178	6,347 (—2)	4,360 (—3)
	0,1	1,190	7,104 (—2)	5,414 (—3)
	0,2	1,308	1,513 (—1)	2,269 (—2)
	0,3	1,476	2,463 (—1)	5,431 (—2)
	0,4	1,681	3,592 (—1)	1,033 (—1)
	0,5	1,935	4,962 (—1)	1,743 (—1)
	0,6	2,231	6,612 (—1)	2,725 (—1)
	0,7	2,552	8,555 (—1)	4,032 (—1)
	0,8	2,914	1,095	5,813 (—1)
1,5	0,01	1,126	6,852 (—3)	5,271 (—5)
	0,02	1,132	1,376 (—2)	2,115 (—4)
	0,03	1,134	2,065 (—2)	4,758 (—4)
	0,04	1,137	2,756 (—2)	8,463 (—4)
	0,05	1,146	3,463 (—2)	1,328 (—3)
	0,06	1,156	4,182 (—2)	1,922 (—3)
	0,07	1,162	4,897 (—2)	2,623 (—3)
	0,08	1,168	5,610 (—2)	3,430 (—3)
	0,09	1,177	6,345 (—2)	4,359 (—3)
	0,1	1,190	7,104 (—2)	5,415 (—3)
	0,2	1,321	1,523 (—1)	2,280 (—2)
	0,3	1,515	2,509 (—1)	5,510 (—2)
	0,4	1,766	3,723 (—1)	1,062 (—1)
	0,5	2,092	5,257 (—1)	1,824 (—1)
	0,6	2,491	7,189 (—1)	2,913 (—1)
	0,7	2,941	9,544 (—1)	4,403 (—1)
	0,8	3,440	1,245	6,447 (—1)
1,25	0,01	1,121	6,826 (—3)	5,253 (—5)
	0,02	1,127	1,371 (—2)	2,108 (—4)
	0,03	1,133	2,064 (—2)	4,758 (—4)
	0,04	1,136	2,754 (—2)	8,461 (—4)
	0,05	1,143	3,459 (—2)	1,327 (—3)
	0,06	1,153	4,175 (—2)	1,920 (—3)
	0,07	1,158	4,884 (—2)	2,617 (—3)
	0,08	1,167	5,607 (—2)	3,429 (—3)
	0,09	1,179	6,354 (—2)	4,365 (—3)
	0,1	1,189	7,098 (—2)	5,410 (—3)
	0,2	1,339	1,538 (—1)	2,298 (—2)

n			
3	4	5	6
6,733 (—2)	2,855 (—2)	1,255 (—2)	5,653 (—3)
1,231 (—1)	6,211 (—2)	3,256 (—2)	1,751 (—2)
2,075 (—1)	1,211 (—1)	7,358 (—2)	4,592 (—2)
3,358 (—1)	2,220 (—1)	1,531 (—1)	1,085 (—1)
4,424 (—7)	3,880 (—9)	3,496 (—11)	3,206 (—13)
3,542 (—6)	6,211 (—8)	1,119 (—9)	2,052 (—11)
1,197 (—5)	3,149 (—7)	8,508 (—9)	2,340 (—10)
2,839 (—5)	9,951 (—7)	3,584 (—8)	1,314 (—9)
5,564 (—5)	2,437 (—6)	1,097 (—7)	5,026 (—9)
9,657 (—5)	5,074 (—6)	2,739 (—7)	1,506 (—8)
1,536 (—4)	9,412 (—6)	5,926 (—7)	3,800 (—8)
2,294 (—4)	1,606 (—5)	1,155 (—6)	8,464 (—8)
3,277 (—4)	2,579 (—5)	2,086 (—6)	1,719 (—7)
4,518 (—4)	3,948 (—5)	3,548 (—6)	3,247 (—7)
3,749 (—3)	6,512 (—4)	1,165 (—4)	2,125 (—5)
1,330 (—2)	3,436 (—3)	9,166 (—4)	2,497 (—4)
3,326 (—2)	1,135 (—2)	4,010 (—3)	1,449 (—3)
6,913 (—2)	2,919 (—2)	1,280 (—2)	5,749 (—3)
1,278 (—1)	6,410 (—2)	3,346 (—2)	1,793 (—2)
2,176 (—1)	1,261 (—1)	7,619 (—2)	4,735 (—2)
3,544 (—1)	2,324 (—1)	1,593 (—1)	1,124 (—1)
4,423 (—7)	3,879 (—9)	3,495 (—11)	3,205 (—13)
3,548 (—6)	6,223 (—8)	1,121 (—9)	2,056 (—11)
1,197 (—5)	3,148 (—7)	8,505 (—9)	2,339 (—10)
2,837 (—5)	9,946 (—7)	3,582 (—8)	1,314 (—9)
5,561 (—5)	2,436 (—6)	1,096 (—7)	5,024 (—9)
9,653 (—5)	5,071 (—6)	2,738 (—7)	1,505 (—8)
1,536 (—4)	9,409 (—6)	5,925 (—7)	3,799 (—8)
2,294 (—4)	1,606 (—5)	1,155 (—6)	8,463 (—8)
3,276 (—4)	2,579 (—5)	2,086 (—6)	1,719 (—7)
4,518 (—4)	3,949 (—5)	3,548 (—6)	3,247 (—7)
3,765 (—3)	6,534 (—4)	1,168 (—4)	2,131 (—5)
1,346 (—2)	3,470 (—3)	9,244 (—4)	2,516 (—4)
3,403 (—2)	1,157 (—2)	4,078 (—3)	1,471 (—3)
7,178 (—2)	3,014 (—2)	1,316 (—2)	5,891 (—3)
1,351 (—1)	6,718 (—2)	3,485 (—2)	1,859 (—2)
2,342 (—1)	1,342 (—1)	8,046 (—2)	4,969 (—2)
3,863 (—1)	2,502 (—1)	1,699 (—1)	1,190 (—1)
4,408 (—7)	3,867 (—9)	3,484 (—11)	3,196 (—13)
3,537 (—6)	6,204 (—8)	1,118 (—9)	2,050 (—11)
1,197 (—5)	3,149 (—7)	8,507 (—9)	2,340 (—10)
2,837 (—5)	9,946 (—7)	3,583 (—8)	1,314 (—9)
5,557 (—5)	2,435 (—6)	1,096 (—7)	5,022 (—9)
9,642 (—5)	5,067 (—6)	2,736 (—7)	1,504 (—8)
1,533 (—4)	9,391 (—6)	5,914 (—7)	3,793 (—8)
2,293 (—4)	1,605 (—5)	1,155 (—6)	8,462 (—8)
3,281 (—4)	2,582 (—5)	2,089 (—6)	1,722 (—7)
4,515 (—4)	3,946 (—5)	3,545 (—6)	3,245 (—7)
3,788 (—3)	6,568 (—4)	1,174 (—4)	2,139 (—5)

$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{l}{h}$			
		0	1	2
	0,3	1,570	2,574 (—1)	5,620 (—2)
	0,4	1,895	3,920 (—1)	1,106 (—1)
	0,5	2,345	5,734 (—1)	1,955 (—1)
	0,6	2,955	8,214 (—1)	3,247 (—1)
	0,7	3,727	1,153	5,146 (—1)
	0,8	4,610	1,576	7,834 (—1)

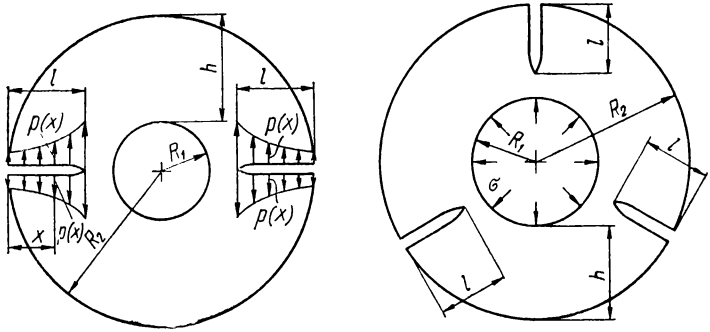


Рис. 4.56. Круговое кольцо с двумя наружными краевыми радиальными трещинами, симметрично нагруженными переменным давлением.

Рис. 4.57. Круговое кольцо с системой циклически размещенных внешних краевых радиальных трещин при действии давления на внутренней круговой границе.

Таблица 4.34. **Значения КИН $K_I / (\sigma_0\sqrt{\pi l})$ ($\sigma_0 = 2R_1^2\,\sigma/(R_2^2 - R_1^2)$) для кругового кольца с n циклически размещенными радиальными трещинами, выходящими на внешнюю границу, при действии давления на внутренней граничной окружности [85]**

$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{l}{h}$	n				$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{l}{h}$	n			
		1	2	3	4			1	2	3	4
3	0,1	1,23	1,23	1,23	1,23	2	0,1	1,20	1,22	1,21	1,21
	0,2	1,37	1,37	1,34	1,31		0,2	1,37	1,37	1,32	1,30
	0,3	1,54	1,58	1,48	1,38		0,3	1,56	1,59	1,50	1,42
	0,4	1,82	1,80	1,61	1,46		0,4	1,80	1,84	1,67	1,54
	0,5	2,12	2,06	1,78	1,58		0,5	2,10	2,15	1,87	1,68
	0,6	2,43	2,38	1,99	1,77		0,6	2,49	2,48	2,12	1,89
	0,7	3,11	2,75	2,36	2,11		0,7	...	2,91	2,43	2,16

n			
3	4	5	6
1,367 (—2)	3,517 (—3)	9,353 (—4)	2,542 (—4)
3,519 (—2)	1,190 (—2)	4,179 (—3)	1,503 (—3)
7,603 (—2)	3,166 (—2)	1,373 (—2)	6,117 (—3)
1,479 (—1)	7,264 (—2)	3,732 (—2)	1,975 (—2)
2,672 (—1)	1,504 (—1)	8,894 (—2)	5,432 (—2)
4,558 (—1)	2,887 (—1)	1,926 (—1)	1,331 (—1)

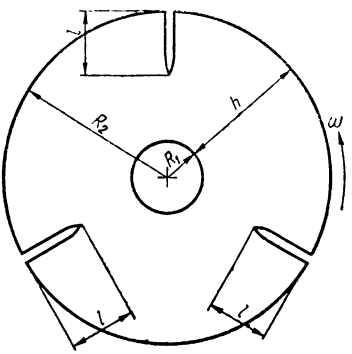


Рис. 4.58. Вращение кругового кольца с системой циклически размещенных внешних краевых радиальных трещин.

Система циклически размещенных радиальных трещин. Пусть на внешнюю границу кругового кольца выходит n циклически размещенных радиальных трещин равной длины. Берега трещин и внешняя граница свободны от нагрузки, а на внутренней граничной окружности действует постоянное давление (рис. 4.57). Значения КИН, полученные модифицированным методом конформных отображений и коллокаций [85], приведены в табл. 4.34. В случае двух трещин данные по КИН имеются также в работе [66]. Пусть круговое кольцо равномерно вращается вокруг своего центра с угловой скоростью ω. Берега трещин и границы кольца

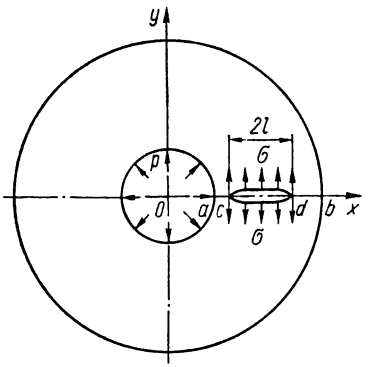
Таблица 4.35. Значения КИН $K_I/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ ($\sigma_0 = (\rho\omega^2/4)$ [$(3 + \mu) R_1^2 + (1 - \mu) R_2^2$], ρ — плотность материала) при вращении кругового кольца с n циклически размещенными радиальными трещинами, выходящими на внешнюю границу, для $\mu = 0{,}3$ (плоское напряженное состояние) [79]

$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{l}{h}$	n				$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{l}{h}$	n			
		1	2	3	4			1	2	3	4
3	0,1	1,29	1,29	1,28	1,27	2	0,1	1,25	1,25	1,25	1,23
	0,2	1,49	1,49	1,44	1,40		0,2	1,42	1,43	1,41	1,36
	0,3	1,72	1,72	1,59	1,50		0,3	1,63	1,66	1,57	1,48
	0,4	1,99	1,97	1,75	1,59		0,4	1,90	1,95	1,77	1,63
	0,5	2,31	2,24	1,92	1,71		0,5	2,22	2,28	1,99	1,79
	0,6	2,71	2,54	2,13	1,87		0,6	2,60	2,66	2,26	1,99
	0,7	3,24	2,90	2,43	2,16		0,7	...	3,09	2,57	2,28

свободны от нагрузки (рис. 4.58). Значения КИН, полученные модифицированным методом конформных отображений и коллокаций [79], приведены в табл. 4.35.

4.8. Круговое кольцо с внутренними трещинами

Радиальная трещина. Пусть граница кольца свободна от нагрузки, а на берегах радиальной трещины задано постоянное давление σ (рис. 4.59; $p = 0$). Значения КИН, полученные методом СИУ [69], приведе-



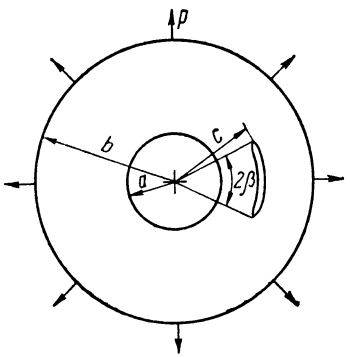


Рис. 4.59. Круговое кольцо с внутренней радиальной трещиной.

Рис. 4.60. Круговое кольцо с внутренней трещиной вдоль концентрической окружности при действии растягивающих усилий на внешней границе.

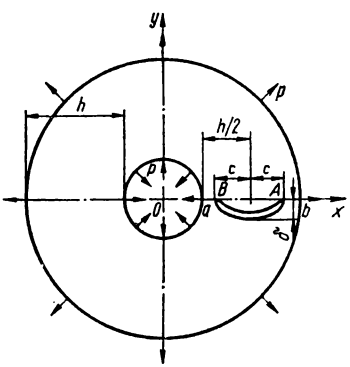


Рис. 4.61. Круговое кольцо с внутренней дугообразной трещиной при действии растягивающих усилий на граничных окружностях.

ны в табл. 4.36. Для случая, когда берега трещины и внешняя граница свободны от нагрузки, а на внутренней граничной окружности действует постоянное давление p (см. рис. 4.59; $\sigma = 0$), значения КИН, полученные методом СИУ [69], приведены в табл. 4.37. Данные по КИН имеются также в работах [89, 90].

Криволинейная трещина. Пусть в кольце имеется внутренняя трещина вдоль концентрической окружности. Берега трещины и внутренняя граница свободны от нагрузки, а на внешней границе заданы постоянные растягивающие напряжения (рис. 4.60). Значения КИН, полученные методом рядов Фурье [91], приведены в табл. 4.38. При вращении кольца вокруг своей оси данные по КИН имеются в работе [92].

Пусть кольцо ослаблено дугообразной трещиной, вершины которой находятся на одном и том же радиусе. Кольцо нагружено нормальными растягивающими усилиями p, равномерно распределенными по обеим

Таблица 4.36. **Значения КИН $K_I = \sigma\sqrt{\pi l}F_I$ для кругового кольца с внутренней радиальной трещиной при действии на ее берегах постоянного давления [69]**

$2l/(b-a)=0{,}5$, $c-a=b-d$			$b/a=2$, $c-a=b-d$			$b/a=2$, $2l/(b-a)=0{,}5$		
$\frac{a}{b-a}$	F_I (c)	F_I (d)	$\frac{2l}{b-a}$	F_I (c)	F_I (d)	$\frac{c-a}{b-a}$	F_I (c)	F_I (d)
0,05	1,1477	1,2046	0	1,0	1,0	0,15	1,2414	1,1755
0,10	1,1498	1,2030	0,1	1,0060	1,0062	0,20	1,1929	1,1777
0,25	1,1580	1,2018	0,2	1,0241	1,0256	0,25	1,1736	1,1980
0,50	1,1664	1,2007	0,3	1,0556	1,0608	0,30	1,1744	1,2391
1,0	1,1736	1,1980	0,4	1,1034	1,1158	0,35	1,1936	1,3118
2,0	1,1788	1,1943	0,5	1,1736	1,1980	...	...	...
3,0	1,1810	1,1923	0,6	1,2785	1,3213	...	...	...
4,0	1,1822	1,1911	0,7	1,4445	1,5146	...	...	...
∞	1,1867	1,1867	0,8	1,7407	1,8536	...	...	...

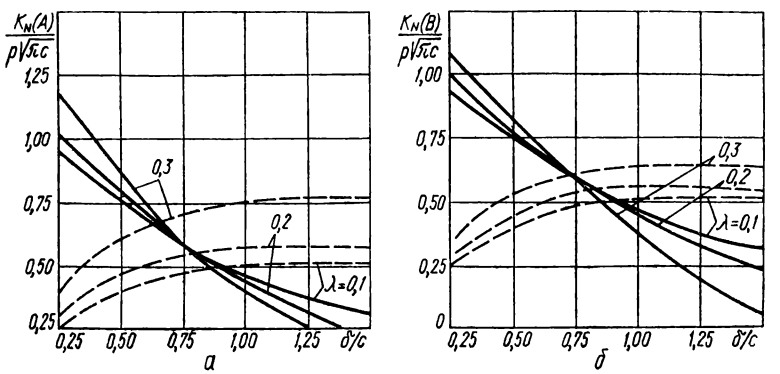


Рис. 4.62. Зависимости КИН K_I (N = I, сплошные линии) и K_{II} (N = II, штриховые линии) от параметра δ/c для правой ($а$) и левой ($б$) вершин дугообразной трещины в круговом кольце при действии растягивающих усилий на граничных окружностях для $b/a = 10$ ($\lambda = c/h$) [93].

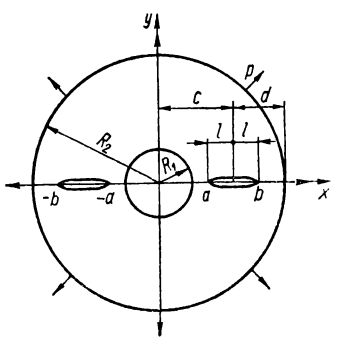


Рис. 4.63. Круговое кольцо с двумя симметричными коллинеарными радиальными трещинами при действии растягивающих усилий на внешней границе.

его границам, а берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.61). В этом случае КИН такие же, как и при нагружении берегов трещины постоянным давлением p, когда граничные окружности свободны от нагрузки. Зависимости КИН от параметра δ/c, полученные методом СИУ [93], приведены на рис. 4.62. В работе [93] имеются аналогичные данные для КИН, когда трещина расположена вдоль дуги параболы или эллипса.

Две симметричные коллинеарные трещины. Пусть в кольце вдоль одного и того же диаметра симметрично расположены две равные трещины. Берега трещин и внутренняя граница свободны от нагрузки, а на внешней границе задано равномерное растяжение усилиями p (рис. 4.63). Значения КИН, полученные методом степенных рядов [42], приведены в табл. 4.39.

Таблица 4.37. **Значения КИН $K_I = p\sqrt{\pi l}F_I$ для кругового кольца с внутренней радиальной трещиной при действии постоянного давления на внутренней границе для $b/a = 2$ [69]**

$(c-a)/(b-d)=1$			$2l/(b-a)=0{,}5$		
$\frac{2l}{b-a}$	$F_I\ (c)$	$F_I\ (d)$	$\frac{c-a}{b-a}$	$F_I\ (c)$	$F_I\ (d)$
0	0,9259	0,9259	0,15	1,4292	1,1004
0,1	0,9522	0,9129	0,20	1,3033	1,0554
0,2	0,9920	0,9139	0,25	1,2186	1,0318
0,3	1,0468	0,9311	0,30	1,1608	1,0290
0,4	1,1201	0,9682	0,35	1,1249	1,0533
0,5	1,2186	1,0318	...	...	...
0,6	1,3557	1,1341	...	...	...
0,7	1,5606	1,3010	...	...	...
0,8	1,9084	1,6002	...	...	...

Таблица 4.38. **Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi c})$ (над чертой) и $-K_{II}/(p\sqrt{\pi c})$ (под чертой) для кругового кольца с трещиной вдоль концентрической окружности ($a/c = c/b$) при действии растягивающих усилий на внешней границе [91]**

$\frac{a}{c}$	β			
	π/18	π/6	π/3	π/2
0,1	0,418	0,667	0,661	0,454
	0,037	0,178	0,394	0,489
0,2	0,438	0,755	0,698	0,403
	0,038	0,198	0,459	0,537
0,3	0,479	0,935	0,724	0,318
	0,041	0,243	0,575	0,613
0,4	0,565	1,263	0,672	0,171
	0,046	0,396	0,753	0,712

Таблица 4.39. Значения КИН $K_I(a)/(p\sqrt{\pi R_1})$ (над чертой) и $K_I(b)/(p\sqrt{\pi R_1})$ (под чертой) для кругового кольца с двумя симметричными коллинеарными трещинами при заданном растяжении на внешней границе для $l/R_1 = 0{,}25$ [42]

$\frac{l}{c}$	l/d				
	0	0,1	0,5	0,8	0,9
0,1	1,089	1,126	1,247	1,390	1,462
	1,077	1,114	1,279	1,668	2,016
0,5	1,624	1,783	2,400	2,916	3,235
	1,433	1,565	2,219	3,471	4,750
0,8	2,194	2,512	4,075	4,861	5,247
	1,653	1,866	2,896	4,489	6,244
0,9	2,690	3,140	5,782	7,013	7,486
	1,752	2,009	3,305	4,953	6,813

4.9. Криволинейный диск с трещинами

Эллиптический диск с центральной трещиной. Пусть на краю эллиптической пластины с центральной трещиной действуют нормальные растягивающие напряжения p. Берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.64). Решение задачи получено методом граничных коллокаций [6, 27] и методом рядов [94]. Ниже приведены значения КИН для случаев, когда трещина находится между фокусами эллипса ($l = \sqrt{a^2 - b^2}$) [27]

a/l	25,0	10,0	5,0	2,5	1,5	1,35	1,25	1,20	1,15
$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	1,002	1,015	1,062	1,278	2,119	2,679	3,429	4,087	5,186

а также при $a = 1{,}5l$ [94]

b/a	4	3	2	1	0,5	0,2	0,1
$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	1,4264	1,4352	1,4640	1,7425	2,9687	7,5923	18,238

Пусть на краю диска действуют сосредоточенные растягивающие и сжимающие силы, а остальная граница диска и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.65). Значения КИН, полученные методом граничных коллокаций [27], приведены в табл. 4.40 и 4.41.

Пусть в эллиптической пластине имеется прямолинейная трещина произвольной ориентации, причем ее середина находится в центре диска. На внешнем контуре действуют две растягивающие сосредоточенные силы, а остальная часть границы и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.66). Значения КИН, полученные методом граничных коллокаций [95], приведены в табл. 4.42.

Эллиптическая пластина с краевой трещиной. Пусть краевая трещина расположена вдоль оси симметрии в эллиптической пластине. На берегах трещины заданы постоянные нормальные усилия, а внешний контур пластины свободен от нагрузки (рис. 4.67). Значения КИН, полученные методом СИУ [77, 96], приведены в табл. 4.43.

Таблица 4.40. **Значения КИН $K_I/[(P/a)\sqrt{l/\pi}]$ при сжатии эллиптического диска с центральной симметричной трещиной сосредоточенными силами [27]**

$\frac{l}{a}$	b/a				
	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0
0	0,5390	0,8516	1,0000	0,9110	0,8497
0,1	0,5701	0,8770	1,0150	0,9201	0,8579
0,2	0,6612	0,9525	1,0601	0,9481	0,8828
0,3	0,8091	1,0771	1,1356	0,9965	0,9266
0,4	1,0179	1,2521	1,2432	1,0691	0,9933
0,5	1,3053	1,4847	1,3873	1,1726	1,0902
0,6	1,7085	1,7905	1,5783	1,3201	1,2310
0,7	2,2983	2,1990	1,8403	1,5397	1,45
0,8	3,2082	2,7699	2,2385	1,9038	...

Таблица 4.41. **Значения КИН $K_I/[(3F/a)\sqrt{l/\pi}]$ при растяжении эллиптического диска с центральной симметричной трещиной сосредоточенными силами [27]**

$\frac{l}{a}$	b/a				
	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0
0	1,9585	1,4185	1,0000	0,6890	0,5887
0,1	1,9545	1,4197	1,0017	0,6914	0,5917
0,2	1,9509	1,4256	1,0075	0,6989	0,6009
0,3	1,9685	1,4422	1,0191	0,7127	0,6175
0,4	2,0295	1,4781	1,0396	0,7353	0,6436
0,5	2,1521	1,5429	1,0737	0,7707	0,6832
0,6	2,3551	1,6460	1,1287	0,8265	0,7434
0,7	2,6669	1,7983	1,2148	0,9180	0,8397
0,8	3,1297	2,0169	1,3742	1,0833	1,0105

Таблица 4.42. Значения КИН $K_I/(F/2a)\sqrt{\pi l}$ (над чертой) и $K_{II}/[(F/2a)\sqrt{\pi l}]$ (под чертой) при растяжении сосредоточенными силами эллиптического диска с центральной произвольно ориентированной трещиной для $l = a/2$ [95]

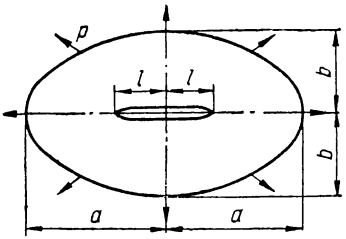
$\frac{b}{a}$	β						
	0	π/12	π/6	π/4	π/3	5π/12	π/2
0,75	2,749	2,672	2,426	1,957	1,168	—0,154	—1,288
	0	0,565	1,128	1,663	2,078	1,944	0
1,0	2,051	1,953	1,654	1,143	0,408	—0,441	—0,883
	0	0,518	0,990	1,350	1,464	1,064	0
2,0	1,305	1,220	0,977	0,617	0,218	—0,106	—0,232
	0	0,322	0,580	0,710	0,654	0,397	0
3,0	1,229	1,149	0,927	0,609	0,274	0,015	—0,080
	0	0,284	0,505	0,603	0,539	0,319	0

Таблица 4.43. Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$ при действии постоянного давления на краевой трещине в эллиптическом диске [77, 96]

$\frac{b}{a}$	a/l			$\frac{b}{a}$	a/l		
	1,0	1,5	2,0		1,0	1,5	2,0
0,50	5,012	3,299	2,680	1,25	2,999	1,922	1,613
0,75	3,634	2,399	1,994	1,50	2,926	1,864	1,563
1,00	3,171	2,060	1,726				

Таблица 4.44. Значения КИН $K_I/(F/\sqrt{a})$ при растяжении сосредоточенными силами эллиптического диска с краевой трещиной для $c = 1{,}5a$, $h = 0{,}275c$, $\varkappa = 2$ [96]

$\frac{l}{2a}$	b/a			$\frac{l}{2a}$	b/a		
	0,75	1,0	1,5		0,75	1,0	1,5
0,1	0,4201	0,5227	0,5916	0,6	8,503	7,505	6,989
0,2	1,564	1,502	1,461	0,7	12,97	11,85	11,27
0,3	3,098	2,734	2,533	0,8	23,58	22,34	21,63
0,4	4,495	3,851	3,509	0,9	66,06	64,06	63,19
0,5	6,085	5,236	4,793				



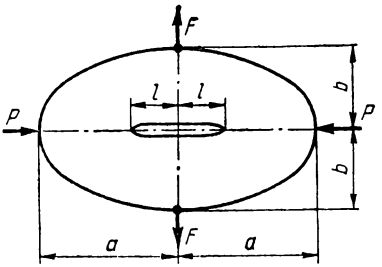
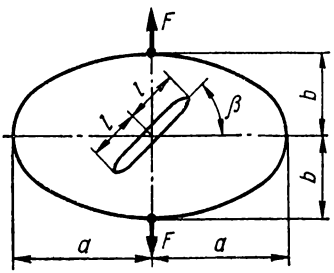


Рис. 4.64. Всестороннее растяжение эллиптического диска с центральной трещиной.

Рис. 4.65. Действие сосредоточенных сил на контуре эллиптического диска с центральной симметричной трещиной.



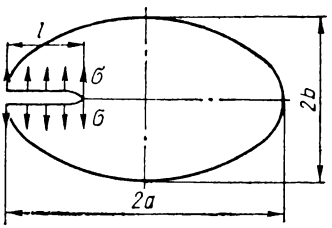


Рис. 4.66. Растяжение сосредоточенными силами эллиптического диска с центральной произвольно ориентированной трещиной.

Рис. 4.67. Эллиптический диск с краевой трещиной под давлением.

Для случая, когда берега трещины и контур диска свободны от нагрузки, а во внутренних точках пластины приложены две растягивающие сосредоточенные силы (рис. 4.68), задача решена методом СИУ в работе [96]. Численные результаты для КИН приведены в табл. 4.44.

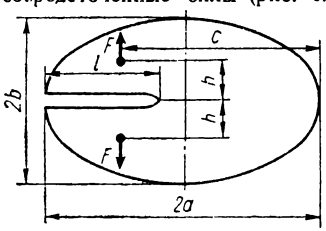


Рис. 4.68. Растяжение сосредоточенными силами эллиптического диска с краевой трещиной.

Центральная трещина в прямоугольной пластине с круговыми вырезами в углах. На рис. 4.69, *б*, *г*, приведены полученные методом граничных коллокаций [27] зависимости КИН от относительной длины трещины в криволинейных дисках, схемы которых изображены на рис. 4.69, *а*, *в*. Берега трещины свободны от нагрузки. Пластина растягивается двумя симметричными сосредоточенными силами, приложенными к защемленным концевым участкам (сплошные линии) или действующими в центрах этих участков, когда остальная граница свободна от нагрузки (штриховая линия).

Полукруговой диск с краевой трещиной. Пусть на прямолинейную границу полукругового диска выходит радиальная трещина, берега которой загружены постоянным давлением. Остальная граница либо свободна

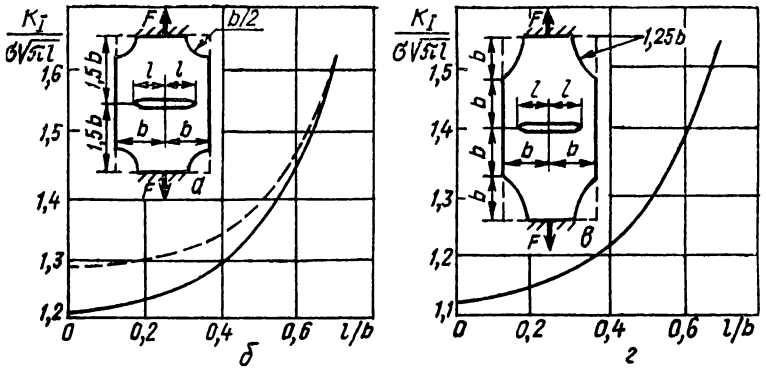


Рис. 4.69. Схемы криволинейных пластин с защемленными гранями и центральными трещинами (*а*, *в*) и зависимости КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$ ($\sigma = F/2b$) от параметра l/b (*б*, *г*) (штриховая линия относится к случаю растяжения пластины двумя сосредоточенными силами) [27].

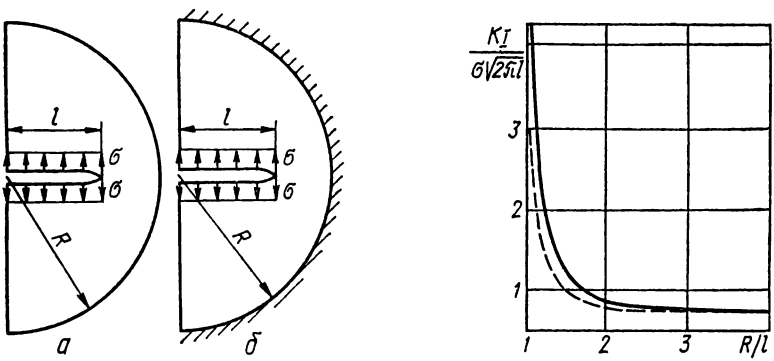


Рис. 4.70. Полукруговой диск с краевой трещиной со свободной (*а*) или защемленной (*б*) круговой границей.

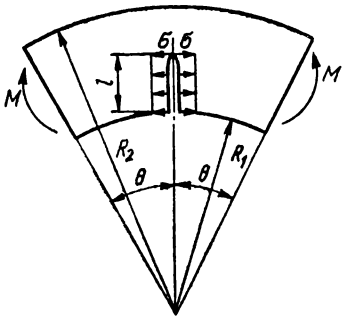
Рис. 4.71. Зависимость КИН $K_I/(\sigma\sqrt{2\pi l})$ от параметра R/l для нагруженной постоянным давлением краевой трещины в полукруговом диске при свободной (сплошная линия) или защемленной (штриховая линия) круговой границе [97].

от нагрузки (рис. 4.70, *а*), либо на прямолинейных участках отсутствуют напряжения, а круговая граница защемлена (рис. 4.70, *б*). Зависимости КИН от параметра R/l, полученные методом дуальных интегральных уравнений [97], приведены на рис. 4.71. В первом случае (см. рис. 4.70, *а*) данные по КИН имеются также в работе [98].

Криволинейная балка с краевой трещиной. Пусть в сегменте кругового кольца имеется краевая радиальная трещина. На берегах трещины действует постоянное давление, а на торцах сегмента заданы изгибающие моменты (рис. 4.72). Задача решена методом граничных коллокаций в работе [99]. Зависимости КИН от параметра l/R_1 приведены на рис. 4.73

и 4.74. В случае изгиба (см. рис. 4.72; $\sigma = 0$) аналогичные данные для КИН имеются в работе [100].

При трехточечном изгибе криволинейной балки с краевой трещиной (рис. 4.75) зависимости КИН от угла θ, полученные методом граничных



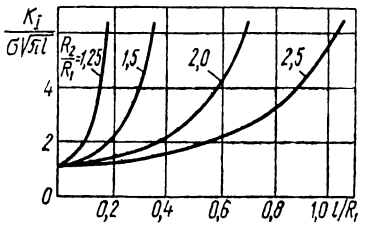
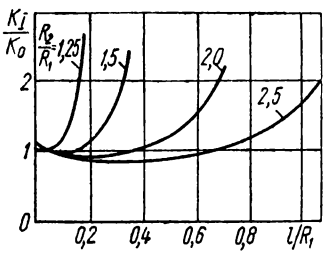


Рис. 4.72. Криволинейная балка с краевой трещиной под действием давления на ее берегах и изгибающих моментов на торцах.

Рис. 4.73. Зависимость КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$ от параметра l/R_1 для криволинейной балки с краевой трещиной под давлением при $\theta = \pi/4$ [99].

коллокаций [101], приведены на рис. 4.76. Данные по КИН для рассматриваемого случая нагрузки имеются также в работах [100, 102].

Образец С-образной формы с краевой трещиной. При определении трещиностойкости (вязкости разрушения) при плоской деформации K_I для металлических материалов применяются образцы С-образной формы с краевой трещиной на растяжение (рис. 4.77). Значения КИН для таких образцов приведены в



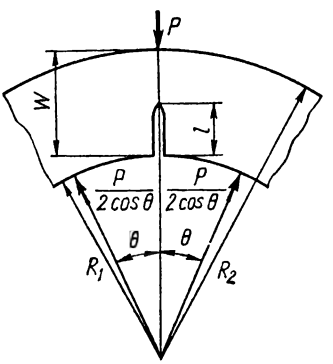


Рис. 4.74. Зависимость КИН K_I/K_0 ($K_0 = 4M\sqrt{\pi l}\,[2R_2^2 \ln(R_2/R_1) - R_2^2 + R_1^2]/\{(R_2^2 - R_1^2)^2 - 4R_1^2R_2^2[\ln(R_2/R_1)]^2\}$ при чистом изгибе криволинейной балки с краевой трещиной для $\theta = \pi/4$ [99].

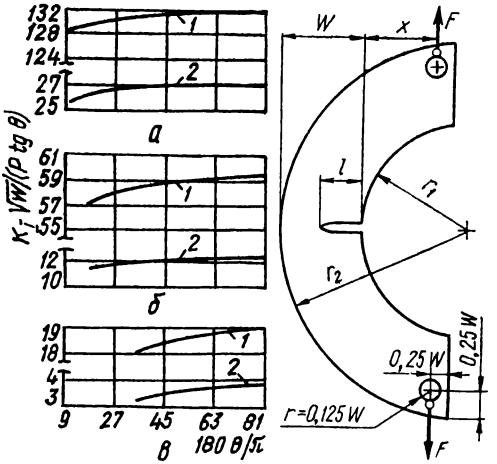
Рис. 4.75. Криволинейная балка с краевой трещиной при трехточечном изгибе.

работах [103—106]. Аппроксимационная формула для КИН имеет вид [105, 106]

$$K_I = (F/t\sqrt{W})(3x/W + 1{,}9 + 1{,}1l/W)[1 + 0{,}25(1 - l/W)^2(1 - r_1/r_2)]\,f(l/W),$$

где t — толщина образца, $f(l/W) = [(l/W)^{1/2}/(1 - l/W)^{3/2}]\ [3{,}74 - 6{,}30l/W + 6{,}32\ (l/W)^2 - 2{,}43\ (l/W)^3]$.

Относительная погрешность этой формулы не превышает: 1) 1 % при $0{,}45 \leqslant l/W \leqslant 0{,}55$ и $x/W = 0$ или 0,5; 2) 1,5 % при $0{,}2 \leqslant l/W \leqslant 1$ и $x/W = 0$ или 0,5; 3) 3 % при $0{,}2 \leqslant l/W \leqslant 1$ и $0 \leqslant x/W \leqslant 1$.



Криволинейный диск с точками возврата на границе. Пусть криволинейный диск представляет собой конечную область,

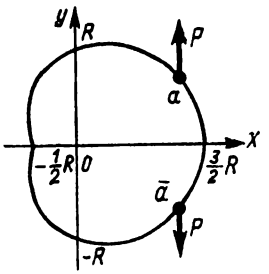


Рис. 4.76. Зависимость КИН $K_I\sqrt{W}/(P\ \mathrm{tg}\ \theta)$ от угла θ при трехточечном изгибе криволинейной балки с краевой трещиной для $R_2/R_1 = 1{,}10$ (*а*), $R_2/R_1 = 1{,}25$ (*б*) и $R_2/R_1 = 2{,}50$ (*в*):
1 — $l/W = 0{,}7$; *2* — $l/W = 0{,}2$ [101].

Рис. 4.77. Схема образца С-образной формы с краевой трещиной.

Рис. 4.78. Криволинейный диск, ограниченный кардиоидой.

ограниченную кардиоидой. Параметрическое уравнение кардиоиды имеет вид

$$x = R\ [\cos\theta + (1/2)\cos 2\theta],\quad y = R\ [\sin\theta + (1/2)\sin 2\theta]\quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

Диск растягивается двумя сосредоточенными силами, действующими в симметричных точках границы (рис. 4.78). КИН в вершине выемки находится по формуле [107]

$$K_I = (2P/\sqrt{\pi R})\ [(1/4)\ (1 + \cos\beta)^{-1} + 1 - 2\cos\beta],$$

где угол β определяет точки $a = \omega\ (e^{i\beta}) = R\ [e^{i\beta} + (1/2)\ e^{2i\beta}]$ и $\bar{a} = \omega\ (e^{-i\beta})$, в которых действуют силы P. При $\beta = \beta_* = \arccos[(\sqrt{11} - 1)/4] = 0{,}9532$ ($a_* = R\ (0{,}4146 + 1{,}2873i)$) $K_I = 0$, при $0 < \beta < \beta_*$ $K_I < 0$, а при $\beta_* < \beta < \pi$ $K_I > 0$.

Данные по КИН при растяжении сосредоточенными силами криволинейного диска, ограниченного кардиоидой, приведены также в работе [108].

4.10. Эллиптическая пластина с круговым отверстием и краевыми трещинами

Сжатие внешней границы сосредоточенными силами. Пусть внешний контур пластины представляет собой эллипс с полуосями a и b. Пластина ослаблена центральным круговым отверстием радиуса R, на край которого выходят одна или две равные радиальные трещины длины l. На внешней границе вдоль линии расположения трещин приложены две равные по величине сжимающие силы F. Остальная часть границы пластины и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.79; $P = 0$). Значения КИН, полученные методом СИУ [77], приведены в табл. 4.45 и 4.46.

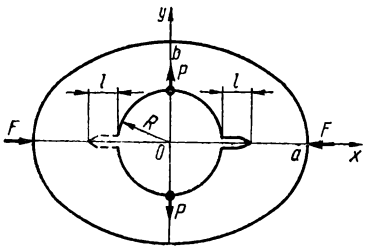


Рис. 4.79. Эллиптическая пластина с центральным круговым отверстием и одной или двумя краевыми трещинами.

Растяжение контура кругового отверстия сосредоточениями силами. Пусть на внутренней граничной окружности в концах диаметра, перпендикулярного линии краевых трещин, приложены две равные по величине растягивающие силы P. Остальная часть границы пластины и берега трещин свободны от нагрузок (см. рис. 4.79; $F = 0$). Зависимости КИН от относительной длины трещин, полученные методом СИУ [77], приведены на рис. 4.80 и 4.81.

Таблица 4.45. Значения КИН $K_I/(F/\sqrt{\pi R})$ при сжатии сосредоточенными силами эллиптической пластины с круговым отверстием и одной (над чертой) или двумя (под чертой) краевыми трещинами, расположенными вдоль большой оси эллипса ($a > b$) [77]

$\frac{l}{b-R}$	$a/b = 2$		$a/b = 2{,}5$	
	R/b		R/b	
	$^1/_3$	$^1/_4$	$^1/_3$	$^1/_4$
0,1	1,420	0,834	1,740	0,996
	1,475	0,898	1,723	1,065
0,2	1,723	0,940	2,252	1,187
	1,940	1,154	2,395	1,433
0,3	1,957	1,023	2,732	1,343
	2,450	1,452	3,080	1,864
0,4	2,184	1,109	3,270	1,499
	3,110	1,834	3,980	2,423
0,5	2,414	1,204	3,902	1,661
	4,026	2,337	5,266	3,179
0,6	2,643	1,310	4,646	1,839
	5,367	3,018	7,267	4,259
0,7	2,854	1,435	5,506	2,051
	7,440	3,965	10,766	5,919
0,8	3,019	1,594	6,412	2,323
	10,709	5,261	18,075	8,695

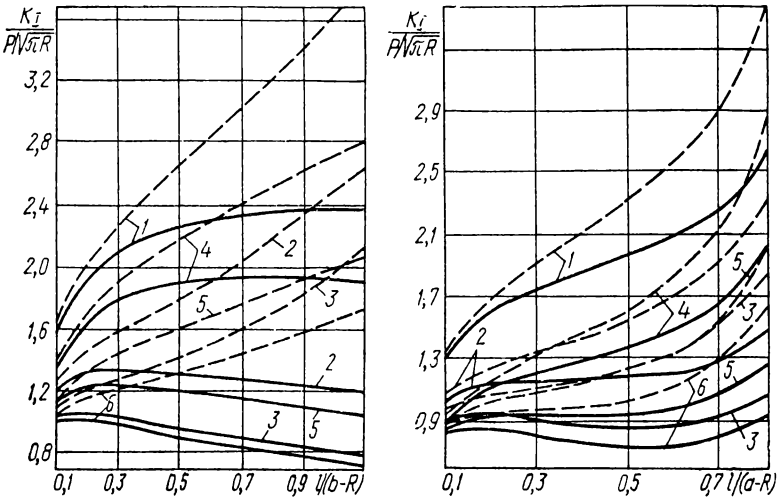


Рис. 4.80. Зависимости КИН $K_I/(P/\sqrt{\pi R})$ от параметра $l/(b-R)$ при растяжении сосредоточенными силами эллиптической пластины с круговым отверстием и одной (сплошные линии) или двумя (штриховые линии) краевыми трещинами, расположенными вдоль большой оси эллипса ($a > b$):

1 — $a/b = 2$, $R/b = 1/2$; *2* — $a/b = 2$, $R/b = 1/3$; *3* — $a/b = 2$, $R/b = 1/4$; *4* — $a/b = 4$, $R/b = 1/2$; *5* — $a/b = 4$, $R/b = 1/3$; *6* — $a/b = 4$, $R/b = 1/4$ [77].

Рис. 4.81. Зависимости КИН $K_I/(P/\sqrt{\pi R})$ от параметра $l/(a-R)$ при растяжении сосредоточенными силами эллиптической пластины с круговым отверстием и одной (сплошные линии) или двумя (штриховые линии) краевыми трещинами, расположенными вдоль малой оси эллипса ($a < b$):

1 — $a/b = 1/2$, $R/a = 1/2$; *2* — $a/b = 1/2$, $R/a = 1/3$; *3* — $a/b = 1/2$, $R/a = 1/4$; *4* — $a/b = 1/4$, $R/a = 1/2$; *5* — $a/b = 1/4$, $R/a = 1/3$; *6* — $a/b = 1/4$, $R/a = 1/4$ [77].

4.11. Прямоугольная пластина с центральной продольной трещиной

Действие постоянного давления на трещине. Пусть внешняя граница прямоугольной пластины свободна от нагрузки, а на берегах центральной трещины действуют постоянные нормальные усилия σ (рис. 4.82, $p = 0$). Значения КИН, полученные методом граничных коллокаций [109, 110], приведены в табл. 4.47. Эти данные соответствуют также случаю, когда трещина свободна от нагрузки, а на гранях, параллельных трещине, заданы нормальные растягивающие напряжения $p = \sigma$ (см. рис. 4.82, $\sigma = 0$). Данные по КИН имеются также в работах [36, 111—115]. В случае квадратной пластины ($h = L$) известна приближенная формула [116]

$$K_1 = \sigma\sqrt{\pi l}/[1-(l/L)^{1,1}]^{0,9}, \quad 0 \leqslant l/L \leqslant 0{,}91,$$

Таблица 4.46. **Значения КИН $K_I/(F/\sqrt{\pi R})$ при сжатии сосредоточенными силами эллиптической пластины с круговым отверстием и одной (над чертой) или двумя (под чертой) краевыми трещинами, расположенными вдоль малой оси эллипса ($b > a$) [77]**

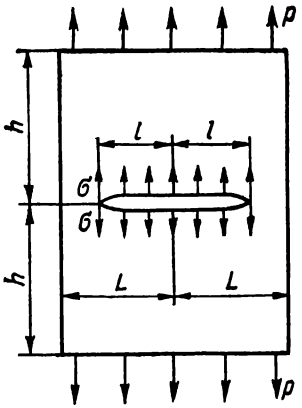
$\frac{l}{a-R}$	$a/b = 1/2$			$a/b = 1/4$		
	R/a			R/a		
	1/2	1/3	1/4	1/2	1/3	1/4
0,1	3,024	1,284	0,763	5,306	2,192	1,260
	3,070	1,327	0,803	5,381	2,262	1,325
0,2	3,172	1,163	0,624	5,384	1,860	0,926
	3,338	1,284	0,720	5,649	2,053	1,076
0,3	3,054	1,026	0,532	5,006	1,531	0,704
	3,374	1,227	0,678	5,506	1,839	0,921
0,4	2,871	0,924	0,481	4,539	1,281	0,568
	3,360	1,205	0,675	5,289	1,698	0,843
0,5	2,672	0,852	0,455	4,059	1,090	0,480
	3,338	1,212	0,699	5,069	1,611	0,811
0,6	2,462	0,796	0,443	3,549	0,913	0,406
	3,313	1,245	0,744	4,839	1,548	0,801

Таблица 4.47. **Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$ для прямоугольной пластины с центральной трещиной под давлением [109, 110]**

$\frac{l}{L}$	h/L										
	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,5	1,8	∞
0,1	1,069	1,046	1,033	1,026	1,021	1,017	1,014	1,010	1,007	1,006	1,006
0,2	1,256	1,175	1,130	1,103	1,083	1,067	1,055	1,039	1,029	1,025	1,025
0,3	1,520	1,371	1,285	1,228	1,184	1,150	1,123	1,088	1,066	1,060	1,058
0,4	1,843	1,629	1,497	1,400	1,323	1,262	1,216	1,158	1,122	1,112	1,109
0,5	2,247	1,967	1,773	1,619	1,496	1,403	1,334	1,251	1,203	1,190	1,187
0,6	2,806	2,424	2,123	1,883	1,702	1,572	1,481	1,38	1,32	1,31	1,303
0,7	3,67	3,04	2,55	2,19	1,94	1,78	1,68	...	...	...	1,488

аппроксимирующая численные результаты работы [111] с относительной погрешностью около 2 %. Растяжение ортотропной пластины с центральной трещиной рассмотрено в работах [117—119].

Действие сосредоточенных сил на берегах трещины. Пусть к берегам трещины в ее центре приложены растягивающие нормальные силы, а внешняя граница пластины свободна от нагрузки (рис. 4.83). Значения КИН, полученные методом СИУ [77, 96], приведены в табл. 4.48. Данные по КИН имеются также в работах [7—9, 21, 120]. В работе [115] получены КИН для квадратной пластины с центральной трещиной, когда на ее берегах в произвольной точке действуют нормальные сосредоточенные силы.



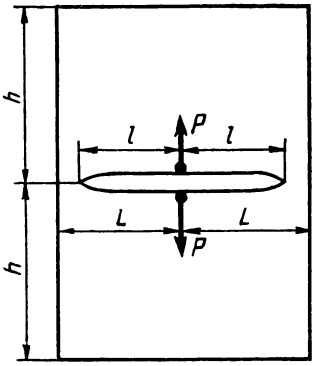
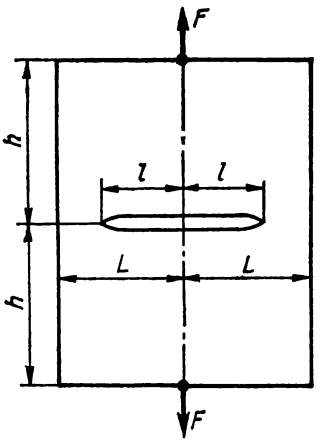


Рис. 4.82. Прямоугольная пластина с центральной трещиной при действии постоянной нормальной нагрузки на ее берегах и на двух гранях.

Рис. 4.83. Прямоугольная пластина с центральной трещиной при действии сосредоточенных нормальных сил на ее берегах.

Действие растягивающих сил на внешнем контуре пластины. Пусть пластина растягивается сосредоточенными силами, приложенными в средних точках граней, параллельных трещине, а остальная граница пластины и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.84). Решение задачи получено методом граничных коллокаций [27, 110]. Значения КИН приведены в табл. 4.49.



Действие сжимающих сил на внешнем контуре пластины. Пусть пластина сжимается двумя сосредоточенными силами, действующими на внешнем

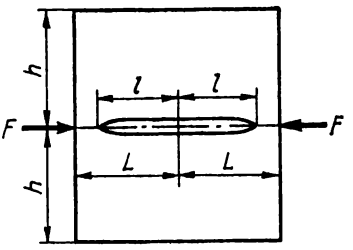


Рис. 4.84. Прямоугольная пластина с центральной трещиной при действии сосредоточенных растягивающих сил на внешнем контуре.

Рис. 4.85. Прямоугольная пластина с центральной трещиной при действии сосредоточенных сжимающих сил на внешнем контуре.

контуре вдоль линии трещины. Остальная граница и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.85). Решение задачи получено методом граничных коллокаций [27, 110]. Значения КИН приведены в табл. 4.50.

Таблица 4.48. Значения КИН $K_I/(P/\sqrt{\pi l})$ для прямоугольной пластины с центральной трещиной при действии сосредоточенных нормальных сил в средних точках ее берегов [77, 96]

$\frac{l}{L}$	h/L						
	0,25	0,75	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
0,1	1,346	1,047	1,0279	1,0142	1,0121	1,0120	1,0120
0,2	2,209	1,186	1,1115	1,0575	1,0497	1,0491	1,0491
0,3	3,323	1,418	1,2497	1,1326	1,1163	1,1151	1,1152
0,4	4,583	1,743	1,4416	1,2451	1,2191	1,2173	1,2174
0,5	5,979	2,158	1,6863	1,4058	1,3710	1,3686	1,3688
0,6	7,603	2,659	1,9891	1,6369	1,5957	1,5931	1,5935
0,7	10,03	3,227	2,3768	1,9857	1,9420	1,9394	1,9400
0,8	15,33	3,886	2,9511	2,5741	2,5315	2,5290	2,5300
0,9	27,06	4,982	4,1382	3,8609	3,9019	3,8165	3,8310

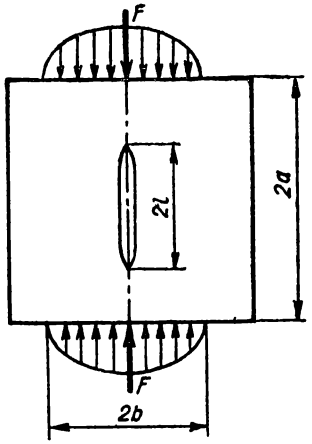
Таблица 4.49. Значения КИН $K_I/[(F/2L)\sqrt{\pi l}]$ для прямоугольной пластины с центральной трещиной при действии растягивающих сил на внешнем контуре [110]

$\frac{l}{L}$	h/L				
	0,5	0,75	1,0	1,5	2,0
0	3,692	2,530	1,925	1,292	1,065
0,1	3,675	2,532	1,927	1,294	1,070
0,2	3,641	2,542	1,933	1,301	1,084
0,3	3,630	2,570	1,944	1,315	1,111
0,4	3,699	2,623	1,962	1,341	1,154
0,5	3,905	2,708	1,989	1,387	1,221
0,6	4,304	2,818	2,033	1,466	1,326
0,7	4,915	2,941	2,118	1,608	1,506

Таблица 4.50. Значения КИН $K_I/[(F/2L)\sqrt{\pi l}]$ для прямоугольной пластины с центральной трещиной при действии сжимающих сил на внешнем контуре [110]

$\frac{l}{L}$	h/L				
	0,5	0,75	1,0	1,5	2,0
0	0,268	0,587	0,630	0,534	0,502
0,1	0,290	0,602	0,638	0,539	0,506
0,2	0,355	0,647	0,662	0,553	0,520
0,3	0,464	0,719	0,702	0,578	0,546
0,4	0,618	0,825	0,756	0,616	0,585
0,5	0,829	0,942	0,826	0,672	0,642
0,6	1,114	1,089	0,914	0,754	0,726
0,7	1,496	1,259	1,037	0,881	0,856

Рис. 4.86. Схема квадратного образца с продольной трещиной на осевое сжатие.



Квадратный образец с продольной трещиной на осевое сжатие. При определении трещиностойкости хрупких материалов, в частности сверхтвердых и керамических, а также твердых сплавов находят применение квадратные образцы с центральной продольной трещиной, сжимаемые вдоль нее сосредоточенными силами или распределенными усилиями (контактные напряжения) (рис. 4.86). Решение задачи об определении КИН в таком образце получено методом СИУ [121] при сжатии пластины сосредоточенными силами F ($b = 0$) или распределенной по двум ее сторонам нагрузкой

$$p(x) = (2F/\pi b^2)\sqrt{b^2 - x^2}, \quad -b \leqslant x \leqslant b, \quad p(x) = 0, \quad b < |x| \leqslant a,$$

с равнодействующей, равной F (x — декартова координата вдоль стороны пластины с началом на линии трещины). Значения КИН приведены в табл. 4.51. Аппроксимация полученных результатов методом наименьших квадратов дает формулы, расчет по которым приводит к отклоне-

Таблица 4.51. **Значения КИН $K_I/(F/\sqrt{a})$ при осевом сжатии квадратного образца с продольной трещиной [121]**

λ	$b = 0$	$b = 0{,}1a$	$b = 0{,}213a$	λ	$b = 0$	$b = 0{,}1a$	$b = 0{,}213a$
0,1	0,181	0,177	0,164	0,5	0,533	0,515	0,457
0,2	0,266	0,260	0,244	0,6	0,651	0,623	0,531
0,3	0,347	0,338	0,315	0,7	0,802	0,753	0,596
0,4	0,434	0,421	0,387				

ниям от исходных данных (см. табл. 4.51) не более 0,55 % при $0{,}3 \leqslant \lambda = l/a \leqslant 0{,}7$ [96]:

$$K_I = (F/\sqrt{2a})\, 2{,}4735\,(0{,}0223 + 0{,}7684\lambda - 0{,}9079\lambda^2 + \lambda^3) \quad (b = 0),$$

$$K_I = (F/\sqrt{2a})\, 1{,}2968\,(0{,}1003 + \lambda - 0{,}6576\lambda^2 + \lambda^3) \quad (b = 0{,}1a),$$

$$K_I = (F/\sqrt{2a})\, 0{,}8245\,(0{,}2590 + 0{,}6158\lambda + 1{,}3773\lambda^2 - \lambda^3) \quad (b = 0{,}213a).$$

В более узком диапазоне длин трещин $0{,}3 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5$ (важном для практики испытаний) предложены упрощенные аппроксимационные формулы [121]

$$K_I/(F/\sqrt{2a}) = 0{,}2265 + 0{,}6195\lambda + 0{,}8717\lambda^2 \approx 0{,}0956 + 1{,}305\lambda \quad (b = 0),$$

$$K_I/(F/\sqrt{2a}) = 0{,}223 + 0{,}61\lambda + 0{,}8\lambda^2 \approx 0{,}1019 + 1{,}242\lambda \quad (b = 0{,}1a),$$

$$K_I/(F\sqrt{2a}) = 0{,}121 + 1{,}125\lambda - 0{,}155\lambda^2 \approx 0{,}1446 + 1{,}005\lambda \quad (b = 0{,}213a),$$

причем расчет по линейному двучлену дает результаты, отклоняющиеся от данных по квадратичной формуле не более чем на 0,75 %.

Квадратная пластина с центральной трещиной и двумя одинаковыми круговыми отверстиями. Пусть квадратная пластина с центральной продольной трещиной растягивается двумя сосредоточенными силами, приложенными к граничным контурам круговых отверстий. Остальная часть границы пластины и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.87). Значения КИН, полученные методом СИУ [96], приведены в табл. 4.52.

Таблица 4.52. **Значения КИН $K_I/(F/\sqrt{\pi l})$ при осевом растяжении квадратной пластины с центральной трещиной и двумя круговыми отверстиями при $r/a = 0{,}1$ и $\varkappa = 2$ [96]**

$\frac{l}{a}$	h/a			$\frac{l}{a}$	h/a		
	0,2	0,4	0,6		0,2	0,4	0,6
0,1	0,1768	0,2471	0,2696	0,5	1,805	1,663	1,575
0,2	0,7203	0,5808	0,5648	0,6	2,131	2,015	1,935
0,3	1,159	0,9531	0,8881	0,7	2,505	2,406	2,334
0,4	1,495	1,314	1,227	0,8	2,995	2,917	2,854

Прямоугольный образец с центральной трещиной для испытаний на осевое растяжение. При исследованиях листовых материалов на трещиностойкость применяются [28] квадратные образцы с центральной трещиной и двумя одинаковыми круговыми жесткими включениями, нагруженными растягивающими силами (рис. 4.88, $a = b$). Зависимости КИН $K_I/(F\sqrt{a})$ от относительной длины трещины $\lambda = l/a$, полученные методом СИУ [122], приведены на рис. 4.89. Аппроксимация полученных результатов методом наименьших квадратов дает простые формулы для вычисления КИН в условиях плоской деформации при $0{,}25 \leqslant \mu \leqslant 0{,}36$ и $0{,}05 \leqslant \eta \leqslant 0{,}1$ ($\eta = r/a = \varepsilon\alpha$, $\alpha = h/a$)

$$K_I = (F/\sqrt{2a}) \begin{cases} 1{,}773 + 0{,}681\mu - 0{,}160\varepsilon & (0{,}08 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}52), \\ 1{,}265 + 0{,}457\lambda + 1{,}273\lambda^2 + 0{,}335\mu & (0{,}52 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}8) \end{cases} \tag{4.19}$$

при $\alpha = 0{,}18$ и

$$K_I = (F/\sqrt{2a}) \begin{cases} 1{,}742 + 0{,}733\mu - 0{,}156\varepsilon & (0{,}1 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5), \\ 1{,}468 - 0{,}305\lambda + 1{,}881\lambda^2 + 0{,}407\mu & (0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}8) \end{cases} \tag{4.20}$$

при $\alpha = 0{,}19$.

Аналогичные формулы для случая плоского напряженного состояния ($0{,}25 \leqslant \mu \leqslant 0{,}36$, $0{,}05 \leqslant \eta \leqslant 0{,}1$) имеют вид [122]

$$K_I = (F/\sqrt{2a}) \begin{cases} 1{,}809 + 0{,}401\mu - 0{,}160\varepsilon & (0{,}08 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}52), \\ 1{,}283 + 0{,}457\lambda + 1{,}273\lambda^2 + 0{,}197\mu & (0{,}52 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}8) \end{cases} \tag{4.21}$$

при $\alpha = 0{,}18$ и

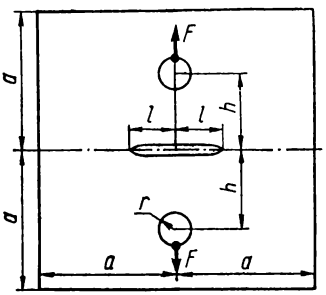
$$K_I = (F/\sqrt{2a}) \begin{cases} 1{,}781 + 0{,}331\mu - 0{,}156\varepsilon & (0{,}1 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5), \\ 1{,}489 - 0{,}305\lambda + 1{,}881\lambda^2 + 0{,}239\mu & (0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}8) \end{cases} \tag{4.22}$$

при $\alpha = 0{,}19$.

При малых удалениях жестких включений от линии трещины ($\alpha < 0{,}22$) коэффициент интенсивности вначале растет с увеличением λ, достигая максимума $K_{I\,max}$, после чего падает до минимума $K_{I\,min}$. Относительная разность экстремальных значений K_I

$$\delta = [(K_{I\,max} - K_{I\,min})/(K_{I\,max} + K_{I\,min})]\ 100\ \%$$

при $0{,}16 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}22$ мала, так что можно говорить об участке стабилизации КИН в некотором интервале длин трещин от λ_1 до λ_2. Если $\alpha =$



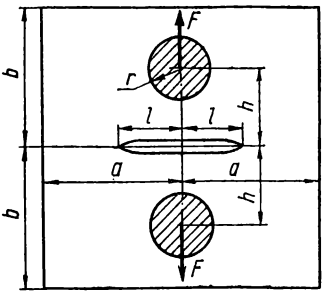
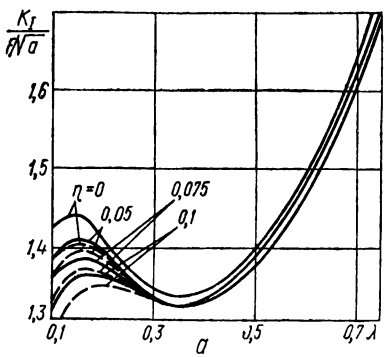


Рис. 4.87. Осевое растяжение квадратной пластины с центральной трещиной и двумя круговыми отверстиями.

Рис. 4.88. Схема прямоугольного образца с центральной трещиной для испытаний на осевое растяжение.

$= 0{,}18$, то $\lambda_1 = 0{,}08$, $\lambda_2 = 0{,}52$ при $\delta = 2{,}5\ \%$, а если $\alpha = 0{,}19$, то $\lambda_1 = 0{,}10$ и $\lambda_2 = 0{,}50$ при $\delta = 1{,}6\ \%$. Формулы (4.19) — (4.22) определяют КИН K_I вне участка стабилизации, а внутри этого участка его среднее значение $\overline{K}_I = (K_{I\,max} + K_{I\,min})/2$ с относительной погрешностью, не превышающей 0,5 %.



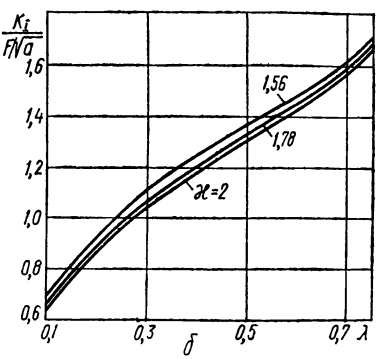


Рис. 4.89. Зависимости КИН $K_I/(F/\sqrt{a})$ от безразмерной длины трещины $\lambda = l/a$ для квадратного образца с центральной трещиной на осевое растяжение при $\varkappa = 1{,}78$, $\alpha = h/a = 0{,}18$ (сплошные линии), $\alpha = 0{,}19$ (штриховые линии) (*а*) и при $\eta = r/a = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}65$ (*б*) [122].

При $\alpha > 0{,}22$ квадратный образец может быть использован для испытаний с монотонно увеличивающимся по мере развития трещины КИН. Расчеты показали, что при $\alpha = 0{,}65$ КИН K_I уже практически не зависит от относительного радиуса жестких включений при $0{,}05 \leqslant \eta \leqslant 0{,}1$. Учет жесткого включения по сравнению со случаем действия сосредоточенных сил ($r = 0$) приводит к относительному изменению K_I при $\lambda < 0{,}8$ не более 1 %.

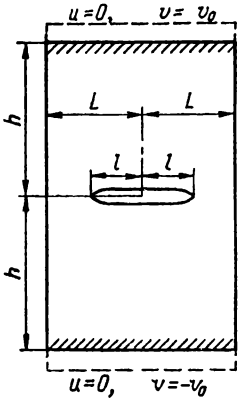


Рис. 4.90. Растяжение прямоугольной пластины с защемленными концами, ослабленной центральной трещиной.

Аппроксимационные формулы при $\alpha = 0{,}65$ и $0{,}05 \leqslant \eta \leqslant 0{,}1$, $0{,}25 \leqslant \mu \leqslant 0{,}36$ таковы [122]:

$$K_I = (F\sqrt{\lambda}/\sqrt{2a})\,[2{,}427 + 0{,}268\lambda - \\ - 1{,}867\lambda^2 + 2{,}465\lambda^3 + \mu\,(1{,}670 - 1{,}545\lambda + \\ + 0{,}023\lambda^2)] \quad (0{,}05 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}8) \qquad (4.23)$$

для плоской деформации и

$$K_I = (F\sqrt{\lambda})/\sqrt{2a})\,[2{,}515 + 0{,}186\lambda - \\ - 1{,}866\lambda^2 + 2{,}465\lambda^3 + \mu\,(0{,}982 - 0{,}909\lambda + \\ + 0{,}013\lambda^2)] \quad (0{,}05 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}8) \qquad (4.24)$$

для плоского напряженного состояния.

Относительная погрешность формул (4.23) и (4.24) не превышает 0,5 %.

Данные по КИН при растяжении квадратной пластины с центральной трещиной сосредоточенными силами ($r = 0$) приведены также в работе [114] для $h/a = 0{,}6$. Изучался также случай квадратного образца с диагональной трещиной [96, 123].

В работе [124] рассмотрен аналогичный прямоугольный образец с центральной трещиной при $b/a = 0{,}7$ (см. рис. 4.88). Аппроксимационные формулы для КИН при $\alpha = h/b = 0{,}19$ имеют вид

$$K_I = (F/\sqrt{2b}) \begin{cases} 1{,}758 + 0{,}629\mu - 0{,}215\varepsilon & (0{,}075 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}525), \\ 1{,}858 - 1{,}328\lambda + 2{,}263\lambda^2 + 0{,}405\mu & (0{,}525 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}8) \end{cases}$$

для плоской деформации и

$$K_I = (F/\sqrt{2b}) \begin{cases} 1{,}815 + 0{,}303\mu - 0{,}215\varepsilon & (0{,}075 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}525), \\ 1{,}894 - 1{,}329\lambda + 2{,}263\lambda^2 + 0{,}194\mu & (0{,}525 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}8) \end{cases}$$

для плоского напряженного состояния ($\lambda = l/b$).

Отметим, что длина интервала стабилизации, на котором КИН K_I практически не зависит от параметра λ, больше для прямоугольной пластины, чем для квадратной. Однако при этом также увеличивается относительная разница экстремальных значений K_I ($\delta = 2{,}4$ %).

Пластина с защемленными концами. Пусть боковые грани пластины и берега трещины свободны от нагрузки, а на гранях, параллельных трещине, заданы постоянные нормальные смещения $v^{\pm} = \pm v_0$ и касательные смещения отсутствуют (рис. 4.90). Решение задачи получено методом граничных коллокаций в работах [109, 110]. Значения КИН приведены в табл. 4.53 при известном среднем напряжении σ_0 ($\sigma_0 = F/2L$, где F — главный вектор внешних усилий) и в табл. 4.54 при заданных смещениях. Здесь K_0—КИН для бесконечной полосы с полубесконечной трещиной,

Таблица 4.53. Значения КИН $K_I/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (σ_0 — среднее напряжение) при растяжении прямоугольной пластины с защемленными концами, ослабленной центральной трещиной, в условиях плоского напряженного состояния ($\mu = 0{,}3$) [109, 110]

$\frac{l}{L}$	h/L										
	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,5	1,8	∞
0	1,034	1,037	1,042	1,045	1,047	1,046	1,044	1,038	1,026	1,015	1,000
0,1	0,986	1,013	1,030	1,039	1,045	1,047	1,047	1,042	1,031	1,021	1,006
0,2	0,901	0,962	1,002	1,027	1,043	1,051	1,055	1,056	1,048	1,038	1,023
0,3	0,849	0,926	0,984	1,022	1,049	1,065	1,075	1,081	1,078	1,070	1,058
0,4	0,847	0,927	0,992	1,040	1,074	1,097	1,111	1,125	1,126	1,119	1,109
0,5	0,891	0,974	1,040	1,092	1,130	1,157	1,175	1,194	1,199	1,19	1,187
0,6	0,995	1,076	1,143	1,194	1,233	1,262	1,282	1,304	1,312	...	1,303
0,7	1,18	1,262	1,327	1,376	1,413	1,442	1,462	1,47	1,49	...	1,488
0,8	—	1,61	1,67	1,71	1,75	1,77	1,78	...	...	...	1,816

Таблица 4.54. Значения КИН K_I/K_0 ($K_0 = Ev_0/\sqrt{h\,(1-\mu^2)}$) при растяжении прямоугольной пластины с защемленными концами, ослабленной центральной трещиной, в условиях плоского напряженного состояния ($\mu = 0{,}3$) [109, 110]

$\frac{l}{L}$	h/L									
	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,5	1,8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,846	0,778	0,720	0,672	0,630	0,595	0,564	0,512	0,452	0,408
0,2	0,989	0,956	0,916	0,875	0,835	0,799	0,764	0,703	0,629	0,572
0,3	1,004	0,998	0,983	0,961	0,934	0,907	0,878	0,823	0,749	0,688
0,4	0,998	1,000	0,997	0,989	0,975	0,959	0,940	0,898	0,835	0,777
0,5	0,994	0,994	0,994	0,992	0,986	0,980	0,970	0,944	0,898	0,84
0,6	0,990	0,988	0,987	0,987	0,986	0,986	0,983	0,971	0,944	...
0,7	0,98	0,982	0,980	0,981	0,981	0,987	0,989	0,97	0,97	...
0,8	—	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	...	...	...

Таблица 4.55. Значения КИН K_I/K_0 ($K_0 = 8Gv_0/[(1+\varkappa)\sqrt{h}]$) для прямоугольной пластины с центральной трещиной при равномерном смещении ее концов и отсутствии касательных напряжений [109, 110]

$\frac{l}{L}$	h/L									
	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,5	1,8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,825	0,756	0,700	0,654	0,615	0,583	0,554	0,508	0,456	0,417
0,2	0,990	0,951	0,908	0,866	0,827	0,792	0,759	0,703	0,636	0,583
0,3	1,016	1,009	0,992	0,969	0,942	0,914	0,886	0,833	0,763	0,707
0,4	1,011	1,018	1,019	1,012	1,000	0,984	0,964	0,921	0,857	0,803
0,5	1,006	1,015	1,024	1,028	1,027	1,020	1,009	0,979	0,929	0,880
0,6	1,006	1,015	1,025	1,032	1,036	1,035	1,032	1,016	0,983	0,936
0,7	1,01	1,017	1,024	1,031	1,036	1,040	1,042	1,040	1,02	0,92
0,8	—	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,05	1,04	...	...

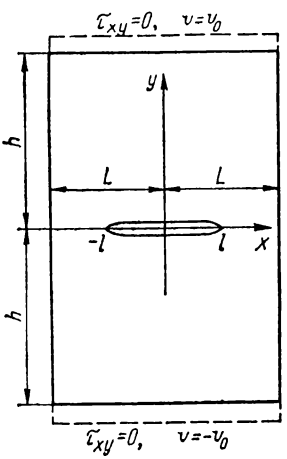
когда на гранях касательные смещения отсутствуют, а нормальные $v_0^{\pm} = \pm v_0$ (см. п. 3.9). Из таблицы 4.54 видно, что в широком диапазоне изменения параметра λ КИН K_I близок к K_0.

Данные по КИН приведены также в работах [8, 27, 36, 112, 125, 126].

Таблица 4.56. **Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ при растяжении квадратной пластины с частично защемленными боковыми гранями [34]**

$\frac{h}{L}$	l/L								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,25	0,9410	0,9717	1,0200	1,0816	1,1523	1,2282	1,3054	1,3510	1,1783
0,50	0,9507	0,9768	1,0166	1,0641	1,1095	1,1360	1,1148	1,0007	0,7408
0,75	0,9687	0,9870	1,0124	1,0371	1,0489	1,0304	0,9600	0,8163	0,5837
1,00	0,9117	0,9200	0,9284	0,9286	0,9105	0,8628	0,7747	0,6382	0,4487

Равномерное смещение концов пластины при отсутствии касательных напряжений. Пусть на боковых гранях пластины и на берегах трещины отсутствует нагрузка, а на гранях, параллельных трещине, заданы постоянные нормальные смещения и касательные напряжения отсутствуют (рис. 4.91). Такая задача эквивалентна задаче о растяжении бесконечной полосы с периодической системой поперечных трещин, и при известном среднем напряжении на торцах пластины данные по КИН уже приведены



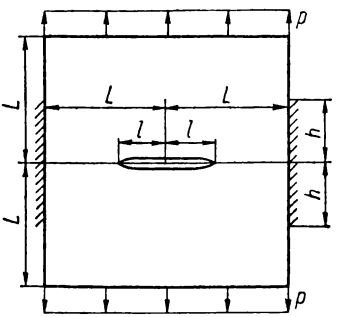


Рис. 4.91. Прямоугольная пластина с центральной трещиной при равномерном смещении ее концов и отсутствии касательных напряжений.

Рис. 4.92. Растяжение квадратной пластины при смешанных граничных условиях на боковых гранях.

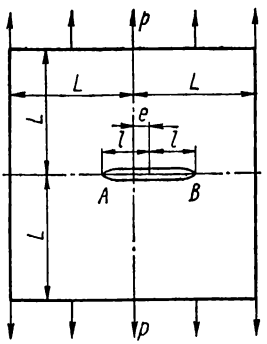
(см. п. 3.10). В табл. 4.55 приведены значения КИН, полученные методом граничных коллокаций [109, 110], при заданных на торцах смещениях.

Квадратная пластина при смешанных граничных условиях на боковых гранях. Пусть средние участки боковых граней квадратной пластины жестко защемлены, т. е. на них отсутствуют смещения. Остальная часть

боковых граней и берега трещины свободны от нагрузки. На торцевых гранях заданы постоянные растягивающие напряжения, а касательные напряжения отсутствуют (рис. 4.92). Значения КИН, полученные модифицированным методом граничных коллокаций [34], приведены в табл. 4.56.

4.12. Прямоугольная пластина с произвольно размещенными внутренними трещинами

Эксцентрически размещенная продольная трещина. Пусть вдоль средней линии квадратной пластины произвольно размещена трещина, свободная от нагрузки. На гранях, параллельных трещине, заданы постоянные



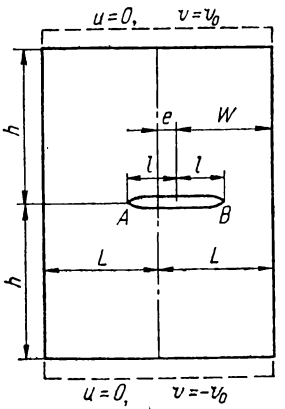


Рис. 4.93. Растяжение квадратной пластины с эксцентрической продольной трещиной.

Рис. 4.94. Прямоугольная пластина с эксцентрической продольной трещиной при заданных смещениях на двух ее гранях.

растягивающие напряжения, а на других гранях нагрузка отсутствует (рис. 4.93). Значения КИН, полученные методом СИУ [115], приведены в табл. 4.57. Данные по КИН при растяжении прямоугольных пластин с эксцентрически размещенной продольной трещиной имеются также в работах [127, 128].

Пусть на гранях прямоугольной пластины, параллельных трещине, заданы постоянные нормальные смещения, а касательные смещения отсутствуют. Остальная граница пластины свободна от нагрузки (рис. 4.94). Значения КИН $K_I(A)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ и $K_I(B)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (σ_0 — среднее напряжение) при $\mu = 0{,}3$ (плоское напряженное состояние), полученные методом граничных коллокаций [129], приведены в табл. 4.58—4.60. Данные по КИН имеются также в работе [128].

Центральная произвольно ориентированная трещина. Пусть пластина ослаблена произвольно ориентированной прямолинейной трещиной, середина которой находится в центре пластины. Боковые грани и берега трещины свободны от нагрузки, а на торцевых гранях заданы постоянные растягивающие напряжения (рис. 4.95). Значения КИН, полученные модифицированным методом конформных отображений с применением

Таблица 4.57. Значения КИН при растяжении квадратной пластины с эксцентрической продольной трещиной [115]

$\frac{l}{L}$	e/L = 0	0,1		0,2		0,3		0,4	
	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(A)}{p\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I(B)}{p\sqrt{\pi l}}$
0,1	1,0140	1,0139	1,0140	1,0151	1,0161	1,0246	1,0304	1,0789	1,1227
0,2	1,0554	1,0553	1,0559	1,0596	1,0692	1,0975	1,1527	...	...
0,3	1,1233	1,1234	1,1269	1,1345	1,1759	1,2431	1,5170	...	...
0,4	1,2162	1,2172	1,2326	1,2469	1,3870	...	...	...	...
0,5	1,3339	1,3370	1,3919	1,4278	1,9113	...	...	...	...
0,6	1,4810	1,4880	1,6669	...	...	...	...	—	—
0,7	1,6774	1,6972	2,3186	...	...	—	—	—	—
0,8	1,9914	...	...	—	—	—	—	—	—
0,9	2,7129	—	—	—	—	—	—	—	—

Таблица 4.58. Значения КИН $K_I(B)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (над чертой) и $K_I(A)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (под чертой) для эксцентрической продольной трещины в прямоугольной пластине при заданных смещениях на двух ее гранях для $L = 2h$ [129]

$\frac{e}{L}$	l/W = 0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0	1,037 / 1,037	1,013 / 1,013	0,962 / 0,962	0,926 / 0,926	0,927 / 0,927	0,974 / 0,974	1,076 / 1,076	1,262 / 1,262
0,1	1,034 / 1,035	1,018 / 1,019	0,974 / 0,974	0,935 / 0,936	0,922 / 0,925	0,944 / 0,948	1,004 / 1,011	1,12 / 1,13
0,2	1,035 / 1,035	1,022 / 1,023	0,983 / 0,984	0,944 / 0,947	0,922 / 0,926	0,924 / 0,930	0,953 / 0,964	1,02 / 1,03
0,3	1,035 / 1,035	1,024 / 1,025	0,992 / 0,994	0,955 / 0,959	0,926 / 0,933	0,914 / 0,923	0,921 / 0,934	0,95 / 0,97
0,4	1,033 / 1,034	1,025 / 1,027	0,999 / 1,003	0,966 / 0,972	0,936 / 0,945	0,914 / 0,927	0,905 / 0,922	0,91 / 0,93
0,5	1,029 / 1,031	1,022 / 1,026	1,002 / 1,009	0,975 / 0,985	0,947 / 0,960	0,922 / 0,939	...	...

Таблица 4.59. Значения КИН $K_I(B)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (над чертой) и $K_I(A)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (под чертой) для эксцентрической продольной трещины в квадратной пластине ($L = h$) при заданных смещениях на двух ее гранях [129]

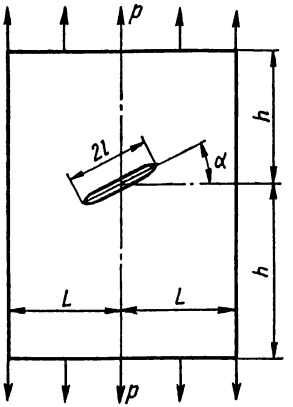
$\frac{e}{L}$	l/W							
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0	1,045	1,047	1,055	1,075	1,111	1,175	1,282	1,462
	1,045	1,047	1,055	1,075	1,111	1,175	1,282	1,462
0,1	1,044	1,045	1,051	1,065	1,091	1,136	1,210	1,33
	1,045	1,047	1,054	1,069	1,097	1,142	1,215	1,33
0,2	1,041	1,041	1,045	1,054	1,072	1,104	1,155	1,24
	1,042	1,044	1,051	1,063	1,083	1,116	1,165	1,24
0,3	1,035	1,035	1,037	1,043	1,055	1,078	1,114	1,17
	1,037	1,039	1,045	1,055	1,071	1,094	1,127	1,18
0,4	1,026	1,026	1,026	1,030	1,040	1,056	1,083	1,12
	1,029	1,032	1,038	1,046	1,058	1,074	1,097	1,13
0,5	1,014	1,014	1,014	1,017	1,024	1,038	1,060	1,09
	1,018	1,020	1,026	1,034	1,044	1,056	1,071	1,09
0,6	0,998	0,997	0,997	1,000	1,006	1,023	...	...
	1,002	1,004	1,011	1,016	1,025	1,035		

Таблица 4.60. Значения КИН $K_I(B)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (над чертой) и $K_I(A)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (под чертой) для эксцентрической продольной трещины в прямоугольной пластине при заданных смещениях на двух ее гранях для $h = 1{,}5L$ [129]

$\frac{e}{L}$	l/W							
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0	1,026	1,031	1,048	1,078	1,126	1,199	1,312	1,49
	1,026	1,031	1,048	1,078	1,126	1,199	1,312	1,49
0,1	1,025	1,028	1,041	1,065	1,104	1,162	1,249	1,38
	1,026	1,030	1,044	1,068	1,105	1,159	1,237	1,35
0,2	1,022	1,024	1,034	1,054	1,085	1,132	1,202	1,30
	1,024	1,027	1,039	1,059	1,089	1,130	1,187	1,27
0,3	1,018	1,019	1,027	1,043	1,069	1,108	1,165	1,24
	1,020	1,023	1,033	1,050	1,074	1,106	1,150	1,21
0,4	1,011	1,012	1,019	1,032	1,054	1,088	1,134	1,20
	1,014	1,017	1,026	1,040	1,060	1,086	1,121	1,17
0,5	1,003	1,004	1,010	1,022	1,040	1,068	1,106	1,15
	1,007	1,009	1,018	1,030	1,048	1,070	1,101	1,14
0,6	0,994	0,994	0,998	1,008	1,021	1,039	1,057	...
	0,998	1,001	1,010	1,023	1,043	1,067	1,105	

граничных коллокаций [130], приведены в табл. 4.61. Данные по КИН имеются также в работах [8, 131, 132].

Для случая, когда на берегах трещины действуют постоянные нормальные усилия, а внешний контур пластины свободен от нагрузки (рис. 4.96), значения КИН, полученные методом СИУ [77, 96], приведены в табл. 4.62. Данные по КИН имеются также в работах [8, 131].



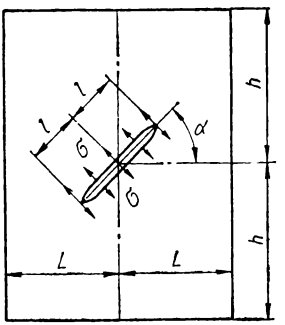
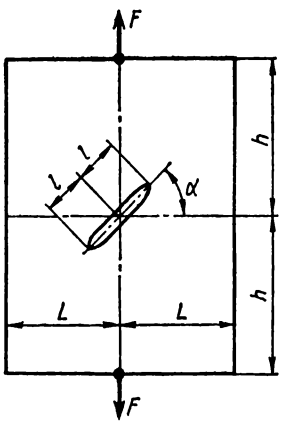


Рис. 4.95. Растяжение постоянными усилиями прямоугольной пластины с центральной произвольно ориентированной трещиной.

Рис. 4.96. Действие постоянного давления на центральной произвольно ориентированной трещине в прямоугольной пластине.



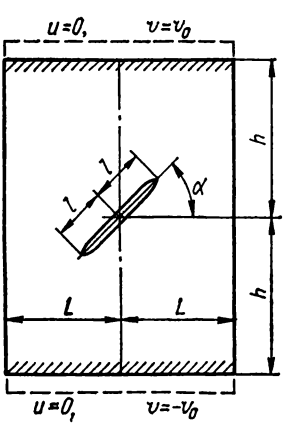


Рис. 4.97. Растяжение двумя сосредоточенными силами прямоугольной пластины с центральной произвольно ориентированной трещиной.

Рис. 4.98. Прямоугольная пластина с центральной произвольно ориентированной трещиной при заданных смещениях на двух ее гранях.

Таблица 4.61. **Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ (над чертой) и $K_{II}/(p\sqrt{\pi l})$ (под чертой) при растяжении постоянными усилиями прямоугольной пластины с центральной произвольно ориентированной трещиной для $h/L = 2$ [130]**

$\frac{l}{L}$	α				
	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$
0,1	0,9391 0,2502	0,7557 0,4339	0,5046 0,5018	0,2527 0,4352	0,0678 0,2516
0,2	0,9577 0,2510	0,7730 0,4367	0,5181 0,5072	0,2605 0,4417	0,0701 0,2560
0,3	0,9904 0,2527	0,8025 0,4417	0,5406 0,5162	0,2730 0,4521	0,0736 0,2631
0,4	1,0402 0,2560	0,8456 0,4497	0,5719 0,5290	0,2896 0,4660	0,0783 0,2721
0,5	1,1128 0,2619	0,9046 0,4617	0,6119 0,5458	0,3099 0,4827	0,0837 0,2825
0,6	1,2183 0,2725	0,984 0,480	0,6611 0,5674	0,3332 0,5022	0,0896 0,2939
0,7	1,378 0,290	1,091 0,508	0,721 0,595	0,359 0,524	0,0957 0,3060
0,8	1,653 0,307	1,245 0,550	0,795 0,630	0,388 0,549	0,102 0,319

Таблица 4.62. **Значения КИН при действии постоянного давления на центральной произвольно ориентированной трещине в прямоугольной пластине [77, 96]**

$\frac{l}{L}$	$h/L = 1$						$h/L = 2$			
	$\alpha = 0$	$\alpha = \pi/12$		$\alpha = \pi/6$		$\alpha = \pi/4$	$\alpha = 0$	$\alpha = \pi/4$		$\alpha = \pi/2$
	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{\pi l}}$	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi l}}$
0,1	1,014	1,013	0,001	1,013	0,001	1,012	1,006	1,010	—0,001	1,012
0,2	1,055	1,054	0,002	1,052	0,002	1,050	1,025	1,041	—0,005	1,046
0,3	1,123	1,122	0,004	1,117	0,005	1,115	1,058	1,093	—0,012	1,100
0,4	1,216	1,216	0,005	1,212	0,007	1,209	1,111	1,169	—0,019	1,174
0,5	1,334	1,339	0,003	1,341	0,007	1,338	1,188	1,269	—0,028	1,264
0,6	1,482	1,497	—0,007	1,512	0,006	1,507	1,305	1,400	—0,036	1,369
0,7	1,678	1,708	—0,028	1,739	0,002	1,729	1,490	1,568	—0,043	1,489
0,8	1,991	2,019	—0,065	2,053	—0,010	2,022	1,817	1,784	—0,047	1,624

Таблица 4.63. Значения КИН $K_I/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (над чертой) и $K_{II}/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (под чертой) ($\sigma_0 = F/(2L)$) при растяжении сосредоточенными силами прямоугольной пластины с центральной произвольно ориентированной трещиной для $l/L = 0{,}5$ [95]

$\frac{h}{L}$	α						
	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
0,75	2,708	2,606	2,322	1,894	1,214	—0,030	—1,146
	0	0,587	1,096	1,528	1,910	1,842	0
1,0	1,989	1,899	1,611	1,109	0,404	—0,403	—0,826
	0	0,511	0,982	1,327	1,417	1,022	0
2,0	1,222	1,147	0,930	0,601	0,227	—0,082	—0,207
	0	0,287	0,523	0,650	0,608	0,372	0
3,0	1,181	1,116	0,933	0,646	0,343	0,094	—0,032
	0	0,255	0,492	0,551	0,510	0,330	0

Таблица 4.64. Значения КИН $K_I/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ для прямоугольной пластины с центральной произвольно ориентированной трещиной при заданных смещениях на двух ее гранях [132]

$\frac{h}{L}$	$\frac{l}{L}$	α						
		0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
0,5	0,0	1,0366	0,9798	0,8245	0,6122	0,3999	0,2445	0,1876
	0,1	1,0119	0,9555	0,8025	0,5954	0,3908	0,2425	0,1884
	0,2	0,9614	0,9035	0,7503	0,5517	0,3651	0,2357	0,1897
	0,3	0,9255	0,8597	0,6930	0,4942	0,3264	0,2220	0,1877
	0,4	0,9264	0,8439	0,6463	0,4336	0,2774	0,1962	0,1740
	0,5	0,9728	0,8380	0,6143	0,3745	—	—	—
	0,6	1,0748	0,9211	0,5954	—	—	—	—
	0,7	1,2606	1,0344	—	—	—	—	—
	0,8	1,6076	—	—	—	—	—	—
1,0	0,0	1,0440	0,9762	0,7904	0,5367	0,2830	0,0972	0,0293
	0,1	1,0465	0,9778	0,7906	0,5360	0,2827	0,0982	0,0308
	0,2	1,0551	0,9840	0,7915	0,5336	0,2816	0,1009	0,0356
	0,3	1,0744	0,9982	0,7948	0,5219	0,2785	0,1050	0,0436
	0,4	1,1112	1,0260	0,8026	0,5221	0,2724	0,1100	0,0548
	0,5	1,1752	1,0749	0,8179	0,5120	0,2624	0,1154	0,0688
	0,6	1,2822	1,1567	0,8450	0,4989	0,2484	0,1209	0,0854
	0,7	1,4619	1,2918	0,8901	0,4833	0,2309	0,1257	0,1001
	0,8	1,7892	1,5263	0,9656	0,4663	0,2113	0,1285	0,1121
1,5	0,0	1,0257	0,9563	0,7669	0,5081	0,2492	0,5098	—0,0000
	0,1	1,0310	0,9612	0,7706	0,5104	0,2504	0,0602	—0,0094
	0,2	1,0476	0,9763	0,7819	0,5171	0,2535	0,0615	—0,0086
	0,3	1,0777	1,0034	0,8012	0,5275	0,2577	0,0633	—0,0071
	0,4	1,1256	1,0458	0,8295	0,5405	0,2615	0,0652	—0,0066
	0,5	1,1991	1,1091	0,8685	0,5548	0,2633	0,0668	—0,0012
	0,6	1,3121	1,2036	0,9212	0,5698	0,2620	0,0680	0,0039
	0,7	1,4939	1,3490	0,9936	0,5845	0,2567	0,0687	0,0109

Для случая, когда пластина растягивается двумя сосредоточенными силами, приложенными в средних точках противоположных граней, а остальная граница и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.97), значения КИН, полученные методом граничных коллокаций [95], приведены в табл. 4.63. Известны также результаты по КИН [8, 131], когда пластина нагружена по кромкам растягивающими напряжениями, распределенными по параболическому закону.

Таблица 4.65. Значения КИН $K_{II}/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ для прямоугольной пластины с центральной произвольно ориентированной трещиной при заданных смещениях на двух ее гранях [132]

$\frac{h}{L}$	$\frac{l}{L}$	α						
		0	π/12	π/6	π/4	π/3	5π/12	π/2
0,5	0,0	0,0000	0,2123	0,3677	0,4245	0,3676	0,2123	0,0000
	0,1	0,0000	0,2100	0,3623	0,4161	0,3582	0,2060	0,0000
	0,2	0,0000	0,2079	0,3526	0,3957	0,3330	0,1884	0,0000
	0,3	0,0000	0,2137	0,3499	0,3738	0,2989	0,1625	0,0000
	0,4	0,0000	0,2318	0,3602	0,3572	0,2624	0,1317	0,0000
	0,5	0,0000	0,2729	0,3842	0,3467	—	—	—
	0,6	0,0000	0,3140	0,4203	—	—	—	—
	0,7	0,0000	0,3906	—	—	—	—	—
	0,8	0,0000	—	—	—	—	—	—
1,0	0,0	0,0000	0,2537	0,4395	0,5075	0,4395	0,2537	0,0000
	0,1	0,0000	0,2549	0,4406	0,5074	0,4382	0,2525	0,0000
	0,2	0,0000	0,2586	0,4444	0,5074	0,4344	0,2486	0,0000
	0,3	0,0000	0,2662	0,4525	0,5085	0,4277	0,2414	0,0000
	0,4	0,0000	0,2793	0,4674	0,5118	0,4178	0,2302	0,0000
	0,5	0,0000	0,3007	0,4921	0,5188	0,4045	0,2148	0,0000
	0,6	0,0000	0,3344	0,5310	0,5309	0,3877	0,1952	0,0000
	0,7	0,0000	0,3882	0,5908	0,5501	0,3675	0,1722	0,0000
	0,8	0,0000	0,4801	0,6830	0,5785	0,3435	0,1469	0,0000
1,5	0,0	0,0000	0,2588	0,4483	0,5176	0,4483	0,2588	0,0000
	0,1	0,0000	0,2597	0,4497	0,5191	0,4493	0,2593	0,0000
	0,2	0,0000	0,2626	0,4542	0,5234	0,4523	0,2606	0,0000
	0,3	0,0000	0,2680	0,4626	0,5311	0,4566	0,2620	0,0000
	0,4	0,0000	0,2772	0,4765	0,5426	0,4616	0,2624	0,0000
	0,5	0,0000	0,2922	0,4980	0,5589	0,4666	0,2610	0,0000
	0,6	0,0000	0,3165	0,5309	0,5813	0,4712	0,2569	0,0000
	0,7	0,0000	0,3575	0,5809	0,6111	0,4752	0,2498	0,0000

Пусть на двух противоположных гранях пластины заданы постоянные нормальные смещения, а касательные смещения равны нулю. На берегах трещины и на двух остальных гранях нагрузка отсутствует (рис. 4.98). Значения КИН $K_I/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ и $K_{II}/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (σ_0 — среднее напряжение на защемленных кромках пластины), полученные методом граничных коллокаций [132], приведены в табл. 4.64 и 4.65 для случая плоского напряженного состояния при $\mu = 0{,}3$.

Квадратный образец с диагональной трещиной на сжатие. Для определения трещиностойкости хрупких материалов, в частности сверхтвердых и керамических, а также твердых сплавов применяются [16] квадратные образцы с центральной диагональной трещиной, сжимаемые вдоль нее сосредоточенными силами (рис. 4.99). Ниже приведены значения КИН

для такого образца при $r \leqslant 32a/127$, полученные методом СИУ в работе [121]:

l/a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$K_I\sqrt{a}/F$	0,146	0,210	0,270	0,330	0,400	0,480

На основе этих данных предложена аппроксимационная формула [121]

$$K_I = (F/\sqrt{2a}) \cdot 0{,}07071\,(3 + 5\lambda + 10\lambda^2) \quad (\lambda = l/a)$$

или в другом виде

$$K_I = (F/\sqrt{2c}) \cdot 2{,}4278\,(1 + 2{,}183\lambda_1 + 5{,}719\lambda_1^2) \quad (\lambda_1 = l/c,\ c = 1{,}31a),$$

относительная ошибка которой не превышает 0,55 % при $0{,}1 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}6$.

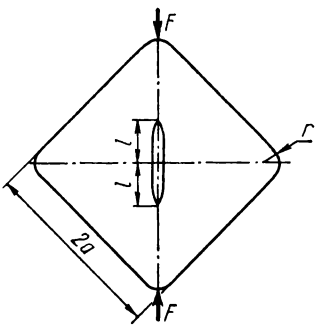


Рис. 4.99. Схема квадратного образца с диагональной трещиной на сжатие.

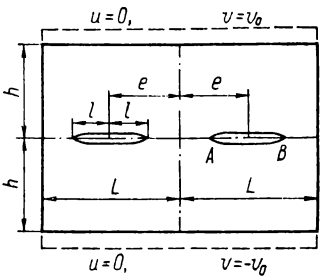


Рис. 4.100. Прямолинейная пластина с двумя симметричными коллинеарными трещинами при заданных смещениях на двух ее гранях.

В важном для практики испытаний более узком диапазоне изменения длин трещины ($0{,}4 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}6$) расчет КИН можно проводить по формуле [121]

$$K_I = (F/\sqrt{2a})\,0{,}03959\,(1 + 26{,}78\lambda).$$

Две симметричные коллинеарные трещины. Пусть пластина содержит две коллинеарные трещины одинаковой длины, симметрично размещенные относительно осевой линии. На гранях пластины, параллельных трещинам, заданы постоянные нормальные смещения, а касательные смещения равны нулю. Берега трещин и две остальные грани свободны от нагрузки (рис. 4.100). Значения КИН $K_I\,(A)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ и $K_I\,(B)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (σ_0 — среднее напряжение), полученные методом граничных коллокаций [129], приведены в табл. 4.66. В работах [114, 127] имеются также данные для КИН, когда на всех гранях пластины заданы напряжения.

4.13. Прямоугольная пластина с краевой трещиной

Действие нагрузки на берегах симметричной трещины. Пусть на берегах трещины, симметрично выходящей на контур пластины, заданы постоянные нормальные напряжения, а остальная граница свободна от

Таблица 4.66. **Значения КИН $K_I(A)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (над чертой) и $K_I(B)/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (под чертой) для прямоугольной пластины с двумя симметричными коллинеарными трещинами при заданных смещениях на двух ее гранях [129]**

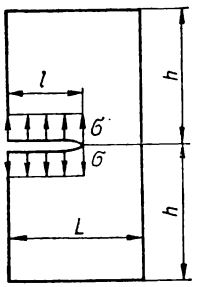
$\frac{h}{L}$	$\frac{e}{L}$	l/e							
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0,25	0,2	1,022 / 1,022	1,018 / 1,018	1,005 / 1,006	0,986 / 0,987	0,955 / 0,966	0,938 / 0,944	0,916 / 0,924	—
	0,3	1,020 / 1,020	1,013 / 1,013	0,988 / 0,988	0,957 / 0,967	0,927 / 0,928	0,907 / 0,910	0,897 / 0,904	—
	0,4	1,017 / 1,017	1,005 / 1,005	0,967 / 0,966	0,929 / 0,928	0,907 / 0,905	0,904 / 0,908	0,938 / 0,939	1,00 / 1,00
	0,5	1,014 / 1,013	0,996 / 0,995	0,946 / 0,944	0,909 / 0,906	0,909 / 0,905	0,953 / 0,946	1,051 / 1,040	1,23 / 1,21
	0,6	1,009 / 1,008	0,985 / 0,983	0,926 / 0,922	0,902 / 0,894	0,937 / 0,922	1,044 / 1,017	1,266 / 1,214	—
	0,7	1,002 / 1,000	0,971 / 0,996	0,909 / 0,896	0,906 / 0,880	—	—	—	—
1,0	0,2	1,040 / 1,042	1,041 / 1,043	1,045 / 1,049	1,053 / 1,058	1,065 / 1,072	1,084 / 1,089	1,116 / 1,111	1,18 / 1,13
	0,3	1,036 / 1,036	1,039 / 1,037	1,046 / 1,042	1,060 / 1,052	1,080 / 1,067	1,109 / 1,089	1,151 / 1,119	1,22 / 1,16
	0,4	1,029 / 1,027	1,033 / 1,029	1,045 / 1,037	1,065 / 1,052	1,094 / 1,075	1,137 / 1,109	1,199 / 1,157	1,29 / 1,23
	0,5	1,109 / 1,016	1,024 / 1,018	1,043 / 1,030	1,073 / 1,055	1,118 / 1,095	1,183 / 1,157	1,280 / 1,252	—
	0,6	1,005 / 1,000	1,014 / 1,003	1,042 / 1,024	1,090 / 1,071	1,162 / 1,154	1,272 / 1,303	—	—
	0,7	0,988 / 0,979	1,002 / 0,987	1,052 / 1,032	1,135 / 1,147	—	—	—	—

нагрузки (рис. 4.101). Значения КИН, полученные методом конформного отображения [125, 133], приведены в табл. 4.67. Данные по КИН для рассматриваемого случая нагрузки имеются также в работах [7, 8, 56, 113, 115, 134]. Случай сосредоточенных сил изучен в работах [115, 135—137].

Образец в виде двухконсольной балки (ДКБ-образец). Образец имеет форму прямоугольника с симметричной краевой трещиной, которая раскрывается под действием сосредоточенных сил (рис. 4.102). Такие образцы применяются в механике разрушения при испытаниях на трещиностойкость при плоской деформации. Зависимости КИН от относительной длины трещины, полученные методом граничных коллокаций [138], представлены на рис. 4.103. Численные результаты для КИН имеются

Таблица 4.67. Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$ для прямоугольной пластины с краевой симметричной трещиной под давлением [125, 133]

$\frac{L}{2h}$	l/L							
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
1,0	1,23	1,49	1,85	2,32	3,01	4,15	6,40	12,0
3,06	1,21	1,38	1,69	2,13	2,85	3,99	...	...



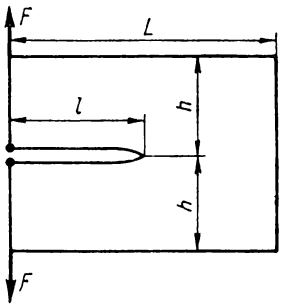
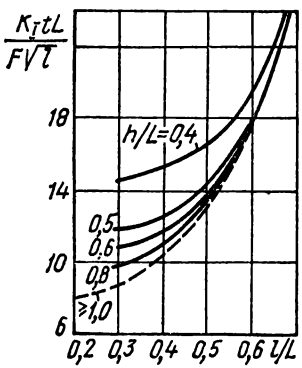


Рис. 4.101. Действие постоянного давления на берегах симметричной краевой трещины в прямоугольной пластине.

Рис. 4.102. Схема ДКБ-образца.



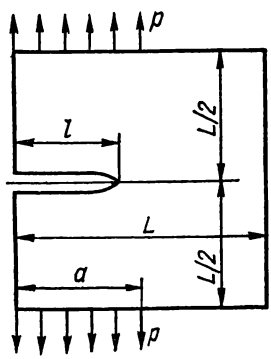
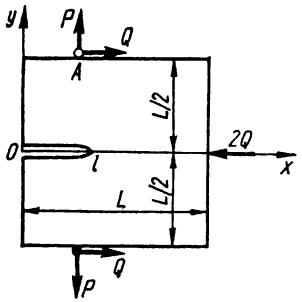


Рис. 4.103. Зависимость КИН $K_I/(F\sqrt{l}/tL)$ (t — толщина образца) от отношения l/L для ДКБ-образца [138].

Рис. 4.104. Действие постоянных растягивающих усилий на участках граней квадратной пластины, параллельных краевой трещине.

также в работах [8, 56, 139, 140]. Когда длина образца значительно больше его высоты ($L > 4h$), то для определения КИН можно использовать формулы (3.37) — (3.40), полученные для полосы с полубесконечной трещиной.

Действие нагрузки на контуре пластины с симметричной трещиной. Пусть на участках граней квадратной пластины, параллельных трещине, действуют постоянные растягивающие напряжения. Остальная часть внешней границы и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.104). Значения КИН, полученные методом конформного отображения [125], приведены в табл. 4.68. Результаты в последней строке при $a/L = 0$ соответствуют случаю сосредоточенных сил и получены с помощью экстраполяции.



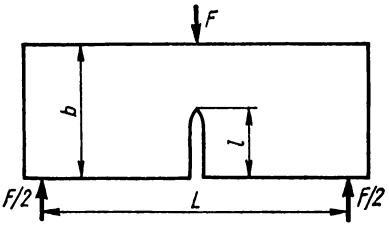


Рис. 4.105. Квадратная пластина с краевой симметричной трещиной при действии сосредоточенных сил на ее гранях.

Рис. 4.106. Схема призматического образца с боковой трещиной на симметричный трехточечный изгиб.

Таблица 4.68. **Значения КИН $K_I/(F\sqrt{\pi l}/L)$ $(F = pa)$ при действии постоянных растягивающих усилий на участках граней квадратной пластины, параллельных краевой трещине [125]**

$\frac{a}{L}$	l/L							
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
1,0	1,23	1,49	1,85	2,32	3,01	4,15	6,40	12,0
0,9	1,43	1,72	2,13	2,67	3,45	4,73	7,22	13,4
0,8	1,67	1,99	2,45	3,05	3,91	5,31	8,05	14,8
0,7	1,95	2,31	2,82	3,48	4,40	5,92	8,88	16,2
0,6	2,31	2,70	3,25	3,95	4,93	6,54	9,71	17,6
0,5	2,78	3,19	3,76	4,48	5,48	7,17	10,5	19,0
0,4	3,38	3,76	4,32	5,03	6,03	7,78	11,4	20,4
0,3	4,09	4,43	4,92	5,57	6,57	8,39	12,2	21,8
0,2	4,88	5,16	5,54	6,13	7,12	9,02	13,0	23,2
0,1	5,64	5,88	6,16	6,68	7,67	9,65	13,9	24,7
0	6,40	6,60	6,78	7,22	8,22	10,3	14,8	26,1

Пусть на гранях квадратной пластины действует система горизонтальных и вертикальных сосредоточенных сил, а остальная граница и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.105). Значения КИН, полученные методом граничных коллокаций [56], приведены в табл. 4.69 и 4.70.

В работе [134] приведены данные по КИН для прямоугольной пластины с краевой трещиной при действии на ее гранях, параллельных трещине, линейно распределенной растягивающей нагрузки.

Таблица 4.69. Значения КИН $K_I/((Q/L)\sqrt{\pi l})$ для квадратной пластины с краевой трещиной при действии на ее кромках горизонтальных сосредоточенных сил [56]

$\frac{x_A}{L}$	$\frac{y_A}{L}$	l/L						
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
1,0	0,1	0,843	0,074	0,086	0,1094	0,1464	0,2074	0,3230
1,0	0,2	0,3098	0,274	0,319	0,4078	0,5443	0,7619	1,1515
1,0	0,3	0,6040	0,541	0,635	0,8172	1,0914	1,5118	2,2215
1,0	0,4	0,8783	0,798	0,948	1,2386	1,6666	2,3052	3,3390
1,0	0,5	1,0828	0,997	1,211	1,6048	2,1861	3,0457	4,4099
0,9	0,5	1,0798	1,024	1,218	1,6050	2,1876	3,0487	4,4126
0,8	0,5	1,1234	1,034	1,257	1,6641	2,2589	3,1262	4,4822
0,7	0,5	1,2939	1,181	1,417	1,8456	2,4551	3,3127	4,6220
0,6	0,5	1,6508	1,479	1,721	2,1612	2,7550	3,5504	4,7613
0,5	0,5	2,2326	1,949	2,165	2,5677	3,0752	3,7454	4,8410
0,4	0,5	3,0306	2,573	2,692	2,9688	3,3157	3,8447	4,8613
0,3	0,5	3,9298	3,255	3,186	3,2572	3,4315	4,8664	4,8537
0,2	0,5	4,6694	3,816	3,519	3,3916	3,4563	3,8565	4,8420
0,1	0,5	4,9811	4,060	3,649	3,4168	3,4493	3,8460	4,8351
0	0,5	4,9839	4,058	3,637	3,4177	3,4472	3,8450	4,8350
0	0,4	3,6395	2,703	2,370	2,2817	2,4040	2,7966	3,6303
0	0,3	2,7109	1,599	1,200	1,1778	1,3732	1,7515	2,4254
0	0,2	2,1537	0,313	—0,043	0,0966	0,3718	0,7244	1,2302
0	0,1	1,8597	—1,985	—1,266	—0,8845	—0,5631	—0,2542	0,0823
0	0	...	—4,373	—2,073	—1,816	—1,370	—1,149	—0,983

Призматические образцы с боковой трещиной на изгиб. При исследовании трещиностойкости при плоской деформации находят применение призматические образцы с боковой трещиной при испытаниях на изгиб. На рис. 4.106 представлена схема такого образца, находящегося под действием симметричного трехточечного изгиба. На основе численного решения задачи методом граничных коллокаций в работе [138] построены аппроксимационные формулы

$$K_I = (6F\sqrt{l}/(tb))\,[1{,}93 - 3{,}07\,(l/b) + 14{,}53\,(l/b)^2 - 25{,}11\,(l/b)^3 + 25{,}8\,(l/b)^4]$$

при $L = 4b$ и

$$K_I = (12F\sqrt{l}/(tb))\,[1{,}96 - 2{,}75\,(l/b) + 13{,}66\,(l/b)^2 - 23{,}98\,(l/b)^3 + 25{,}22\,(l/b)^4]$$

при $L = 8b$ (t — толщина образца). Относительная погрешность этих формул не превышает 0,2 % при $0 \leqslant l/b \leqslant 0{,}6$. Данные по КИН имеются также в работах [9, 21, 141—143].

При $L = 4b$ в работе [144] предложена аппроксимационная формула

$$K_I = (6F\sqrt{l}/(tb))\,[1{,}99 - \lambda(1-\lambda)(2{,}15 - 3{,}93\lambda + 2{,}7\lambda^2)]/[(1+2\lambda)(1-\lambda)^{3/2}],$$

относительная погрешность которой не превышает 0,5 % при всех значениях параметра $\lambda = l/b$ ($0 \leqslant \lambda \leqslant 1$). Известны [17, 145, 146] также другие аппроксимационные зависимости для КИН.

В случае, когда прямоугольный образец с боковой трещиной изгибается под действием четырех сосредоточенных сил (рис. 4.107), аппроксимационная формула для КИН имеет вид [28]

$$K_I = (6M/(tb^{3/2}))\sqrt{\lambda}\,(1{,}99 - 2{,}47\lambda + 12{,}97\lambda^2 - \\ - 23{,}17\lambda^3 + 24{,}8\lambda^4 + 60{,}5\lambda^{16}),$$

где $0 \leqslant \lambda = l/b \leqslant 0{,}8$, $M = (F/2)(L/2 - b)$ — изгибающий момент в ослабленном трещиной сечении образца.

Пусть в прямоугольном образце, находящемся под действием трехточечного изгиба, краевая трещина расположена в произвольном сечении

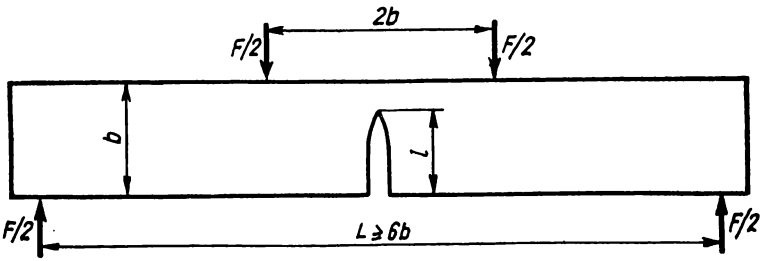
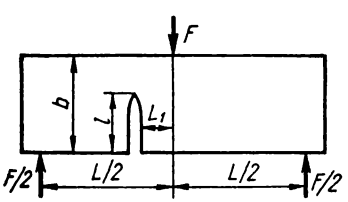


Рис. 4.107. Схема призматического образца с боковой трещиной на симметричный четырехточечный изгиб.

(рис. 4.108). Значения КИН $K_I/(M/(tb^{3/2}))$ и $K_{II}/(Q/(tb^{1/2}))$ (t — толщина образца, M и Q — изгибающий момент и перерезывающая сила в ослабленном трещиной сечении образца), полученные методом граничных коллокаций [147], приведены в табл. 4.71.

Прямоугольный компактный образец на внецентренное растяжение. Одним из самых распространенных образцов для испытаний на вязкость разрушения является прямоугольный компактный образец, изображенный на рис. 4.109. Значения КИН, полученные методом граничной коллокации [142], приведены в табл. 4.72. При $2b = 0{,}55W$ и $H = 0{,}6W$ для КИН известны аппроксимационные



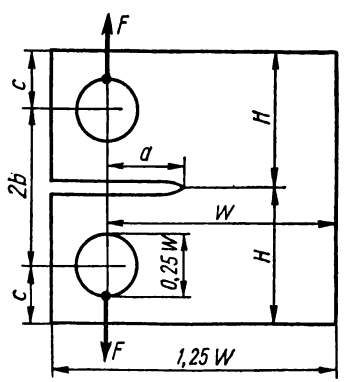


Рис. 4.108. Схема призматического образца с несимметричной боковой трещиной на трехточечный изгиб.

Рис. 4.109. Схема прямоугольного компактного образца на внецентренное растяжение.

Таблица 4.70. Значения КИН $K_I/((P/L)\sqrt{\pi l})$ для квадратной пластины с краевой трещиной при действии на ее кромках вертикальных сосредоточенных сил [56]

x_A/L	y_A/L	l/L						
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
1,0	0,1	—0,3337	—0,281	—0,304	—0,3579	—0,4327	—0,5344	—0,6819
1,0	0,2	—0,5981	—0,506	—0,549	—0,6456	—0,7771	—0,9460	—1,1706
1,0	0,3	—0,7500	—0,637	—0,694	—0,8186	—0,9831	—1,1824	—1,4198
1,0	0,4	—0,7943	—0,674	—0,741	—0,8765	—1,0543	—1,2641	—1,4992
1,0	0,5	—0,7904	—0,674	—0,739	—0,8770	—1,0563	—1,2671	—1,5034
0,9	0,5	—0,6169	—0,496	—0,507	—0,5446	—0,5754	—0,5671	—0,4696
0,8	0,5	—0,5131	—0,382	—0,331	—0,2684	—0,1474	0,0889	0,5364
0,7	0,5	—0,4547	—0,292	—0,166	0,0177	0,3175	0,8067	1,6084
0,6	0,5	—0,3530	—0,150	0,081	0,4244	0,9373	1,6836	2,7955
0,5	0,5	—0,0810	0,153	0,520	1,0577	1,7806	2,7235	4,0550
0,4	0,5	0,5268	0,750	1,260	1,9687	2,8180	3,8448	5,3200
0,3	0,5	1,6306	1,755	2,342	3,1044	3,9401	4,9614	6,5592
0,2	0,5	3,2421	3,175	3,681	4,3304	5,0477	6,0411	7,7746
0,1	0,5	5,0418	4,808	5,102	5,5296	6,1113	7,0930	8,9776
0	0,5	6,5798	6,238	6,411	6,6846	7,1546	8,1396	10,1805
0	0,4	6,5803	6,283	6,453	6,6847	7,1518	8,1379	10,1793
0	0,3	6,9446	6,528	6,523	6,6973	7,1413	8,1283	10,1734
0	0,2	8,5446	7,479	6,773	6,7189	7,1188	8,1091	10,1571
0	0,1	14,9646	9,118	6,884	6,6876	7,0696	8,0701	10,1056
0	0	...	8,947	6,845	6,650	7,065	8,006	10,068

Таблица 4.71. Значения КИН $K_I/(M/(tb^{3/2}))$ (над чертой) и $K_{II}/(Q/(tb^{1/2}))$ (под чертой) для призматического образца с несимметричной боковой трещиной при трехточечном изгибе [147]

l/b	$2L_1/L$						
	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	11/12
0,40	7,71 / 0	8,50 / 1,032	8,55 / 1,400	8,36 / 1,350	8,33 / 1,298	8,50 / 1,376	8,50 / 1,644
0,45	8,86 / 0	9,67 / 1,142	9,72 / 1,562	9,38 / 1,488	9,48 / 1,466	9,55 / 1,464	...
0,50	10,27 / 0	11,48 / 1,410	11,50 / 1,864	11,60 / 1,840	11,15 / 1,664	11,59 / 1,660	11,53 / 1,760
0,55	12,11 / 0	13,30 / 1,588	13,60 / 1,980	13,03 / 2,050	12,90 / 1,976	13,46 / 2,100	...
0,60	14,47 / 0	14,25 / 2,348	14,65 / 2,248	14,91 / 2,276	14,88 / 2,320	14,74 / 2,294	14,50 / 2,090

Таблица 4.72. Значения КИН $K_I t\,(W-a)^{3/2}/(F(2W+a))$ для прямоугольного компактного образца [142]

$\frac{H}{W}$	$\frac{c}{H}$	a/W						
		0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0,4	0,3	2,063	2,010	1,837	1,634	1,459	1,351	1,315
	0,5	2,070	2,009	1,836	1,634	1,460	1,351	1,314
	1,0	2,095	2,003	1,832	1,632	1,459	1,351	1,314
0,5	0,3	1,672	1,655	1,554	1,443	1,361	1,320	1,309
	0,5	1,687	1,657	1,553	1,443	1,361	1,320	1,310
	1,0	1,742	1,661	1,549	1,440	1,360	1,320	1,310
0,6	0,3	1,451	1,466	1,419	1,364	1,327	1,312	1,312
	0,5	1,463	1,470	1,419	1,364	1,326	1,312	1,311
	1,0	1,545	1,488	1,420	1,362	1,325	1,312	1,312
0,8	0,3	1,250	1,307	1,316	1,312	1,309	1,310	1,307
	0,5	1,261	1,312	1,318	1,312	1,308	1,310	1,305
	1,0	1,368	1,352	1,329	1,314	1,308	1,310	1,305
1,0	0,3	1,190	1,258	1,287	1,299	1,305	1,311	1,278
	0,5	1,195	1,263	1,289	1,300	1,306	1,311	1,277
	1,0	1,298	1,309	1,306	1,304	1,306	1,310	1,278

формулы [138, 148]

$$K_I = (F\sqrt{a}/(tW))\,[29{,}6 - 185{,}5\,(a/W) + 655{,}7\,(a/W)^2 - $$
$$- 1017\,(a/W)^3 + 638{,}9\,(a/W)^4] \quad (0{,}3 \leqslant a/W \leqslant 0{,}7),$$

$$K_I = (F\sqrt{a}/(tW))\,[23{,}12 - 67{,}67\,(a/W) + 97{,}31\,(a/W)^2] \quad (0{,}4 \leqslant a/W \leqslant 0{,}6),$$

относительные погрешности которых для указанных интервалов не превышают 0,5 % (t — толщина образца).

Для таких же размеров образца в работе [144] построена аппроксимационная формула

$$K_I = (F/(t\sqrt{W}))\,(2+\lambda)\,(1-\lambda)^{-3/2}\,(0{,}886 + 4{,}64\lambda -$$
$$- 13{,}32\lambda^2 + 14{,}72\lambda^3 - 5{,}6\lambda^4),$$

относительная погрешность которой в диапазоне $0{,}2 \leqslant \lambda = a/W \leqslant 1$ составляет около 0,5 %. Известны также другие приближенные аналитические выражения для КИН [13, 17, 143, 149].

В работе [150] методом граничных коллокаций получено решение рассматриваемой задачи в случае, когда к контурам отверстий приложена не сосредоточенная растягивающая сила F, а распределенная нагрузка, главный вектор которой равен F. Соответствующая аппроксимационная формула имеет вид

$$K_I = (F/(t\sqrt{W}))\,(4{,}55 - 40{,}32\lambda + 414{,}7\lambda^2 - 1698\lambda^3 +$$
$$+ 3781\lambda^4 - 4287\lambda^5 + 2017\lambda^6).$$

Ее относительная погрешность при $0{,}2 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}8$ не превышает 0,5 %. Замена сосредоточенной силы распределенной нагрузкой сказывается на значении КИН только при $a/W \leqslant 0{,}4$.

Приведенные выше данные для КИН зависят, вообще говоря, от коэффициента Пуассона. Однако эффект коэффициента Пуассона μ незна-

чителен: при плоском напряженном состоянии и при плоской деформации значения КИН при различных μ различаются не более чем на 0,5 % [150].

Краевая трещина в прямоугольной пластине с одной защемленной кромкой. Пусть одна из кромок пластины, параллельных трещине, жестко защемлена, а на другой заданы постоянные касательные напряжения. Две остальные кромки и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.110).

Ниже приведены значения КИН $K_{\mathrm{I}}/((6M/W^2)\sqrt{\pi l}) = F_{\mathrm{I}}$ и $K_{\mathrm{II}}/((T/W)\sqrt{\pi l}) = F_{\mathrm{II}}$ ($T = \tau W$, $M = TL$), полученные методом массовых сил в работе [151]:

l/W	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
F_{I}	0,94	1,00	1,12	1,25	1,36
F_{II}	0,43	0,68	0,94	1,17	1,36

Краевая трещина в прямоугольной пластине при заданных смещениях ее концов. Пусть на кромках пластины, параллельных трещине, заданы постоянные нормальные смещения, а касательные смещения равны нулю. Две другие кромки пластины и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.111). Значения КИН $K_{\mathrm{I}}/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (σ_0 — среднее напряжение), полученные модифицированным методом конформных отображений — коллокаций [152], приведены в табл. 4.73. Эти результаты полезны, когда известен главный вектор F усилий, действующих в защемленном конце пластины (тогда $\sigma_0 = F/L$). В работе [153]

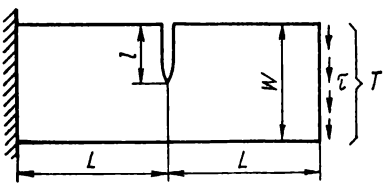


Рис. 4.110. Изгиб прямоугольной пластины с одной защемленной кромкой и краевой трещиной.

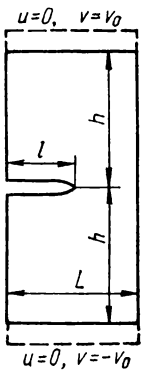


Рис. 4.111. Прямоугольная пластина с краевой трещиной при заданном постоянном смещении ее концов.

Таблица 4.73. **Значения КИН $K_{\mathrm{I}}/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (σ_0 — среднее напряжение) для прямоугольной пластины с краевой трещиной при заданном постоянном смещении ее концов ($\varkappa = 2{,}2$) [152]**

$\frac{l}{L}$	$2h/L$						
	1	2	3	4	8	12	16
0,05	1,02	1,11	1,13	1,13	1,13	1,13	1,13
0,10	1,00	1,12	1,15	1,16	1,17	1,18	1,18
0,20	0,95	1,14	1,21	1,25	1,30	1,32	1,34
0,30	0,91	1,17	1,30	1,37	1,50	1,55	1,58
0,40	0,92	1,22	1,40	1,52	1,76	1,86	1,92
0,50	0,97	1,30	1,53	1,70	2,09	2,28	2,39
0,60	1,08	1,42	1,69	1,91	2,49	2,83	3,05
0,70	1,27	1,61	1,91	2,17	2,97	3,51	3,90

Таблица 4.74. **Значения КИН K_I/K_0 ($K_0 = 8G\,(1+\varkappa)^{-1}\,(v_0/h)\,\sqrt{\pi l}$) для прямоугольной пластины с краевой трещиной при заданном постоянном смещении ее концов ($\varkappa = 2{,}2$) [153]**

$\frac{l}{L}$	$2h/L$						
	1	2	3	4	8	12	16
0,05	1,01	1,11	1,13	1,13	1,13	1,13	1,13
0,10	0,97	1,10	1,14	1,15	1,16	1,18	1,18
0,20	0,85	1,06	1,14	1,20	1,27	1,30	1,32
0,30	0,73	0,99	1,14	1,23	1,41	1,49	1,53
0,40	0,64	0,91	1,10	1,24	1,55	1,70	1,79
0,50	0,58	0,83	1,04	1,21	1,65	1,90	2,07
0,60	0,53	0,75	0,95	1,12	1,67	2,04	2,32
0,70	0,49	0,69	0,86	1,02	1,58	2,03	2,40

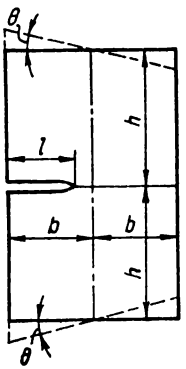
приведены КИН, нормализованные по отношению к заданному смещению v_0 (табл. 4.74). Данные по КИН имеются также в работах [154, 155].

В случае, когда на концевых кромках пластины касательные смещения равны нулю, а нормальные линейно изменяются вдоль кромок, как показано на рис. 4.112, значения КИН приведены в табл. 4.75. Эти результаты получены модифицированным методом конформных отображений в работе [156]. Данные по КИН имеются также в работах [157, 158].

Таблица 4.75. **Значения КИН для прямоугольной пластины с краевой трещиной при повороте ее концов ($\varkappa = 2{,}2$) [156]**

h/b	$l/2b$	$K_I h/(G\theta b\,\sqrt{\pi b})$
0,92	0,144	1,198
	0,254	1,203
	0,487	0,887
	0,621	0,642
2,60	0,15	1,274
	0,20	1,382
	0,30	1,549
	0,378	1,618
	0,50	1,594
3,25	0,20	1,398
	0,30	1,748

Произвольно ориентированная краевая трещина. Прямоугольная пластина содержит прямолинейную трещину, выходящую под произвольным углом на одну из ее кромок. Пластина находится под действием постоянных растягивающих напряжений. Берега тре-



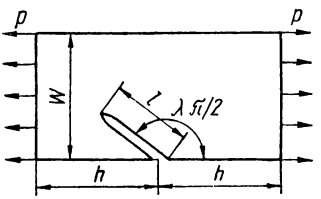


Рис. 4.112. Прямоугольная пластина с краевой трещиной при повороте ее концов.

Рис. 4.113. Прямоугольная пластина с произвольно ориентированной краевой трещиной.

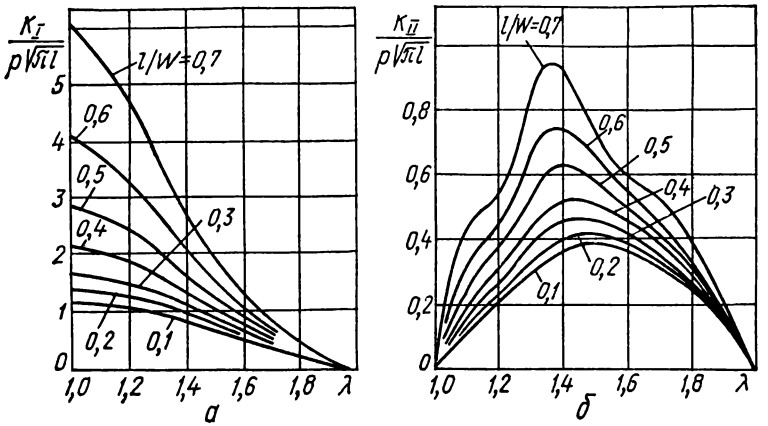


Рис. 4.114. Зависимости КИН K_I (*а*) и K_{II} (*б*) от параметра λ при растяжении прямоугольной пластины с краевой произвольно ориентированной трещиной для $h/W = 1$ [125].

щины свободны от нагрузки (рис. 4.113). Зависимости КИН от угла ориентации трещины, полученные модифицированным методом конформных отображений [125], приведены на рис. 4.114. Данные по КИН имеются также в работах [8, 113, 159].

4.14. Прямоугольная пластина с системой краевых трещин

Две симметричные коллинеарные трещины. Пусть на кромках пластины, параллельных линии трещин, заданы постоянные нормальные напряжения. На боковых кромках и на берегах трещин нагрузка отсутствует

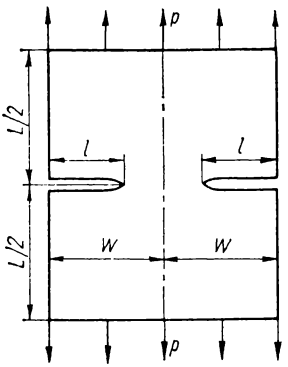
Таблица 4.76. **Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ при растяжении прямоугольной пластины с двумя коллинеарными краевыми трещинами [160, 161]**

$\frac{L}{W}$	l/W							
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0,5	1,1215	1,429	2,140	2,946	3,838	4,802	5,842	6,838
1,0	1,1215	1,183	1,453	1,785	2,126	2,431	2,613	2,581
2,0	1,1215	1,124	1,158	1,223	1,283	1,333	1,385	1,466
3,0	1,1215	1,097	1,099	1,113	1,143	1,186	1,252	1,366

(рис. 4.115). Значения КИН, полученные методом граничных коллокаций [160, 161], приведены в табл. 4.76. Данные по КИН имеются также в работах [8, 21, 113, 114, 162]. Для случая, когда на кромках пластины, параллельных трещинам, действуют по две симметрично расположенные сосредоточенные силы (рис. 4.116), значения КИН приведены в

табл. 4.77. Решение задачи также получено методом граничных коллокаций [160, 161].

В случае, когда квадратная пластина с двумя коллинеарными краевыми трещинами находится под действием осевого растяжения двумя сосредоточенными силами, приложенными в симметричных внутренних



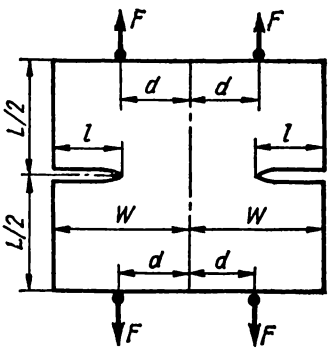
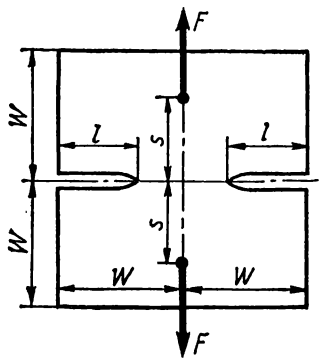


Рис. 4.115. Растяжение прямоугольной пластины с двумя коллинеарными краевыми трещинами.

Рис. 4.116. Действие сосредоточенных сил на кромках прямоугольной пластины с двумя коллинеарными краевыми трещинами.



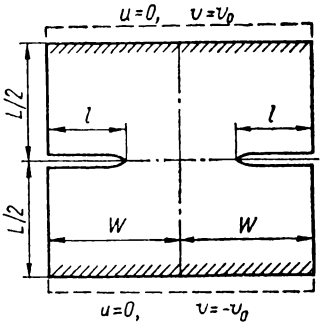


Рис. 4.117. Действие сосредоточенных сил во внутренних точках квадратной пластины с двумя коллинеарными краевыми трещинами.

Рис. 4.118. Прямоугольная пластина с двумя коллинеарными краевыми трещинами при заданных смещениях на двух ее кромках.

точках (рис. 4.117), решение задачи получено в работе [114]. Ниже приведены значения КИН при $s/W = 0{,}6$:

l/W	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$K_I/[(F/2W)\sqrt{\pi l}]$	0,083	0,241	0,474	0,718	1,007	1,387

Пусть на кромках пластины, параллельных трещинам, заданы постоянные нормальные смещения, а касательные смещения равны нулю.

Таблица 4.77. Значения КИН $K_I/[(F/W)\sqrt{\pi l}]$ для прямоугольной пластины с двумя коллинеарными краевыми трещинами при действии на ее кромках сосредоточенных сил [160, 161]

$\frac{L}{W}$	$\frac{d}{W}$	l/W						
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
1,0	1/6	—0,480	—0,358	—0,317	—0,262	—0,150	0,066	0,416
	2/6	—0,479	—0,296	—0,149	0,067	0,395	0,847	1,352
	3/6	—0,140	0,100	0,451	0,950	1,558	2,165	2,584
	4/6	1,157	1,318	1,875	2,566	3,20	3,63	3,73
	5/6	3,81	3,58	4,06	4,52	4,84	4,96	4,76
	6/6	6,55	6,10	6,28	6,38	6,37	6,22	5,75
2,0	1/6	0,036	0,123	0,250	0,402	0,571	0,756	0,955
	2/6	0,385	0,435	0,542	0,678	0,824	0,975	1,130
	3/6	0,951	0,941	1,008	1,107	1,199	1,284	1,362
	4/6	1,654	1,579	1,590	1,622	1,630	1,619	1,602
	5/6	2,337	2,213	2,177	2,137	2,048	1,934	1,820
	6/6	2,895	2,756	2,688	2,593	2,424	2,222	2,021
3,0	1/6	0,834	0,818	0,834	0,886	0,949	1,029	1,137
	2/6	0,952	0,928	0,935	0,976	1,024	1,089	1,181
	3/6	1,115	1,083	1,079	1,105	1,132	1,174	1,243
	4/6	1,281	1,244	1,233	1,244	1,250	1,266	1,310
	5/6	1,410	1,386	1,365	1,367	1,353	1,348	1,370
	6/6	1,495	1,471	1,462	1,461	1,436	1,415	1,419

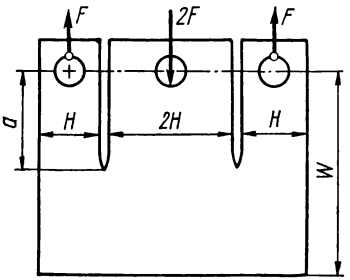
Таблица 4.78. Значения КИН $K_I/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ (σ_0 — среднее напряжение) для прямоугольной пластины с двумя коллинеарными трещинами при заданных смещениях на двух ее кромках ($\varkappa = 2{,}08$) [160, 161]

$\frac{L}{W}$	l/W							
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0,5	0,874	0,815	0,704	0,660	0,662	0,702	0,785	0,939
1,0	0,904	0,910	0,885	0,860	0,868	0,915	1,009	1,170
2,0	1,008	1,004	1,006	1,017	1,046	1,095	1,176	1,310
3,0	1,079	1,061	1,054	1,071	1,102	1,145	1,219	1,342

Таблица 4.79. Значения КИН $K_{II}/((F/2tW)\sqrt{\pi l})$ для квадратного образца с боковыми трещинами на сжатие при испытаниях на сдвиг [167]

$\frac{l}{W}$	H/W			$\frac{l}{W}$	H/W		
	0,5	0,4	0,3		0,5	0,4	0,3
0,25	2,417	2,076	1,795	0,45	2,345	2,034	1,755
0,30	2,401	2,055	1,787	0,50	2,197	1,905	1,668
0,35	2,385	2,044	1,715	0,55	2,219	1,932	1,703
0,40	2,372	2,036	1,761	0,60	2,272	1,989	1,742

Остальная граница пластины и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.118). Значения КИН, полученные методом граничных коллокаций [160, 161], приведены в табл. 4.78 для случая плоского напряжен-



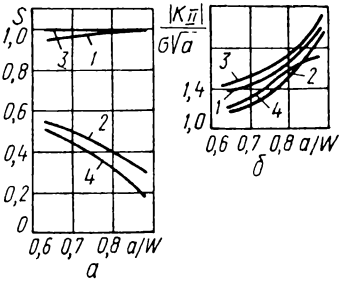


Рис. 4.119. Схема прямоугольного компактного образца для испытаний на сдвиг.

Рис. 4.120. Зависимость функции $S = |K_{II}| / \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$ (*а*) и $K_{II} / \sigma\sqrt{a}$ (*б*) от отношения a/W для прямоугольного компактного образца для испытаний на сдвиг при $H/W = 0{,}408$ (кривые *1*, *2*, *3*, *4* соответствуют случаям 1, 2, 3, 4 нагружения образца) [166].

ного состояния при $\mu = 0{,}3$ ($\varkappa = 2{,}08$). Значения КИН имеются также в работах [8, 163].

Прямоугольный компактный образец для испытаний на сдвиг. При испытаниях на трещиностойкость при поперечном сдвиге используются компактные образцы прямоугольной формы, имеющие две симметричные краевые трещины, выходящие на одну из граней. Образец находится под действием трех сосредоточенных сил, приложенных к различным зубцам образца. При этом внешние зубцы испытывают растяжение, а внутренний — сжатие (этот случай показан на рис. 4.119), или наоборот (при отрицательном F). Значения КИН K_{II} для такого образца получены в работах [164—166]. Подробный анализ этих результатов проведен в работе [166]. Были рассмотрены четыре случая нагружения: 1) внешние зубцы испытывают растяжение, а внутренний — сжатие, причем поперечное перемещение точек приложения сил в каждом из внешних зубцов равно нулю; 2) нагрузка такая же, как и в случае 1, однако отсутствует требование нулевых поперечных смещений внешних зубцов; 3) внешние зубцы испытывают сжатие, а средний — растяжение, причем поперечное перемещение точек приложения сил в каждом из внешних зубцов равно нулю; 4) направления действия нагрузок такие же, как и в случае 3, однако ограничения на перемещения внешних зубцов сняты.

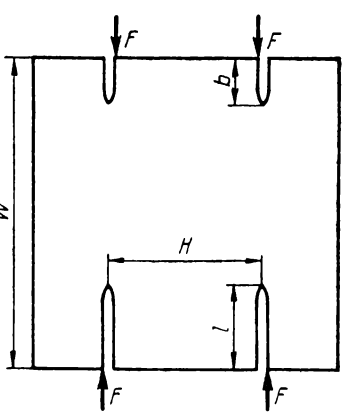


Рис. 4.121. Схема квадратного образца на сжатие с боковыми трещинами поперечного сдвига: $W = 100$ мм, $b = 10$ мм.

На рис. 4.120 показаны графики зависимости $|K_{II}|/\sqrt{K_I^2+K_{II}^2}$ и $|K_{II}|/(\sigma\sqrt{a})$ ($\tau = F/(Ht)$, t — толщина образца) от отношения a/W для всех четырех случаев нагружения. Берется абсолютная величина K_{II}, поскольку не существует физического различия между положительными и отрицательными значениями КИН K_{II}. В случаях 1 и 2 как K_I, так и K_{II} отрицательны. В случаях 3 и 4 как K_I, так и K_{II} положительны. При $K_I < 0$ берега трещин в окрестности их вершин приходят в контакт. При расчетах учтено наличие зоны сцепления берегов трещины, вследствие чего на рис. 4.120 имеется различие между кривыми *1* (*2*) и *3* (*4*). Из графиков видно, что при снятии ограничения поперечного перемещения внешних зубцов доля деформации типа II сильно снижается. Случай 3 является наиболее предпочтительным по отношению к близости к чистому нагружению типа II.

Квадратный образец на сжатие с боковыми трещинами поперечного сдвига. Образец, содержащий две пары краевых коллинеарных трещин, сжимается четырьмя сосредоточенными силами (рис. 4.121). Значения КИН $K_{II}/((F/2tW)\sqrt{\pi l})$ (t — толщина образца), полученные методом конечных элементов [167], приведены в табл. 4.79 для вершин больших трещин. Значения КИН K_I на порядок меньше, чем K_{II}.

4.15. Прямоугольная пластина с вырезами и трещинами

Прямоугольная пластина с центральным круговым отверстием и краевыми трещинами. Пусть на концах пластины действуют постоянные растягивающие напряжения, а на берегах двух симметричных трещин, кон-

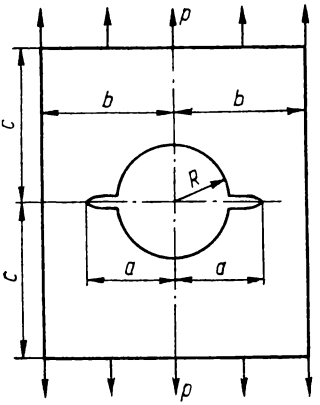
Таблица 4.80. **Значения КИН $K_I = p\sqrt{\pi a}F_I$ при растяжении прямоугольной пластины с центральным круговым отверстием и двумя краевыми трещинами для $c/b = 2$ [7, 120]**

$R/b = 0$		$R/b = 0{,}25$		$R/b = 0{,}5$	
a/b	F_I	a/b	F_I	a/b	F_I
0	1,0000	0,25	0	0,50	0
0,1	1,0061	0,26	0,6593	0,51	0,6527
0,2	1,0249	0,27	0,8510	0,52	0,8817
0,3	1,0583	0,28	0,9605	0,525	0,9630
0,4	1,1102	0,29	1,0304	0,53	1,0315
0,5	1,1876	0,30	1,0776	0,54	1,1426
0,6	1,3043	0,35	1,1783	0,55	1,2301
0,7	1,4891	0,40	1,2156	0,60	1,5026
0,8	1,8161	0,50	1,2853	0,70	1,8247
0,9	2,5482	0,60	1,3965	0,78	2,1070
...	...	0,70	1,5797	0,85	2,4775
...	...	0,80	1,9044	0,90	2,9077
...	...	0,85	2,1806	...	...
...	...	0,90	2,6248	...	...

туре отверстия и боковых кромках пластины нагрузка отсутствует (рис. 4.122). Значения КИН K_I ($K_{II} = 0$), полученные методом граничных коллокаций [120], приведены в табл. 4.80. Численные результаты для

данного случая имеются также в работах [8, 9, 21, 113, 125, 130, 168—171]. Рассмотрен также случай, когда на контуре отверстия действуют усилия с не равным нулю главным вектором, которые уравновешиваются нагрузкой, приложенной на кромках пластины [168, 170]. Случай ортотропной прямоугольной пластины с центральным круговым отверстием и краевыми трещинами изучен в работе [172].

Пусть на контур центрального кругового отверстия в квадратной пластине выходят одна или две осевые трещины.



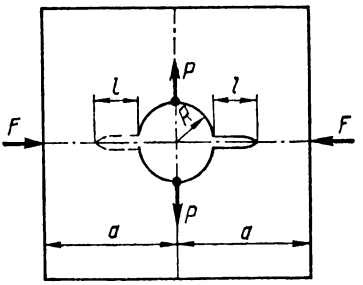
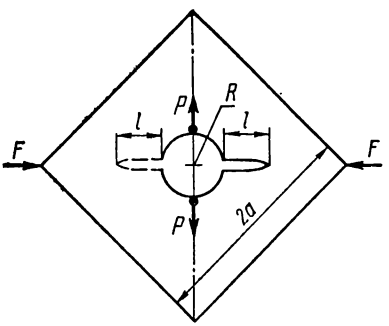


Рис. 4.122. Растяжение прямоугольной пластины с центральным круговым отверстием и двумя краевыми трещинами.

Рис. 4.123. Квадратная пластина с центральным круговым отверстием и краевыми осевыми трещинами при действии растягивающих и сжимающих сосредоточенных сил.



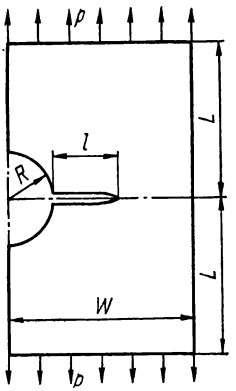


Рис. 4.124. Квадратная пластина с центральным круговым отверстием и краевыми диагональными трещинами при действии растягивающих и сжимающих сосредоточенных сил.

Рис. 4.125. Растяжение прямоугольной пластины с полукруговым краевым надрезом и краевой радиальной трещиной.

На контуре окружности действуют две растягивающие, а на внешнем контуре — две сжимающие сосредоточенные силы. Остальная часть границы пластины и берега трещин свободны от нагрузки (рис. 4.123). Значения КИН, полученные методом СИУ [173], приведены в табл. 4.81.

Таблица 4.81. **Значения КИН $K_I/(P/\sqrt{\pi l})$ (растяжение) и $K_I/(F/\sqrt{\pi R})$ (сжатие) при действии сосредоточенных сил на граничных контурах квадратной пластины с центральным круговым отверстием и одной (над чертой) или двумя (под чертой) краевыми осевыми трещинами [173]**

$\frac{l}{a-R}$	Растяжение		Сжатие	
	$R/a = 1/2$	$R/a = 1/4$	$R/a = 1/2$	$R/a = 1/4$
0,1	0,387 / 0,398	0,304 / 0,323	2,233 / 2,298	0,771 / 0,823
0,2	0,701 / 0,771	0,469 / 0,549	2,594 / 2,867	0,670 / 0,807
0,3	0,999 / 1,214	0,598 / 0,778	2,938 / 3,613	0,584 / 0,807
0,4	1,295 / 1,794	0,726 / 1,049	3,089 / 4,388	0,526 / 0,847
0,5	1,582 / 2,579	0,870 / 1,391	3,223 / 5,487	0,464 / 0,895
0,6	1,811 / 3,506	1,038 / 1,827	3,168 / 6,598	0,376 / 0,929
0,7	1,856 / 3,919	1,229 / 2,351	2,658 / 6,344	0,226 / 0,875

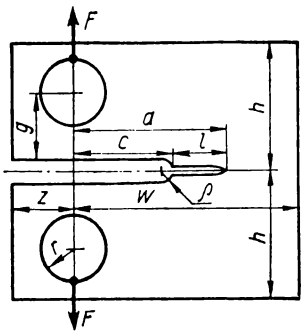
Таблица 4.82. **Значения КИН $K_I/(P/\sqrt{\pi l})$ (растяжение) и $K_I/(F/\sqrt{\pi R})$ (сжатие) при действии сосредоточенных сил на граничных контурах квадратной пластины с центральным круговым отверстием и одной (над чертой) или двумя (под чертой) краевыми диагональными трещинами [173]**

$\frac{l}{a\sqrt{2}-R}$	Растяжение		Сжатие	
	$R/(a\sqrt{2}) = 1/2$	$R/a\sqrt{2}) = 1/4$	$R/(a\sqrt{2}) = 1/2$	$R/(a\sqrt{2}) = 1/4$
0,1	0,545 / 0,553	0,411 / 0,434	1,862 / 1,890	0,683 / 0,720
0,2	0,947 / 0,994	0,599 / 0,689	2,265 / 2,378	0,736 / 0,843
0,3	1,284 / 1,409	0,714 / 0,904	2,508 / 2,752	0,771 / 0,960
0,4	1,583 / 1,829	0,800 / 1,116	2,701 / 3,119	0,821 / 1,103
0,5	1,856 / 2,271	0,870 / 1,342	2,869 / 3,501	0,874 / 1,266
0,6	2,108 / 2,743	0,930 / 1,589	3,030 / 3,917	0,955 / 1,477

Продолжение табл. 4.82

$\frac{l}{a\sqrt{2}-R}$	Растяжение		Сжатие	
	$R/(a\sqrt{2}) = 1/2$	$R/(a\sqrt{2}) = 1/4$	$R/(a\sqrt{2}) = 1/2$	$R/(a\sqrt{2}) = 1/4$
0,7	$\frac{2,343}{3,254}$	$\frac{0,985}{1,867}$	$\frac{3,199}{4,389}$	$\frac{1,046}{1,721}$
0,8	$\frac{2,560}{3,804}$	$\frac{1,037}{2,182}$	$\frac{3,369}{4,907}$	$\frac{1,155}{2,007}$

Пусть на контур центрального кругового отверстия в квадратной пластине выходят одна или две диагональные трещины. На контуре окружности действуют две растягивающие, а на внешнем контуре — две сжимающие сосредоточенные силы. Остальная часть границы пластины



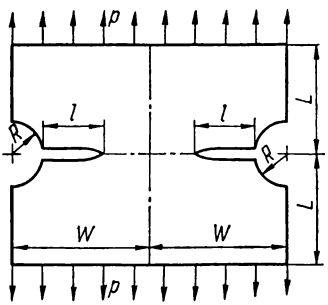


Рис. 4.126. Схема прямоугольного компактного образца с краевым надрезом и выходящей на него трещиной:
$2r = 0,195W$; $g = 0,332W$; $z = 0,308W$; $h = 0,6W$; $c = 0,4W$; $\rho = 0,065W$.

Рис. 4.127. Растяжение прямоугольной пластины с двумя симметричными краевыми надрезами и краевыми трещинами.

и берега трещин свободны от нагрузки (рис. 4.124). Значения КИН, полученные методом СИУ [173], приведены в табл. 4.82.

Прямоугольная пластина с краевым надрезом и краевой трещиной. Пусть прямоугольная пластина ослаблена полукруговым краевым надрезом, на контур которого выходит радиальная трещина. На кромках пластины, параллельных трещине, заданы постоянные растягивающие напряжения, а остальная граница пластины и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.125). Значения КИН, полученные МКЭ [113], приведены в табл. 4.83. Рассмотрен также случай прямоугольной пластины с полуэллиптическим надрезом и краевой трещиной [174].

Прямоугольный компактный образец с краевым надрезом и выходящей на него трещиной. Пусть в компактном образце имеется краевой надрез шириной 2ρ, оканчивающийся округлением радиуса ρ. Из вершины надреза симметрично исходит трещина длиной l. Образец растягивается двумя силами F, приложенными к контурам отверстий радиуса r (рис. 4.126). Значения КИН при указанных размерах образца получены МКЭ в работе [175] (табл. 4.84). Для некоторых других значений параметров данные по КИН имеются в работах [176, 177].

Таблица 4.83. **Значения КИН при растяжении прямоугольной пластины с полукруговым краевым надрезом и краевой радиальной трещиной для $L/W = 3$ [113]**

l/R	$(R+l)/W$	$K_1/(p\sqrt{\pi(R+l)})$	l/R	$(R+l)/W$	$K_1/(p\sqrt{\pi(R+l)})$
0,075	0,43	1,83	0,450	0,58	4,01
0,150	0,46	2,47	0,525	0,61	4,49
0,225	0,49	2,86	0,600	0,64	5,06
0,300	0,52	3,22	0,675	0,67	5,76
0,375	0,55	3,60			

Таблица 4.84. **Значения КИН $K_1/(F/(t\sqrt{W}))$ (t — толщина образца) для прямоугольного компактного образца с краевым надрезом и выходящей на него трещиной [175]**

l/W	$K_1/(F/(t\sqrt{W}))$	l/W	$K_1/(F/(t\sqrt{W}))$	l/W	$K_1/(F/(t\sqrt{W}))$
0,002660	3,321	0,02582	6,994	0,08299	9,062
0,003991	3,906	0,03231	7,361	0,1033	9,678
0,006651	4,761	0,03880	7,664	0,1256	10,54
0,008995	5,300	0,04853	8,003	0,1621	11,76
0,01204	5,809	0,06069	8,370	0,2269	15,17
0,01508	6,197	0,06677	8,583	0,3283	25,05
0,01933	6,577				

Прямоугольная пластина с двумя симметричными краевыми надрезами и краевыми трещинами. Пусть прямоугольная пластина ослаблена двумя симметричными полукруговыми надрезами, на контуры которых выходят радиальные трещины. На кромках пластины, параллельных трещинам, заданы постоянные растягивающие напряжения, а остальная граница пластины и берега трещин свободны от нагрузки (рис. 4.127). Значения КИН, полученные МКЭ [113], приведены в табл. 4.85.

4.16. Многоугольная пластина с трещинами

Пластина в форме равнобочной трапеции с краевой симметричной трещиной. Пусть на берегах краевой симметричной трещины в трапецеидальной пластине действуют постоянные нормальные усилия, а внешняя граница пластины свободна от нагрузки (рис. 4.128). Значения КИН, полученные методом СИУ [178], приведены в табл. 4.86.

Таблица 4.85. **Значения КИН при растяжении прямоугольной пластины с двумя симметричными краевыми надрезами и краевыми трещинами для $L/W = 3$ [113]**

l/R	$(R+l)/W$	$K_1/(p\sqrt{\pi(R+l)})$	l/R	$(R+l)/W$	$K_1/(p\sqrt{\pi(R+l)})$
0,075	0,43	0,82	0,450	0,58	1,22
0,150	0,46	1,04	0,525	0,61	1,25
0,225	0,49	1,12	0,600	0,64	1,28
0,300	0,52	1,17	0,675	0,67	1,32
0,375	0,55	1,19			

Таблица 4.86. **Значения КИН $K_1/(\sigma\sqrt{\pi l})$ для трапецеидальной пластины с краевой симметричной трещиной под давлением [178]**

$\frac{b}{H}$	θ	l/H			
		0,1	0,3	0,5	0,7
0,48	0	1,2499	1,9275	3,0924	6,4152
	$\pi/18$	1,2164	1,7748	2,9123	6,3642
	$\pi/9$	1,2048	1,7212	2,8625	6,3565
	$\pi/6$	1,1974	1,6930	2,8435	6,3549
0,20	0	1,6747	4,0862	7,3316	10,7602
	$\pi/18$	1,5066	2,7726	3,9822	6,7785
	$\pi/9$	1,4194	2,2798	3,2527	6,4318
	$\pi/6$	1,3574	2,0052	2,9977	6,3694

Таблица 4.87. **Значения КИН $K_1/(F\sqrt{\pi l}/H)$ при растяжении трапецеидальной пластины с краевой симметричной трещиной сосредоточенными силами ($c/H = 0,2$; $d/H = 0,32$; $b/H = 0,48$) [178]**

θ	l/H					
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	2,8736	3,6792	4,5127	5,2761	6,2305	7,8916
$\pi/18$	2,8067	3,4466	4,1153	4,8043	5,8059	...
$\pi/9$	2,7201	3,3067	3,9374	4,6296	5,6743	...

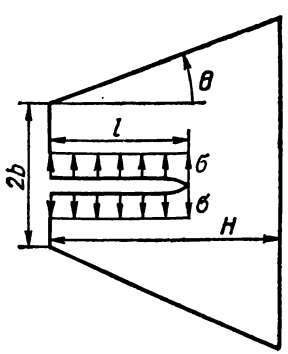
Пусть берега трещины и внешняя граница трапецеидальной пластины свободны от нагрузки, а в двух симметричных внутренних точках действуют растягивающие сосредоточенные силы (рис. 4.129). Значения КИН, полученные методом СИУ [178], приведены в табл. 4.87 и 4.88. Данные по КИН для рассматриваемого случая нагрузки имеются также в работах [8, 56, 179].

Таблица 4.88. **Значения КИН $K_I/(F\sqrt{\pi l/H})$ для трапецеидальной пластины с краевой симметричной трещиной при действии на ее берегах сосредоточенных растягивающих сил ($c/H=0,2$; $d/H=0$; $b/H=0,48$) [178]**

θ	l/H				
	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0	5,3245	5,4715	6,2768	7,8647	...
π/18	4,9568	5,0104	5,8537	7,5822	11,2294
π/9	4,8228	4,8608	5,7348	7,5170	11,2130
π/6	4,7624	4,7996	5,6917	7,4964	11,2093

Таблица 4.89. **Значения КИН $K_I = pV\overline{\pi l}\,F_I$ и $K_{II} = pV\overline{\pi l}\,F_{II}$ при растяжении прямоугольной пластины со ступенькой и трещиной для $L_1/W_1 = L_2/W_2 = 2$ [151]**

$\frac{l}{W_1}$	$h/W_1 = 0,2$		$h/W_1 = 0,4$		$\frac{l}{W_1}$	$h/W_1 = 0,2$		$h/W_1 = 0,4$	
	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}		F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
0,1	1,27	0,068	1,26	0,066	0,4	2,03	0,010	2,01	0,008
0,2	1,40	0,031	1,40	0,030	0,5	2,61	0,007	2,54	0,006
0,3	1,64	0,016	1,64	0,015					



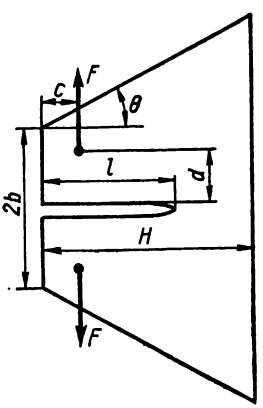


Рис. 4.128. Действие постоянной нормальной нагрузки на берегах краевой симметричной трещины в трапецеидальной пластине.

Рис. 4.129. Действие растягивающих сосредоточенных сил в трапецеидальной пластине с краевой симметричной трещиной.

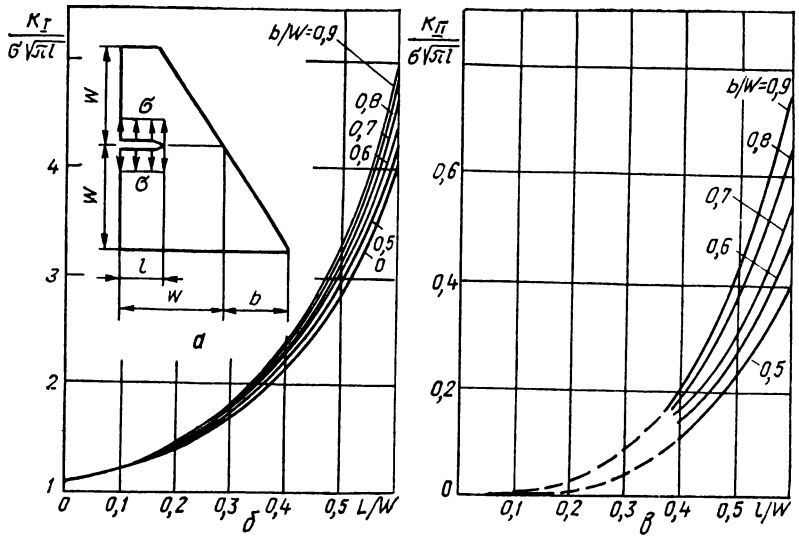


Рис. 4.130. Схема пластины в форме неравнобочной трапеции с краевой трещиной под действием постоянного давления (*а*) и зависимость КИН K_I (*б*) и K_{II} (*в*) от относительной длины трещины l/W [180].

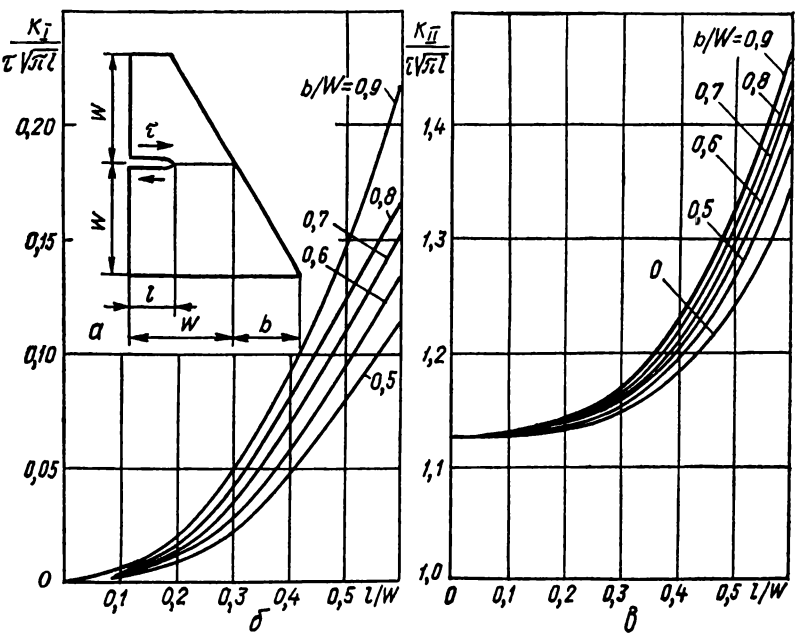


Рис. 4.131. Схема пластины в форме неравнобочной трапеции с краевой трещиной при действии на ее берегах постоянной сдвигающей нагрузки (*а*) и зависимость КИН K_I (*б*) и K_{II} (*в*) от относительной длины трещины l/W [180].

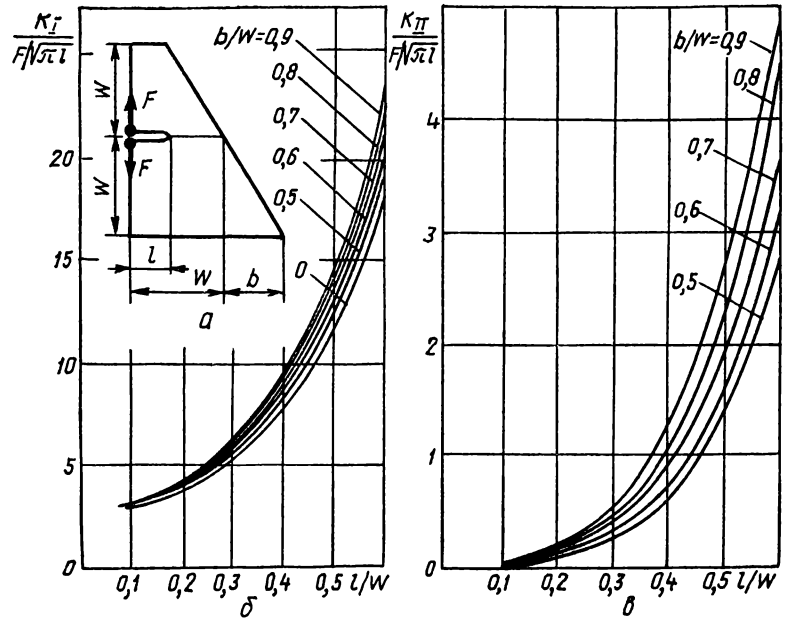


Рис. 4.132. Схема пластины в форме неравнобочной трапеции с краевой трещиной при действии растягивающих сосредоточенных сил (*а*) и зависимость КИН K_I (*б*) и K_{II} (*в*) от относительной длины трещины l/W [180].

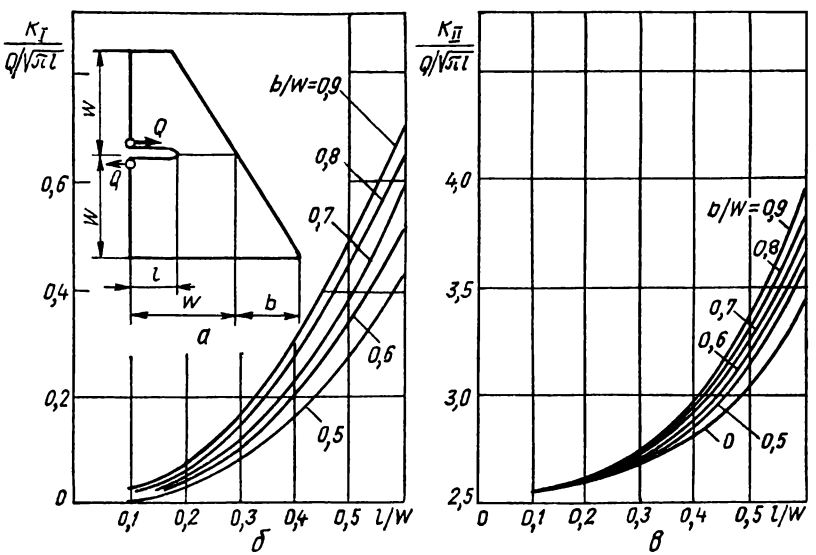
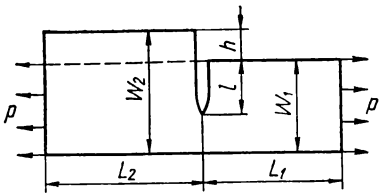


Рис. 4.133. Схема пластины в форме неравнобочной трапеции с краевой трещиной при действии сдвигающих сосредоточенных сил (*а*) и зависимость КИН K_I (*б*) и K_{II} (*в*) от относительной длины трещины l/W [180].

Пластина в форме неравнобочной трапеции с краевой трещиной. Пусть на берегах краевой прямолинейной трещины в несимметричной трапецеидальной пластине действуют постоянные нормальные усилия, а внешняя граница пластины свободна от нагрузки (рис. 4.130, *а*). Зависимости КИН от параметра l/W, полученные с помощью МКЭ [180], приведены на рис. 4.130. Аналогичные результаты для случаев, когда на берегах трещины действуют постоянные сдвигающие усилия, растягивающие или сдвигающие сосредоточенные силы, приведены на рис. 4.131—4.133. В работе [180] также имеются данные по КИН, когда вдоль трещины нормальные или касательные напряжения изменяются по линейному закону.

Трещина, исходящая из вершины угла в прямоугольной пластине



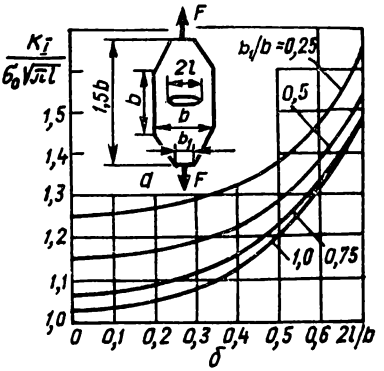


Рис. 4.134. Растяжение прямоугольной пластины со ступенькой и трещиной.

Рис. 4.135. Схема восьмиугольной пластины с центральной трещиной и защемленными торцами (*а*) и зависимость КИН $K_I/\sigma_0\sqrt{\pi l}$ ($\sigma_0 = F/b$) от относительной длины трещины $2l/b$ (*б*) [181].

со ступенькой. Пусть прямоугольная пластина со ступенькой и краевой трещиной, исходящей из вершины угла перпендикулярно продольным кромкам, растягивается усилиями, приложенными к торцам пластины (рис. 4.134). Значения КИН, полученные методом массовых сил [151], приведены в табл. 4.89.

Восьмиугольная пластина с центральной трещиной. Пусть пластина растягивается силами F, приложенными к жестко защемленным торцевым кромкам. Остальная часть внешней границы и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 4.135, *а*). Зависимости КИН от относительной длины трещины, полученные методом граничных коллокаций [181], приведены на рис. 4.135, *б*.

ГЛАВА 5

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ

5.1. Бесконечное тело с прямолинейной трещиной

Действие нагрузки на берегах трещины. Пусть в бесконечном теле, находящемся в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига), вдоль полосы $|x| \leqslant l$, $y = 0$ имеется трещина (рис. 5.1). Берега трещины загружены произвольной несамоуравновешенной нагрузкой $\tau_{yz}^{\pm} = \tau(x) \pm \mu(x)$ ($|x| \leqslant l$), а напряжения на бесконечности отсутствуют. КИН определяется по формуле [1]

$$K_{\mathrm{III}}^{\pm} = -\frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^{l} \sqrt{\frac{l \pm x}{l \mp x}}\, \tau(x)\, dx, \tag{5.1}$$

т. е. КИН не зависит от функции $\mu(x)$. При $\mu(x) = 0$ формула (5.1) имеется в работах [2—4].

В случае действия на берегах трещины постоянных сдвигающих усилий, равных по величине, но обратных по направлению (см. рис. 5.1; $\tau_{yz}^{+} = -\tau$; $\tau_{yz}^{-} = -\tau$; $\tau(x) = -\tau = \mathrm{const}$), имеем [3, 4]

$$K_{\mathrm{III}} = \tau \sqrt{\pi l}\,.$$

При действии линейно распределенной нагрузки ($\tau(x) = \tau_0 x/l$) будет [5]

$$K_{\mathrm{III}}^{\pm} = \pm (1/2)\, \tau_0 \sqrt{\pi l}\,.$$

Когда постоянная нагрузка действует на участке трещины $b \leqslant x \leqslant c$, а остальная часть трещины свободна от внешних усилий (рис. 5.2), то [5]

$$K_{\mathrm{III}}^{\pm} = \tau \sqrt{l/\pi}\, [\arcsin(c/l) - \arcsin(b/l) \mp (\sqrt{1-(c/l)^2} - \sqrt{1-(b/l)^2})].$$

Если же этот участок находится в центре трещины ($b = -c = -a$), КИН равен [5]

$$K_{\mathrm{III}} = 2\tau \sqrt{l/\pi}\, \arcsin(a/l).$$

При действии на берегах трещины сосредоточенных сдвигающих сил T (рис. 5.3) КИН определяется по формуле [2—4]

$$K_{\mathrm{III}}^{\pm} = (T/\sqrt{\pi l})\, \sqrt{(l \pm b)/(l \mp b)}\,,$$

Пусть на некоторой части $-b \leqslant x \leqslant b$ берегов трещины задано постоянное смещение $w^{\pm} = \mp h$. Остальная часть поверхности трещины свободна от напряжений. Тогда [6]

$$K_{\mathrm{III}} = Gh \sqrt{\pi l}/[\sqrt{l^2 - b^2}\, K(k)],$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $k = \sqrt{1 - (b/l)^2}$.

Действие нагрузки на бесконечности. Пусть берега трещины свободны от нагрузки, а тело находится под действием продольного сдвига на бесконечности (рис. 5.4). КИН дается выражением [2, 5, 7]

$$K_{III} = \tau \sqrt{\pi l} \sin \gamma.$$

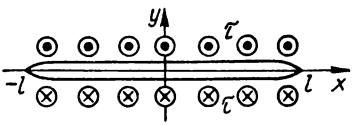


Рис. 5.1. Бесконечное тело с прямолинейной трещиной при действии на ее берегах постоянной сдвигающей нагрузки.

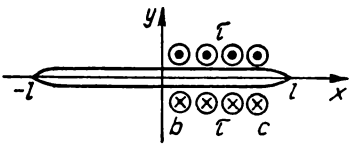


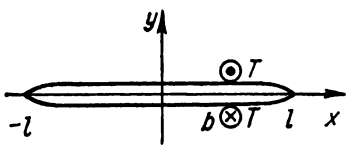
Рис. 5.2. Бесконечное тело с прямолинейной трещиной при действии на ее берегах кусочно-постоянной сдвигающей нагрузки.

Действие нагрузки во внутренних точках тела. Пусть в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ приложена сдвигающая сосредоточенная сила T. Берега трещины свободны от напряжений (рис. 5.5). Тогда [4]

$$K_{III}^{\pm} = (T/(2\sqrt{\pi l})) \operatorname{Im} [\sqrt{z_0^2 - l^2}/(l \mp z_0)],$$

где под $\sqrt{z^2 - l^2}$ подразумевается та ветвь, которая удовлетворяет условию $\sqrt{z^2 - l^2}/z \to 1$ при $z \to \infty$.

Если тело находится под действием двух сдвигающих сосредоточенных сил



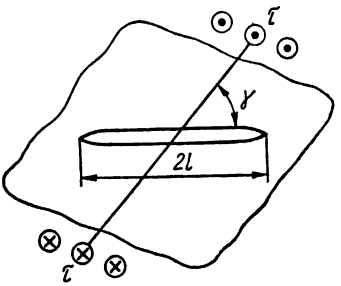


Рис. 5.3. Бесконечное тело с прямолинейной трещиной при действии на ее берегах сосредоточенных сдвигающих сил.

Рис. 5.4. Бесконечное тело с прямолинейной трещиной при продольном сдвиге на бесконечности.

T, приложенных в симметричных точках $z_0 = ib$ и $z_0 = -ib$ (рис. 5.6), то [4]

$$K_{III} = (T/\sqrt{\pi l})/\sqrt{1 + (b/l)^2}.$$

Полубесконечная трещина. Пусть на берегах прямолинейной полубесконечной трещины, расположенной на положительной полуоси x (рис. 5.7), задана произвольная несамоуравновешенная нагрузка

$$\tau_{yz}^{\pm} = -\tau(x) \pm \mu(x) \quad (x \geqslant 0),$$

КИН определяются по формуле [1, 4]

$$K_{III} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\tau(x)\,dx}{\sqrt{x}}.$$

В частности, когда на участке, примыкающем к вершине трещины, действует постоянная нагрузка, а остальная поверхность трещины свободна от напряжений (см. рис. 5.7; $T = 0$), то [5,8] $K_{III} = 2\tau\sqrt{2b/\pi}$.

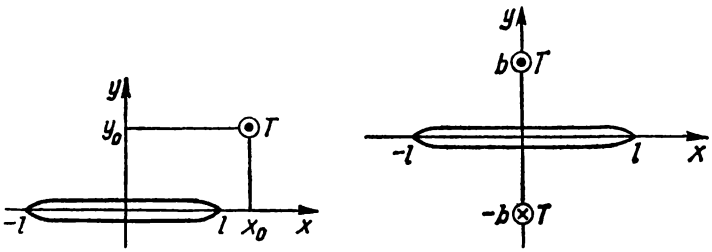


Рис. 5.5. Бесконечное тело с прямолинейной трещиной продольного сдвига при действии сосредоточенной силы во внутренней точке тела.

Рис. 5.6. Бесконечное тело с прямолинейной трещиной при продольном сдвиге двумя сосредоточенными силами.

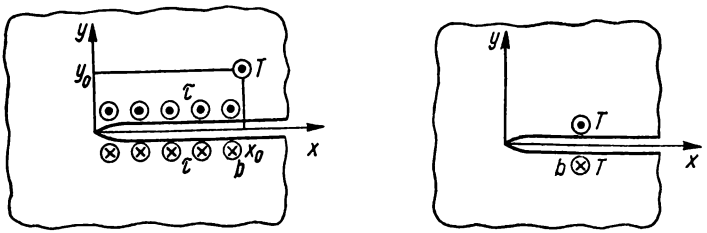


Рис. 5.7. Прямолинейная полубесконечная трещина при действии кусочно-постоянной нагрузки на ее берегах и сосредоточенной силы во внутренней точке тела.

Рис. 5.8. Прямолинейная полубесконечная трещина при действии двух сдвигающих сосредоточенных сил на ее берегах.

Если же к берегам трещины приложены две сдвигающие сосредоточенные силы T (рис. 5.8), КИН $K_{III} = 2T/\sqrt{2\pi b}$ [5].

Когда сосредоточенная сдвигающая сила T действует во внутренней точке тела $z_0 = x_0 + iy_0$, а берега трещины свободны от нагрузки (см. рис. 5.7; $\tau = 0$), то [4]

$$K_{III} = (T/\sqrt{2\pi})\,\mathrm{Re}\,(1/\sqrt{z_0}),$$

где $\sqrt{z_0} \to \pm\sqrt{x_0}$ $(x_0 > 0)$ при стремлении точки z_0 к верхнему (+) или нижнему (—) берегу трещины.

Продольный сдвиг анизотропного тела с прямолинейной трещиной рассматривался в работах [3, 9—11].

5.2. Бесконечное тело с криволинейной трещиной

Дугообразная трещина. Пусть тело ослаблено криволинейной трещиной, расположенной вдоль дуги L окружности радиусом R от точки $z = a = R\exp(-i\alpha)$ до $z = b = \bar{a}$. Берега трещины нагружены произвольной несамоуравновешенной нагрузкой

$$\tau_{rz}^{\pm} = \tau(t) \pm \mu(t) \quad (t = x + iy \in L),$$

а на бесконечности напряжения отсутствуют (рис. 5.9). КИН определяется по формуле [1]

$$K_{\mathrm{III}}^{\pm} = \frac{1}{\pi\sqrt{R\sin\alpha}}\left[\mp \mathrm{Re}^{\pm i\alpha/2}\int_L \frac{\sqrt{(t-a)(t-\bar{a})}\,\tau(t)\,dt}{t(t-\mathrm{Re}^{\pm i\alpha})} + Z\sin\frac{\alpha}{2}\right],$$

где

$$Z = \int_L \mu(t)\,ds = -iR\int_L \mu(t)\frac{dt}{t}.$$

Когда берега трещины свободны от нагрузки, а тело находится под действием продольного сдвига на бесконечности (рис. 5.10), то [2, 5, 7, 12, 13]

$$K_{\mathrm{III}}^{\pm} = \tau\sqrt{\pi R\sin\alpha}\,\sin(\gamma \mp \alpha/2).$$

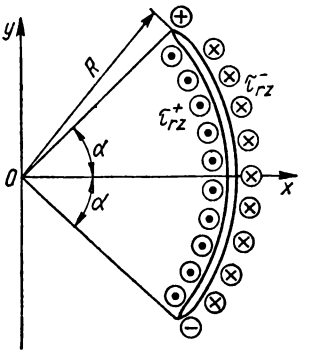


Рис. 5.9. Бесконечное тело с дугообразной трещиной при действии на ее берегах произвольной сдвигающей нагрузки.

Слабоискривленная трещина. Пусть тело ослаблено гладким криволинейным разрезом L, форма которого определяется уравнением

$$y = \lambda f(x) \quad (|x| \leqslant a),$$

где λ — безразмерный малый параметр, т. е. трещина близка по конфигурации к прямолинейному разрезу вдоль отрезка $-a \leqslant x \leqslant a$ оси x (рис. 5.11). На берегах разреза задана произвольная несамоуравновешенная нагрузка

$$\tau_{nz}^{\pm} = \tau(t) \pm \mu(t), \quad t = x + iy \in L,$$

а напряжения на бесконечности отсутствуют. КИН даются выражением [1, 14]

$$K_{\mathrm{III}}^{\pm} = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1\pm\xi}{1\mp\xi}}\left\{\tau_0(\xi) + \lambda\left\{\tau_1(\xi) + \frac{1}{2}\tau_0(\xi)\times\right.\right.$$

$$\times\,\mathrm{Re}\,[2\omega_1'(\xi) - \omega(1,-1) \mp \omega(\xi,1) \pm \omega(\xi,-1)] +$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\mu_0(s)\,\mathrm{Im}\,\omega_\xi'(s,\xi)\,ds\right\}\right\} d\xi + O(\lambda^2),$$

где $\tau_0(\xi)$, $\tau_1(\xi)$ и $\mu_0(\xi)$ — коэффициенты разложения функций $\tau(\xi) = \tau(\omega(\xi))$ и $\mu(\xi) = \mu(\omega(\xi))$ в ряды по степеням λ; $\omega(\xi) = a[\xi + \lambda\omega_1(\xi)]$; $a\omega_1(\xi) = if(a\xi)$; $\omega(s,\xi) = [\omega_1(s) - \omega_1(\xi)]/(s-\xi)$.

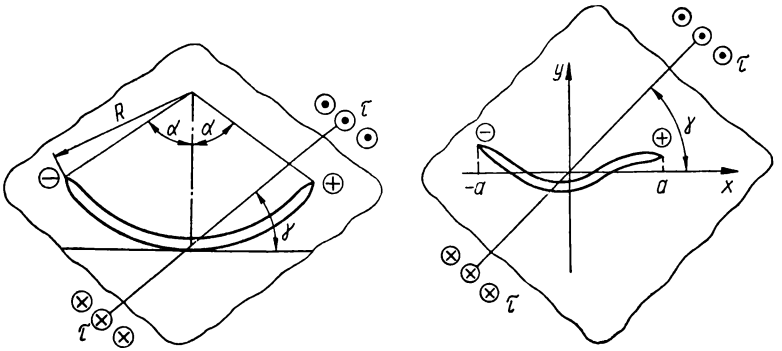


Рис. 5.10. Бесконечное тело с дугообразной трещиной при продольном сдвиге на бесконечности.

Рис. 5.11. Бесконечное тело со слабоискривленной трещиной при продольном сдвиге на бесконечности.

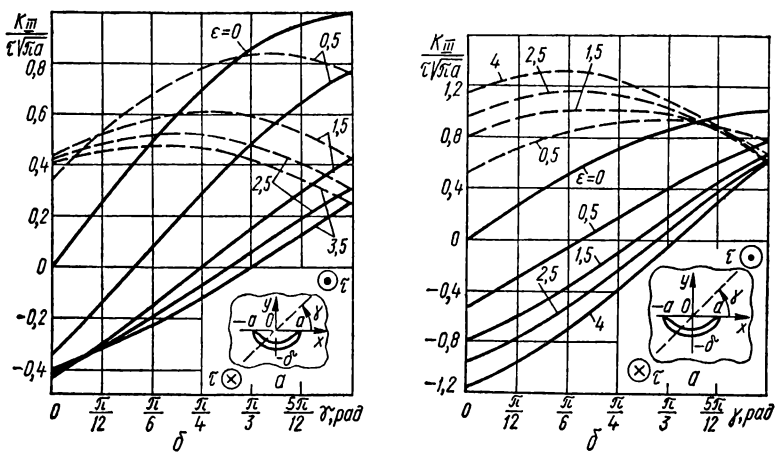


Рис. 5.12. Схема продольного сдвига бесконечного тела с трещиной вдоль дуги параболы (*а*) и зависимость КИН $K_{III}/(\tau\sqrt{\pi a})$ от угла α для правой (сплошные кривые) и левой (штриховые кривые) вершин трещины ($\varepsilon = \delta/a$; δ — наибольшее удаление контура трещины от прямой, проходящей через ее вершины; $2a$ — расстояние между вершинами) (*б*) [1].

Рис. 5.13. Схема продольного сдвига бесконечного тела с трещиной вдоль дуги полуэллипса (*а*) и зависимость КИН $K_{III}/(\tau\sqrt{\pi a})$ от угла α для правой (сплошные кривые) и левой (штриховые кривые) вершин трещины ($\varepsilon = \delta/a$; δ и a — полуоси эллипса) (*б*) [1].

В случае, когда берега трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности тело находится под действием продольного сдвига (рис. 5.11), КИН равен [1, 14]

$$K_{\mathrm{III}}^{\pm} = \tau \sqrt{\pi a} \left\{ \sin\gamma \left[1 + (\lambda/2)\,\omega(1, -1)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda}{\pi} \cos\gamma \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1 \pm \xi}{1 \mp \xi}}\, \operatorname{Im}\omega'(\xi)\, d\xi \right\} + O(\lambda^2).$$

Приближенное аналитическое решение задачи в случае прямолинейной трещины, оканчивающейся искривлением в форме дуги окружности, имеется также в работе [15].

Трещина вдоль дуги параболы или эллипса. Пусть тело ослаблено симметричной трещиной, расположенной вдоль дуги параболы (рис. 5.12, *а*) или полуэллипса (рис. 5.13, *а*). Берега трещин свободны от напряжений, а тело находится под действием сдвигающей нагрузки на бесконечности. Задачи решены методом СИУ в работе [1]. Численные результаты для КИН приведены на рис. 5.12, *б* и 5.13, *б*.

5.3. Бесконечное тело с трещиной ветвления

Ломаная трещина. Пусть тело ослаблено ломаной трещиной, состоящей из двух звеньев различной длины. Берега трещины свободны от нагрузки, а тело находится под действием продольного сдвига на бесконечности (рис. 5.14). КИН определяется по формуле [2]

$$K_{\mathrm{III}}^{\pm} = \tau \sqrt{\pi l^{\pm}} \sin\left[(\gamma \mp \beta) - m\,(3\pi/2 + \alpha)\right] \times$$

$$\times \left[\sin\left((\alpha \mp \beta)/2\right)/\sin\left((\alpha \pm \beta)/2\right)\right]^{m} / \sqrt{2\cos\beta \sin\left((\alpha + \beta)/2\right) \sin\left((\alpha - \beta)/2\right)}, \tag{5.2}$$

где $l^{+} = b$, $l^{-} = a$; величины α и β можно найти из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\sin\beta = m \sin\alpha \quad (0 \leqslant m \leqslant 1), \\ &b/a = \operatorname{tg}\left((\alpha + \beta)/2\right) \operatorname{tg}\left((\alpha - \beta)/2\right) \left[\sin(\alpha + \beta)/\sin(\alpha - \beta)\right]^{m} \leqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

В частном случае двух равных трещин, пересекающихся под прямым углом ($a = b$, $m = {}^{1}/_{2}$, $\alpha = \pi/2$), отсюда следует [2]

$$K_{\mathrm{III}}^{\pm} = -2 \cdot 3^{-3/4} \tau \sqrt{\pi a} \sin(\gamma \mp \pi/6).$$

Когда тело, ослабленное симметричной трещиной, сдвигается на бесконечности в плоскостях, параллельных плоскости симметрии (рис. 5.15), КИН равен [16, 17]

$$K_{\mathrm{III}} = (\tau/2) \sqrt{\pi a}\, (1 - 2m)\, m^{-m}\, (1 - m)^{m-1}.$$

Если же сдвиг происходит в плоскостях, перпендикулярных плоскости симметрии (рис. 5.16), то [18, 19]

$$K_{\mathrm{III}} = \tau \sqrt{\pi a}\, (m/(1 - m))^{1/2 - m}.$$

Когда напряжения на бесконечности отсутствуют, а в угловой точке симметричной ломаной трещины на противоположных берегах действуют

сосредоточенные силы T (рис. 5.17), то КИН равен [20, 21]

$$K_{II} = (T/\sqrt{\pi a})\,[4m\,(1-m)]^{-1/2}.$$

Пусть напряженное состояние тела с прямолинейной полубесконечной трещиной, находящегося в условиях антиплоской деформации (рис. 5.18; $l = 0$), характеризуется КИН K^0_{III}. Тогда КИН в вершине A

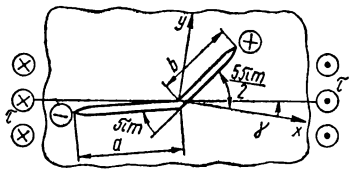


Рис. 5.14. Бесконечное тело с двухзвенной ломаной трещиной при продольном сдвиге на бесконечности.

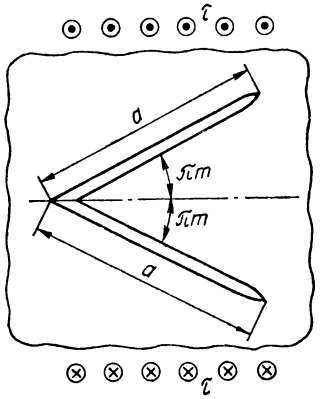
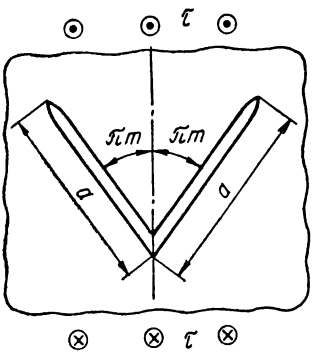


Рис. 5.15. Бесконечное тело с двухзвенной симметричной ломаной трещиной при продольном сдвиге на бесконечности в плоскостях, параллельных плоскости симметрии.



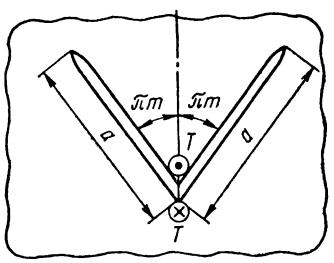


Рис. 5.16. Бесконечное тело с двухзвенной симметричной ломаной трещиной при продольном сдвиге на бесконечности в плоскостях, перпендикулярных плоскости симметрии.

Рис. 5.17. Бесконечное тело с двухзвенной симметричной трещиной при действии на ее берегах сдвигающих сосредоточенных сил.

ответвления, исходящего из конца полубесконечного разреза (рис. 5.18), дается соотношением [22—24]

$$K_{III} = \{[(\pi-\alpha)/(\pi+\alpha)]^{\alpha/2\pi}\}\,K^0_{III}.$$

Этот результат следует из решения (5.2) и (5.3), когда отношение длин звеньев трещины стремится к нулю.

Данные по КИН для двухзвенной ломаной трещины имеются также в работах [1, 7, 13, 25]. Рассматривался также случай трехзвенной ломаной трещины [1, 25, 26].

Трехзвенная трещина ветвления. Пусть в теле имеется симметричная трещина ветвления, состоящая из трех прямолинейных звеньев. Берега трещины свободны от нагрузки, а тело находится под действием продольного сдвига на бесконечности (рис. 5.19). КИН определяются по формулам [27]

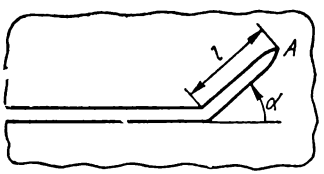


Рис. 5.18. Продольный сдвиг тела с полубесконечной прямолинейной трещиной с ответвлением.

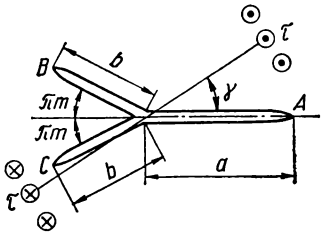


Рис. 5.19. Продольный сдвиг тела с трещиной ветвления, состоящей из трех прямолинейных звеньев.

$$
\left.
\begin{aligned}
&K_{\mathrm{III}}(A) = \tau\sqrt{\pi a}\,2^{-m}\,(1-\cos\alpha)^{m-1/2}\,(1-m\cos^2(\alpha/2))^{-1/2}\sin\gamma,\\
&K_{\mathrm{III}}(B) = (1/2)\,\tau\sqrt{\pi b}\,(1-m)^{m-1/2}\,m^{-m}\,(\cos(\alpha/2))^{-1}\times\\
&\times(1-m\cos^2(\alpha/2))^{-1/2}\sin(\gamma-\beta),\\
&K_{\mathrm{III}}(C) = (1/2)\,\tau\sqrt{\pi b}\,(1-m)^{m-1/2}\,m^{-m}\,(\cos(\alpha/2))^{-1}\times\\
&\times(1-m\cos^2(\alpha/2))^{-1/2}\sin(\gamma+\beta),
\end{aligned}
\right\} \qquad (5.4)
$$

где параметры α и β $(0<\alpha<\beta<\pi)$ находятся из системы уравнений

$$
\left.
\begin{aligned}
&\cos^2(\beta/2) = m\cos^2(\alpha/2),\\
&b/a = (1-m)^{1-m}\,m^m\cos^2(\alpha/2)\,(\sin(\alpha/2))^{2(m-1)}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (5.5)
$$

При $\gamma=\pi/2$ значение КИН $K_{\mathrm{III}}(B)$ в несколько ином виде получено в работе [16]. Данные по КИН для трехзвенных трещин ветвления имеются также в работах [1, 28]. Рассматривался также случай, когда из обеих вершин прямолинейного разреза исходят прямолинейные симметричные ответвления [1].

Пусть напряженное состояние тела с прямолинейной полубесконечной трещиной, находящегося в условиях антиплоской деформации (рис. 5.20; $l=0$), характеризуется КИН K^0_{III}. Тогда КИН в вершинах ответвляющихся трещин, исходящих из конца полубесконечного разреза (рис. 5.20), дается соотношением

$$K_{\mathrm{III}} = K^0_{\mathrm{III}}\,(1/m-1)^{m/2}/\sqrt{2}. \qquad (5.6)$$

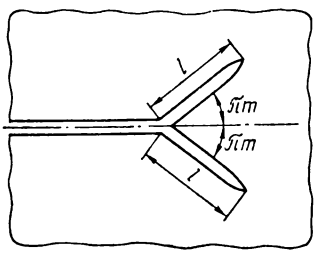
Этот результат следует из решения (5.4) и (5.5), когда отношение длин звеньев трещины стремится к нулю.

При $m = 0$ и $m = 1/2$ из формулы (5.6) находим [29]

$$K_{III} = K^0_{III}/\sqrt{2}. \tag{5.7}$$

Пусть тело содержит трещину ветвления, состоящую из дугообразной трещины, на контур которой симметрично выходит прямолинейный разрез. Берега трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы сдвигающие напряжения (рис. 5.21). КИН в вершине A равен [16]

$$K_{III}(A) = \tau\sqrt{\pi a}\sin\alpha\,[a\sin(\alpha/2) + c_1]\,\{2\,\mathrm{tg}(\alpha/2)\times$$
$$\times\,[a^2\cos^2(\alpha/2) + 2ac_1(1 - \sin(\alpha/2))]\}^{-1/2}, \tag{5.8}$$



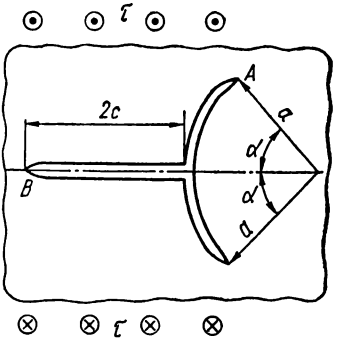


Рис. 5.20. Продольный сдвиг тела с полубесконечной прямолинейной трещиной с симметричным ответвлением.

Рис. 5.21. Продольный сдвиг тела с трещиной ветвления, состоящей из прямолинейного и дугообразного звеньев.

где параметр c_1 определяется из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}&(a + 2c - ae^{i\alpha})/(a + 2c - ae^{-i\alpha}) = [(a + 2c_0 -\\ &- iae^{i\alpha/2})/(a + 2c_0 + iae^{-i\alpha/2})]^2,\\ &a + 2c_1 = (a/2)\,[(a + 2c_0)/a + a/(a + 2c_0)].\end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

Из соотношений (5.8) и (5.9) при $a\alpha \ll c$ следует также решение (5.7).

Крестообразная трещина. Пусть тело ослаблено трещиной в виде креста. Берега трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы сдвигающие напряжения (рис. 5.22). КИН даются выражениями [19]

$$\left.\begin{aligned}K_{III}(A) &= \tau\sqrt{\pi l}\,(\sin\gamma - d\cos\gamma),\\ K_{III}(B) &= \tau\sqrt{\pi h_1/2}\,\sqrt{1 + f/g}\cos\gamma,\\ K_{III}(C) &= \tau\sqrt{\pi h_2/2}\,\sqrt{1 + g/f}\cos\gamma,\end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

где $d = (f - g)/(2\sqrt{fg})$, $f = \sqrt{l^2 + h_2^2}$, $g = \sqrt{l^2 + h_1^2}$.

Когда $h_1 = h_2 = h$, из формулы (5.10) следует [19, 27, 28]

$$K_{III}(A) = \tau\sqrt{\pi l}\sin\gamma, \quad K_{III}(B) = \tau\sqrt{\pi h}\cos\gamma,$$

т. е. симметричные ветви не оказывают влияния на значение КИН.

Звездообразная трещина. Пусть тело ослаблено трещиной, состоящей из n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) одинаковых разрезов, исходящих из одной и той же точки под равными углами друг к другу (звездообразная трещина). Берега трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы сдвигающие напряжения (рис. 5.23). КИН определяются формулами [2, 27]

$$K_{III}(A_j) = 2^{(3n-4)/2n}\,\tau\sqrt{\pi a/n}\,\sin(\gamma - 2\pi j/n) \quad (j = \overline{0,\ n-1}).$$

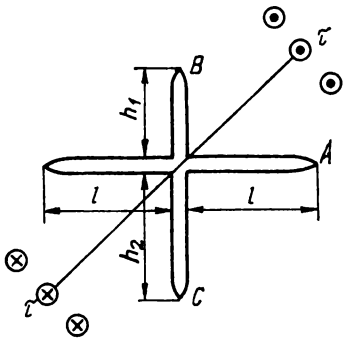


Рис. 5.22. Продольный сдвиг тела с крестообразной трещиной.

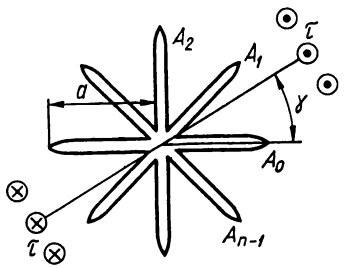


Рис. 5.23. Продольный сдвиг тела, ослабленного звездообразной трещиной.

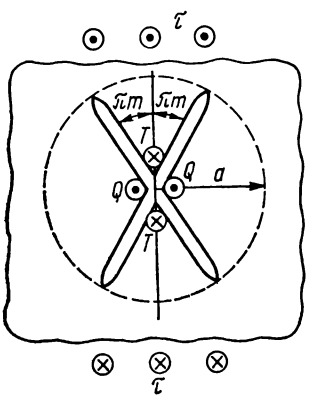


Рис. 5.24. Продольный сдвиг тела с Х-образной трещиной.

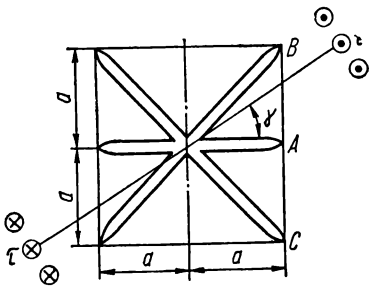


Рис. 5.25. Продольный сдвиг тела с трещиной в виде «звезды» с неравными лучами.

Когда трещина состоит из двух симметрично пересекающихся разрезов равной длины (Х-образная трещина) (рис. 5.24), то при сдвиге на бесконечности ($Q = T = 0$) КИН равен [19]

$$K_{III} = \tau\sqrt{\pi a}\,2^{-m}\,[m/(1-2m)]^{1/2-m}.$$

Если же на бесконечности напряжения отсутствуют, а в угловых точках берегов трещины действуют сдвигающие сосредоточенные силы Q и T (см. рис. 5.24; $\tau = 0$), то [30]

$$K_{III} = (1/\sqrt{2\pi a})\,[Q\sqrt{2m/(1-2m)} + T\sqrt{(1-2m)/(2m)}],$$

В случае звездообразной трещины, вершины которой размещены в вершинах квадрата и в центрах двух противоположных его сторон (рис. 5.25), КИН равны [19]

$$K_{III}(A) = \tau\sqrt{\pi a}\,5^{-1/4}\sin\gamma,$$

$$K_{III}(B) = \tau\sqrt{\pi a}\,2^{1/4}(5^{-1/4}\sin\gamma - 2^{-1/2}\cos\gamma),$$

$$K_{III}(C) = -\tau\sqrt{\pi a}\,2^{1/4}(5^{-1/4}\sin\gamma + 2^{1/2}\cos\gamma).$$

Данные по КИН для Х-образной трещины имеются также в работе [31].

5.4. Бесконечное тело с системой коллинеарных трещин

Две полубесконечные трещины. Пусть в теле имеются две полубесконечные коллинеарные трещины (рис. 5.26; $T = Q = 0$). Берега трещин загружены усилиями $\sigma_{yz}^{\pm} = \tau(x)$ ($|x| \geqslant a$), а на бесконечности напряжения отсутствуют. КИН определяется по формуле [4]

$$K_{III}(\pm a) = -\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_{a}^{\infty}\right)\tau(x)\sqrt{\frac{x \pm a}{x \mp a}}\,dx.$$

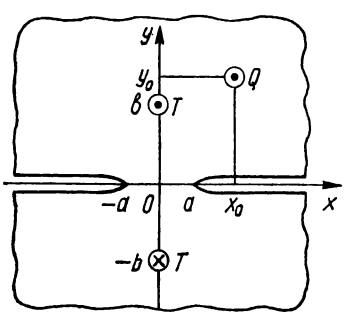


Рис. 5.27. Бесконечное тело с двумя полубесконечными трещинами продольного сдвига при действии на их берегах кусочно-постоянной нагрузки.

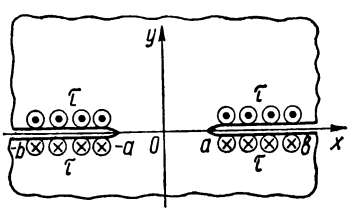


Рис. 5.26. Бесконечное тело с двумя полубесконечными коллинеарными трещинами при действии сосредоточенных сдвигающих сил.

Если же берега трещин свободны от нагрузки, а в точке $z = z_0 = x_0 + iy_0$ приложена сосредоточенная сила Q (рис. 5.26; $T = 0$), КИН равен [4]

$$K_{III}(\pm a) = (Q/(2\sqrt{\pi a}))\,\mathrm{Im}\,[(z_0 \pm a)/\sqrt{l^2 - z^2}].$$

Когда тело находится под действием двух противоположно направленных сосредоточенных сил T, приложенных в точках $z_0 = ib$ и $z_0 = -ib$ (см. рис. 5.26; $Q = 0$), то [4]

$$K_{III} = (T/\sqrt{\pi a})\,b/\sqrt{b^2 + a^2}.$$

Отсюда при $b \to \infty$ получаем решение в случае однородного сдвига на бесконечности усилиями, главный вектор которых равен T [2, 5],

$$K_{III} = T/\sqrt{\pi a}.$$

Отметим, что в случае самоуравновешенной нагрузки продольного сдвига $\sigma_{yz}^{+} = \sigma_{yz}^{-} = \tau(x)$, действующей на берегах любой системы коллинеарных трещин, КИН K_{III} выражаются через $\tau(x)$ так, как КИН K_I для трещин нормального отрыва (K_{II} для трещин поперечного сдвига) выражаются через самоуравновешенную нормальную нагрузку $p(x) = \sigma_y^{+} = \sigma_y^{-}$ (касательную нагрузку $q(x) = \tau_{xy}^{+} = \tau_{xy}^{-}$). Поэтому ряд результатов для КИН K_{III} можно записать, используя аналогичные решения для КИН K_I и K_{II} (см. п. 2.9). В частности, когда на симметричных

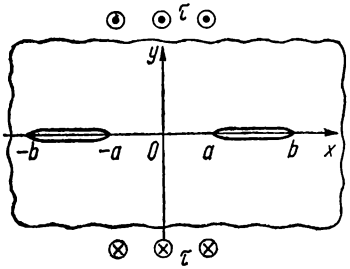


Рис. 5.28. Бесконечное тело с двумя коллинеарными трещинами равной длины при продольном сдвиге на бесконечности.

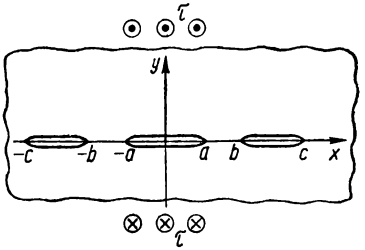


Рис. 5.29. Бесконечное тело с тремя коллинеарными трещинами конечной длины при продольном сдвиге на бесконечности.

участках берегов полубесконечных трещин, примыкающих к их вершинам, действуют постоянные сдвигающие усилия τ (рис. 5.27), то [5]

$$K_{III} = (2\tau/\sqrt{\pi a})\sqrt{b^2 - a^2}.$$

Две коллинеарные трещины конечной длины. Пусть в теле имеются две коллинеарные трещины равной длины. Берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности действуют однородные сдвигающие усилия (рис. 5.28). КИН K_{III} определяются по формулам (см. п. 2.9)

$$\left.\begin{aligned} K_{III}(\pm a) &= \tau\sqrt{\pi a}\,[b^2 E(k)/K(k) - a^2]/(a\sqrt{b^2 - a^2}), \\ K_{III}(\pm b) &= \tau\sqrt{\pi b}\,[1 - E(k)/K(k)]/k, \end{aligned}\right\} \qquad (5.11)$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем $k = \sqrt{1 - a^2/b^2}$.

Три коллинеарные трещины. Пусть берега трех коллинеарных трещин конечной длины свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы постоянные сдвигающие напряжения (рис. 5.29). КИН K_{II} даются соотношениями (см. п. 2.9, а также [6])

$$K_{III}(\pm a) = \tau\sqrt{\pi a}\sqrt{(c^2 - a^2)/(b^2 - a^2)}\,E(k)/K(k),$$

$$k^2 = (c^2 - b^2)/(c^2 - a^2),$$

$$K_{III}(\pm b) =$$

$$= \tau\sqrt{\pi b}\sqrt{(b^2 - a^2)/(c^2 - b^2)}\,\{[(c^2 - a^2)/(b^2 - a^2)]\,E(k)/K(k) - 1\},$$

$$K_{III}(\pm c) = \tau\sqrt{\pi c}\sqrt{(c^2 - a^2)/(c^2 - b^2)}\,[1 - E(k)/K(k)].$$

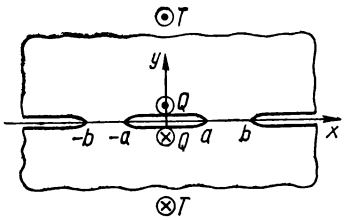


Рис. 5.30. Бесконечное тело с одной конечной и двумя полубесконечными коллинеарными трещинами при действии сдвигающих сосредоточенных сил.

В случае одной конечной и двух полубесконечных трещин, когда берега центральной трещины находятся под действием сдвигающих сосредоточенных сил Q (рис. 5.30; $T = 0$), КИН равны [21]

$$K_{III}(\pm a) = (Q/\sqrt{\pi a})/\sqrt{1-(a/b)^2},$$

$$K_{III}(\pm b) = (Q/\sqrt{3\pi a})\,(a/b)^{3/2}/\sqrt{1-(a/b)^2}.$$

Если же берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности действуют сдвигающие усилия, главный вектор которых равен T (см. рис. 5.30; $Q = 0$), то [5]

$$K_{III}(\pm a) = (T/\sqrt{\pi a})\,a/\sqrt{b^2-a^2},$$

$$K_{III}(\pm b) = (T/\sqrt{\pi b})\,b/\sqrt{b^2-a^2}.$$

5.5. Бесконечное тело с системой произвольно ориентированных прямолинейных трещин

Две симметричные полубесконечные трещины. Пусть в теле имеются две прямолинейные полубесконечные трещины. Берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности действуют усилия с главным вектором T (рис. 5.31). КИН находится по формуле [19]

$$K_{III} = (T/(2\sqrt{\pi a}))\,[m(1-m)]^{-1/2}.$$

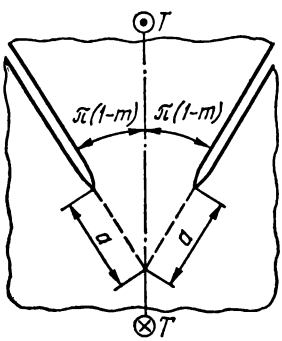


Рис. 5.31. Продольный сдвиг тела с двумя симметричными полубесконечными трещинами.

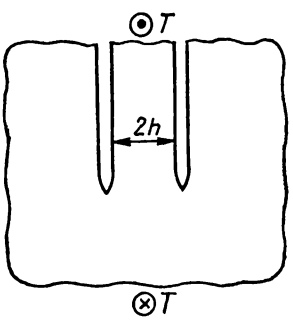


Рис. 5.32. Продольный сдвиг тела с двумя параллельными полубесконечными трещинами.

Отсюда в предельном случае получим решение, когда тело ослаблено двумя параллельными полубесконечными трещинами (рис. 5.32):

$$K_{III} = T/(2\sqrt{h}).$$

Данные по КИН имеются также в работе [1].

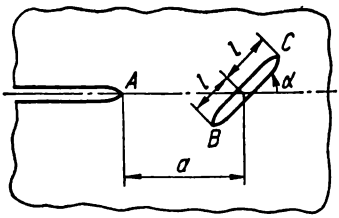
Полубесконечная и конечная прямолинейные трещины. Пусть напряженное состояние тела с полубесконечной трещиной при отсутствии конечной трещины ($l = 0$) характеризуется КИН $K_{III}(A) = K^0_{III}$. Если же в теле кроме полубесконечной трещины имеется еще трещина конечной длины (рис. 5.33), то КИН в вершинах трещин будут равны [32]

$$\left.\begin{aligned} &K_{III}(A) = K^0_{III}\,[(1+\lambda)/\sqrt{1-\lambda^2}]\,E(\rho)/K(\rho), \quad \lambda = l/a,\\ &\rho = \sqrt{2l/(l+a)}\,,\\ &K_{III}(B) = K^0_{III}\,[(1+\lambda)\,E(\rho)/K(\rho) - (1-\lambda)]/\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}\,,\\ &K_{III}(C) = K^0_{III}\,[(1+\lambda) - (1+\lambda)\,E(\rho)/K(\rho)]/\sqrt{2\lambda(1-\lambda)} \end{aligned}\right\} \quad (5.12)$$

при $\alpha = 0$ и

$$\left.\begin{aligned} &K_{III}(A) = K^0_{III}\,(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})\,(1+\lambda^2)^{-1/4}\,E(k)/K(k),\\ &k = \sqrt{2l/(l+\sqrt{l^2+a^2})},\\ &K_{III}(B) = K^0_{III}\,[\sqrt{1+\lambda^2} -\\ &-(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})\,E(k)/K(k)]/\sqrt{2\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \end{aligned}\right\} \quad (5.13)$$

при $\alpha = \pi/2$. Здесь $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Соотношения (5.12) и (5.13) характеризуют взаимодействие большой и малой трещин. Они определяют изменение КИН в вершине большой трещины при появлении около нее малой трещины, а также дают при этом значения КИН в вершинах малой трещины.



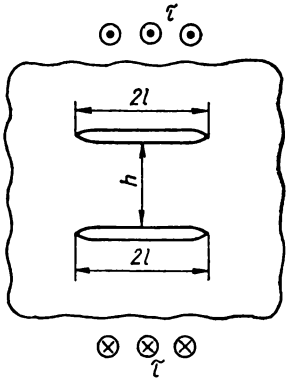


Рис. 5.33. Взаимодействие между полубесконечной и конечной трещинами при продольном сдвиге.

Рис. 5.34. Продольный сдвиг тела с двумя параллельными трещинами.

Две параллельные трещины. Пусть берега двух параллельных трещин одинаковой длины свободны от нагрузки, а на бесконечности действуют постоянные сдвигающие усилия (рис. 5.34). КИН определяется по формуле [17]

$$K_{III} = \tau\sqrt{hK(k)/2}\times$$

$$\times\sqrt[4]{[1-E(k)/K(k)]\,[k^2-1+E(k)/K(k)]/[E(k)/K(k)]}\,, \quad (5.14)$$

где параметр k определяется из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} k^2 \sin^2 \varphi &= 1 - E(k)/K(k), \\ l/h &= (1/\pi)\,[K(k)\,E(k, \varphi) - E(k)\,F(k, \varphi)]. \end{aligned}\right\} \qquad (5.15)$$

Здесь φ — неизвестный параметр; $F(k, \varphi)$ и $E(k, \varphi)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно; $K(k) = F(k, \pi/2)$; $E(k) = E(k, \pi/2)$.

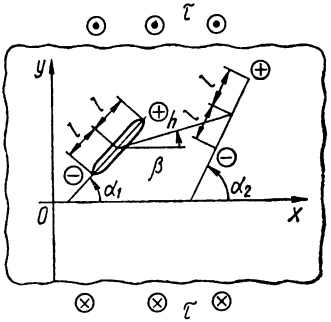


Рис. 5.35. Продольный сдвиг тела с двумя произвольно ориентированными прямолинейными трещинами.

При большом относительном расстоянии между трещинами из решений (5.14) и (5.15) следует [4, 17]

$$K_{III} = \tau \sqrt{\pi l}\,[1 - (1/2)\,l^2/h^2] + O(l^4/h^4).$$

При малом относительном расстоянии между трещинами КИН равен [17]

$$K_{III} = \tau \sqrt{\pi l/2}\,\{1 + (h/(2\pi l))\,[\ln(h/(4\pi l)) + 2/3]\}^{-1}.$$

Данные по КИН имеются также в работах [33, 34].

Две произвольно ориентированные трещины. Пусть в теле имеются две прямолинейные трещины равной длины. Берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы сдвигающие напряжения (рис. 5.35). Асимптотическое решение при большом относительном расстоянии между трещинами имеет вид [4, 35]

$$K^{\pm}_{III,n} = \tau \sqrt{\pi l}\,\{\cos\alpha_n + (\lambda^2/8)\cos\alpha_k \cos(\alpha_n + \alpha_k - 2\beta) \mp$$
$$\mp (-1)^k (\lambda^3/16)\cos\alpha_k \cos(2\alpha_n + \alpha_k - 3\beta) + (\lambda^4/64)\{\cos\alpha_n \times$$
$$\times \cos^2(\alpha_n + \alpha_k - 2\beta) + (3/2)\,[2\cos(3\alpha_n + \alpha_k - 4\beta) +$$
$$+ \cos(\alpha_n + 3\alpha_k - 4\beta)]\cos\alpha_k\}\} + O(\lambda^5), \quad \lambda = 2l/h$$
$$(n = 1,\ k = 2 \text{ или } n = 2,\ k = 1).$$

Здесь $K^{\pm}_{III,1}$ и $K^{\pm}_{III,2}$ — КИН в правых (+) и левых (—) вершинах первой ($n = 1$) и второй ($n = 2$) трещин с углами ориентации α_1 и α_2 соответственно.

Данные по КИН для двух прямолинейных трещин различной ориентации имеются в работах [7, 33, 34, 36, 37]. Рассматривался также случай трех и более прямолинейных трещин [4, 25, 31].

5.6. Бесконечное тело с периодической системой криволинейных трещин

Система трещин при циклической симметрии. Пусть на окружности радиуса R равномерно размещена система N дугообразных трещин одинаковой длины (рис. 5.36). На берегах трещин задана одна и та же несамоуравновешенная нагрузка

$$\tau^{\pm}_{rz} = \tau(t) \pm \mu(t), \quad t = R\exp(i\theta) \quad (-\alpha \leqslant 0 \leqslant \alpha),$$

а напряжения на бесконечности отсутствуют, КИН в вершинах трещины

$A\ (K_{III}^{-})$ и $B\ (K_{III}^{+})$ равны [1,38]

$$K_{III}^{\pm} =$$

$$= \frac{2\sqrt{R}}{\sqrt{\pi N \sin N\alpha}} \left[\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a \pm \xi}{a \mp \xi}} \frac{\tau(\omega(\xi))\, d\xi}{1+\xi^2} + \frac{N}{2} \sin\frac{N\alpha}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \mu(t)\, d\theta \right],$$

где $\omega(\xi) = R \exp[(2i/N) \operatorname{arctg} \xi]$, $a = \operatorname{tg}(N\alpha/2)$.

При действии на берега трещин постоянной нагрузки $\tau(t) = \tau = \text{const}$, $\mu(t) = 0$ (см. рис. 5.36; $T = 0$), КИН [1, 38]

$$K_{III} = \tau \sqrt{(2\pi R/N) \operatorname{tg}(N\alpha/2)}\,.$$

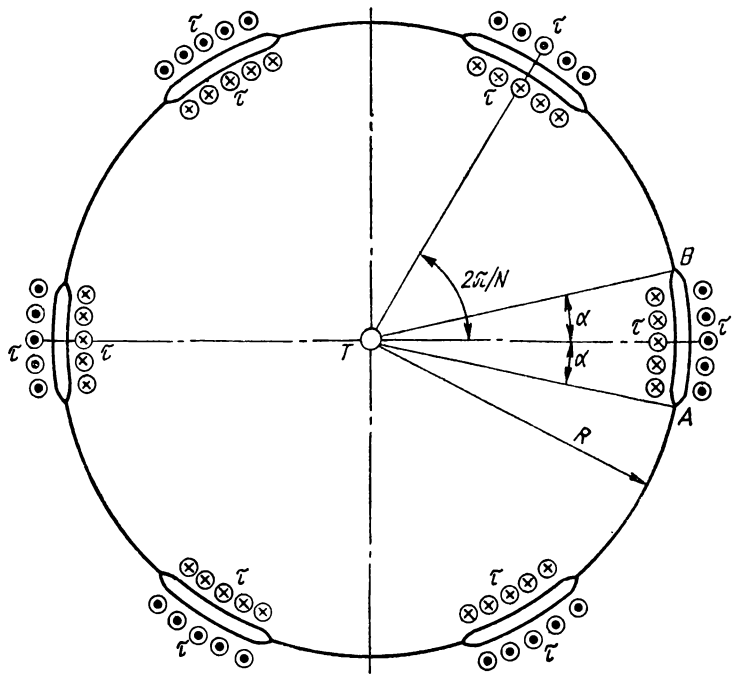


Рис. 5.36. Продольный сдвиг тела с системой дугообразных трещин при циклической симметрии.

По этой же формуле при $\tau = T/(2\pi R)$ определяется КИН в случае, когда берега трещин свободны, а в центре симметрии действует сосредоточенная сдвигающая сила T (см. рис. 5.36; $\tau = 0$).

Периодическая система трещин вдоль дуг окружности, параболы или полуэллипса. Пусть в основной полосе периодов имеется одна криволинейная симметричная трещина L. Берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы сдвигающие напряжения (рис. 5.37). Зависимости КИН от относительного расстояния между трещинами, полученные методом СИУ [1], показаны на рис. 5.38.

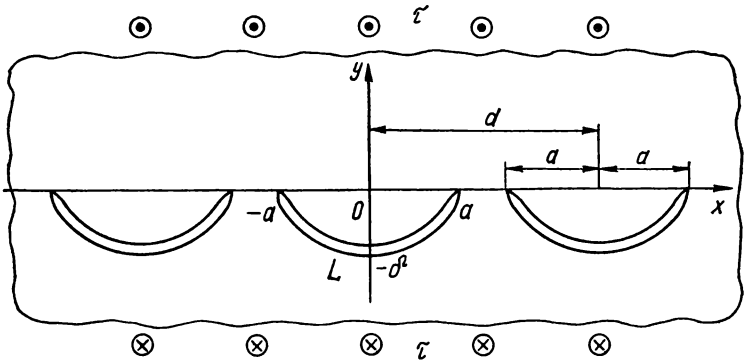


Рис. 5.37. Продольный сдвиг тела с периодической системой криволинейных трещин.

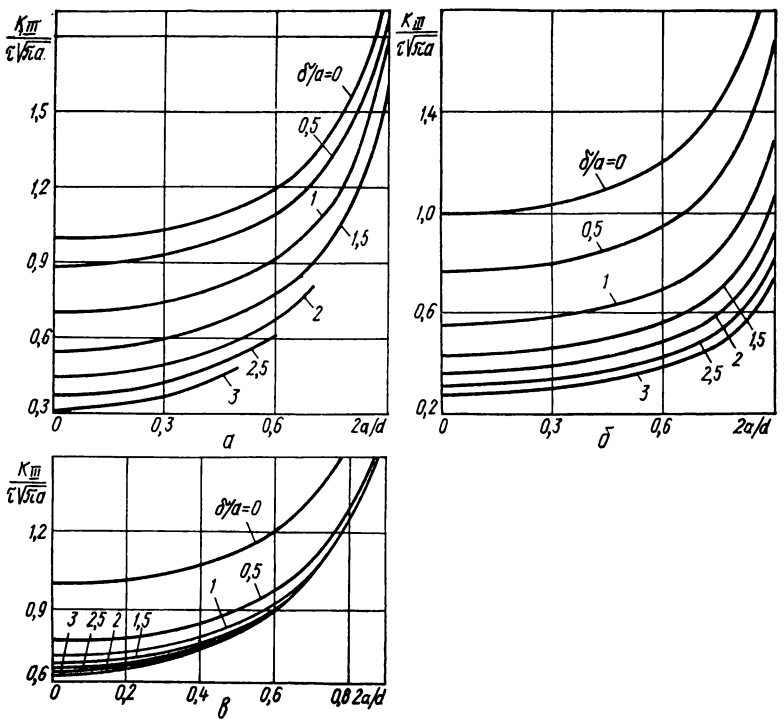


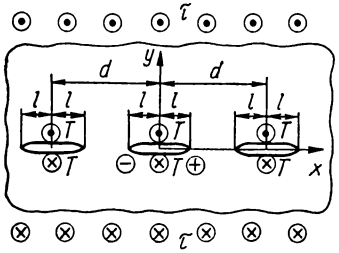
Рис. 5.38. Зависимость КИН $K_{III} / (\tau \sqrt{\pi a})$ при продольном сдвиге тела с периодической системой трещин вдоль дуги окружности (*а*), параболы (*б*) или полуэллипса (*в*) [1].

5.7. Бесконечное тело с периодической системой прямолинейных трещин

Система коллинеарных трещин. Пусть берега коллинеарных трещин (рис. 5.39) загружены произвольной несамоуравновешенной нагрузкой $\tau_{yz}^{\pm} = \tau(x) \pm \mu(x)$, $-l + kd \leqslant x \leqslant l + kd$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, а напряжения на бесконечности отсутствуют. КИН определяются соотношением [1]

$$K_{III}^{\pm} = -\frac{1}{\sqrt{(d/2)\sin(2\pi l/d)}} \int_{-l}^{l} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\pi l/d) \pm \operatorname{tg}(\pi x/d)}{\operatorname{tg}(\pi l/d) \mp \operatorname{tg}(\pi x/d)}}\, \tau(x)\, dx.$$

Отсюда следует, что КИН K_{III} не зависит от функции $\mu(x)$, а его зависимость от $\tau(x)$ такая же, как и зависимость КИН K_I от самоуравновешенной нагрузки $p(x)$, действующей на берегах периодической системы коллинеарных трещин нормального отрыва. Поэтому ряд результатов для K_{III} можно получить по аналогии (см. п. 2.13). В частности, при действии на берегах трещин постоянной сдвигающей нагрузки $\tau(x) = -\tau = \text{const}$, $\mu(l) = 0$ (или же при продольном сдвиге на бесконечности усилиями τ, когда берега трещин свободны от нагрузки (см. рис. 5.39; $T = 0$)) КИН равен [1, 4, 5, 39]



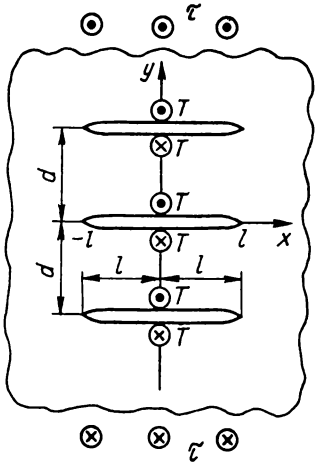


Рис. 5.39. Продольный сдвиг тела с периодической системой коллинеарных трещин.

Рис. 5.40. Продольный сдвиг тела с периодической системой параллельных трещин конечной длины.

$$K_{III} = \tau\sqrt{d \operatorname{tg}(\pi l/d)}\,. \tag{5.16}$$

Если же в центрах трещин действуют сдвигающие сосредоточенные силы (см. рис. 5.39; $\tau = 0$), то [1, 4]

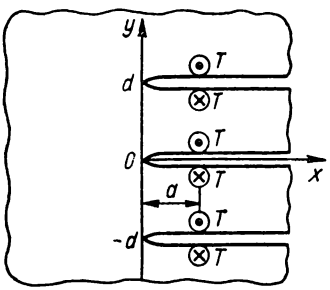
$$K_{III} = T/\sqrt{(d/2)\sin(2\pi l/d)}\,. \tag{5.17}$$

Система параллельных трещин конечной длины. Пусть на берегах периодической системы параллельных трещин (рис. 5.40) действует произвольная самоуравновешенная нагрузка, одна и та же на каждой трещине,

$\tau_{yz}^{\pm} = \tau(x)$, $-l \leqslant x \leqslant l$ ($y = kd$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). КИН находятся по формуле [1, 35]

$$K_{III}(\pm l) = -\frac{1}{\sqrt{(d/2)\,\mathrm{sh}\,(2\pi l/d)}} \int_{-l}^{l} \sqrt{\frac{\mathrm{th}\,(\pi l/d) \pm \mathrm{th}\,(\pi x/d)}{\mathrm{th}\,(\pi l/d) \mp \mathrm{th}\,(\pi x/d)}}\, \tau(x)\, dx.$$

При действии на берегах трещины постоянной сдвигающей нагрузки $\tau(x) = -\tau = \mathrm{const}$ (или же при продольном сдвиге на бесконечности



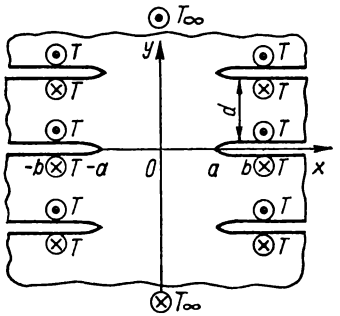


Рис. 5.41. Периодическая система параллельных полубесконечных трещин при действии на них сосредоточенных сдвигающих сил.

Рис. 5.42. Продольный сдвиг тела с периодической системой внешних параллельных трещин.

усилиями τ, когда берега трещины свободны от нагрузки (см. рис. 5.40; $T = 0$)) КИН равен [4, 5, 40]

$$K_{III} = \tau \sqrt{d\,\mathrm{th}\,(\pi l/d)}\,. \qquad (5.18)$$

Если же в центрах трещин действуют сосредоточенные сдвигающие силы T (см. рис. 5.40; $\tau = 0$), то [4]

$$K_{III} = T/\sqrt{(d/2)\,\mathrm{sh}\,(2\pi l/d)}\,.$$

В работах [4, 25, 35] также приведены данные по КИН для периодической системы параллельных сдвинутых трещин. Рассматривался также случай периодической системы параллельных пар трещин [41].

Система параллельных полубесконечных трещин. Пусть берега периодической системы полубесконечных параллельных трещин (рис. 5.41; $T = 0$) загружены произвольной самоуравновешенной нагрузкой $\tau_{yz}^{\pm} = \tau(x)$ ($x \geqslant 0$, $y = kd$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Тогда КИН будет [2, 4, 42]

$$K_{III} = -\frac{2}{\sqrt{d}} \int_{0}^{\infty} \frac{\tau(x)\, dx}{\sqrt{\exp(2\pi x/d) - 1}}\,.$$

При действии на берегах трещин постоянной нагрузки $\tau(x) = -\tau = \mathrm{const}$, КИН равен [5, 7, 42]

$$K_{III} = \tau \sqrt{d}\,. \qquad (5.19)$$

Если же берега трещин находятся под действием сосредоточенных сил (см. рис. 5.41), КИН дается формулой [4, 5, 42]

$$K_{III} = (2T/\sqrt{d})/\sqrt{\exp(2\pi a/d) - 1}\,.$$

Система внешних параллельных трещин. Пусть тело ослаблено периодической системой внешних параллельных трещин, расположенных вдоль лучей $|x| \geqslant a$ ($y = kd$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности действуют усилия, главный вектор которых равен T_∞ (рис. 5.42; $T = 0$). КИН дается выражением [5]

$$K_{III} = (2T_\infty/d)\sqrt{d\,\mathrm{cth}\,(\pi a/d)}\,.$$

Когда на бесконечности напряжения отсутствуют, а на берегах трещин действуют сосредоточенные силы (см. рис. 5.42; $T_\infty = 0$), то [5]

$$K_{III} = (2T/d)\sqrt{d\,\mathrm{cth}\,(\pi a/d)} \times$$

$$\times\ \mathrm{sh}\,(\pi b/d)/\sqrt{\mathrm{ch}^2(\pi b/d) - \mathrm{ch}^2(\pi a/d)}\,.$$

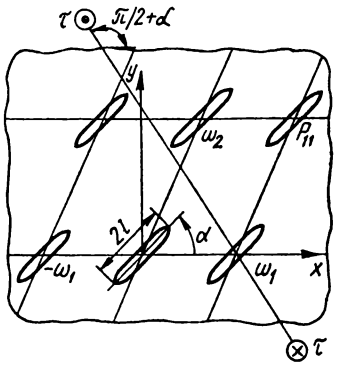


Рис. 5.43. Продольный сдвиг тела с двоякопериодической системой трещин.

Двоякопериодическая система трещин. Пусть в теле имеется двоякопериодическая система трещин произвольной ориентации. Центры трещин находятся в вершинах параллелограммов периодов, т. е. в точках $P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), где ω_1 и ω_2 ($\mathrm{Im}\,\omega_1 = 0$, $\mathrm{Im}\,(\omega_2/\omega_1) > 0$) — основные периоды. Берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности действуют сдвигающие усилия (рис. 5.43). Асимптотическое решение задачи при больших относительных расстояниях между трещинами получено в работах [4, 43]. Если центры трещин образуют правильную треугольную решетку ($\omega_2 = \omega_1 \exp(i\pi/3)$), то

$$K_{III} = \tau\sqrt{\pi l}\,[1 + \pi\lambda^2/(4\sqrt{3}) + \pi^2\lambda^4/48 +$$
$$+ (0{,}0932 + 0{,}2862\cos 6\alpha)\,\lambda^6] + O(\lambda^8), \quad \lambda = 2l/\omega_1.$$

В случае правильной квадратной решетки ($\omega_2 = i\omega_1$) КИН

$$K_{III} = \tau\sqrt{\pi l}\,[1 + \pi\lambda^2/8 + (\pi^2/64 + 0{,}2215\cos 4\alpha)\,\lambda^4 +$$
$$+ (\pi^3/512 + 0{,}1448\cos 4\alpha)\,\lambda^6] + O(\lambda^8), \quad \lambda = 2l/\omega_1.$$

Известны также замкнутые выражения для КИН в случаях прямоугольной [44] и ромбической [45] решеток трещин.

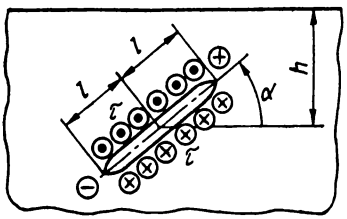
5.8. Полубесконечное пространство с трещинами

Внутренняя трещина. Пусть в полубесконечном теле имеется внутренняя прямолинейная трещина, берега которой загружены постоянными сдвигающими усилиями. Край полупространства свободен от нагрузки (рис. 5.44). Асимптотическое решение задачи имеет вид [4]

$$K_{III}^{\pm} = \tau\sqrt{\pi l}\,[1 + \lambda^2/8 \pm (\lambda^3/16)\sin\alpha +$$
$$+ (\lambda^4/128)(2 - 9\cos 2\alpha)] + O(\lambda^5), \quad \lambda = l/h.$$

При $\alpha = \pi/2$ точное решение задачи совпадает с решением в случае продольного сдвига бесконечного тела с двумя коллинеарными трещинами равной длины и дается формулами (5.11). Имеются также данные по КИН в случае криволинейной трещины [1].

Краевая трещина. В случае прямолинейной трещины, выходящей под прямым углом на свободный от нагрузки край полупространства, решение задачи такое же, как в случае бесконечного пространства с прямолинейной трещиной при действии симметричной нагрузки (см. п. 5.1).



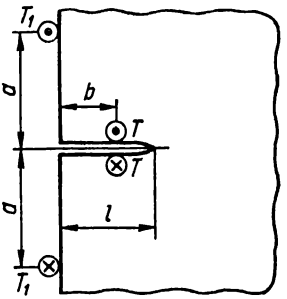


Рис. 5.44. Полупространство с произвольно ориентированной прямолинейной трещиной при действии на ее берегах постоянной сдвигающей нагрузки.

Рис. 5.45. Полупространство с выходящей на край под прямым углом прямолинейной трещиной при действии сдвигающих сосредоточенных сил.

В частности, когда берега трещины загружены сосредоточенными силами (рис. 5.45; $T_1 = 0$), то

$$K_{III} = (2T/\sqrt{\pi l})/\sqrt{1 - (b/l)^2}\,.$$

Если берега трещины свободны от нагрузки, а сосредоточенные силы действуют на краю полупространства (см. рис. 5.45; $T = 0$), КИН равен [5]

$$K_{III} = (2T_1/\sqrt{\pi l})/\sqrt{1 + (a/l)^2}\,.$$

Пусть прямолинейная трещина выходит на край полупространства под произвольным углом. Берега трещины и граница полупространства свободны от нагрузки, а на бесконечности действуют сдвигающие усилия (рис. 5.46; $T = 0$, $\tau_0 = 0$). КИН дается выражением [18, 19]

$$K_{III} = \tau\sqrt{\pi l}\,[m\,(1 - m)]^{1/2 - m}.$$

Если же в точках выхода трещины на край полупространства действуют сосредоточенные силы, а остальная граница тела свободна от нагрузки (см. рис. 5.46; $\tau_0 = \tau = 0$), то [20, 21]

$$K_{III} = (T/\sqrt{\pi l})/\sqrt{m\,(1 - m)}\,.$$

Когда на границе полупространства действуют постоянные сдвигающие напряжения τ_0 и $-\tau_0$ (см. рис. 5.46; $\tau = 0$, $T = 0$), КИН [46]

$$K_{III} = 2\tau_0\sqrt{l/\pi}\,(1/m - 1)^{m - 1/2}.$$

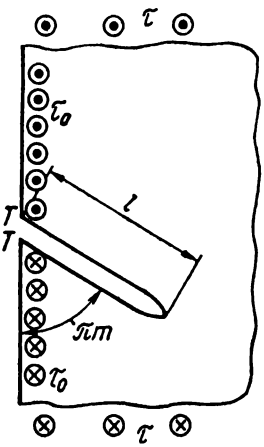
Пусть на нижней и верхней частях границы полупространства заданы смещения w_0 и $-w_0$, а на берегах трещины и на бесконечности напряжения отсутствуют (рис. 5.47). Тогда [46]

$$K_{III} = 2Gw_0/\sqrt{\pi l},$$

т. е. КИН не зависит от угла ориентации трещины.

Данные по КИН имеются также в работах [1, 5, 47].

Две симметричные наклонные краевые трещины. Пусть из одной точки на границе полупространства исходят симметричные наклонные тре-



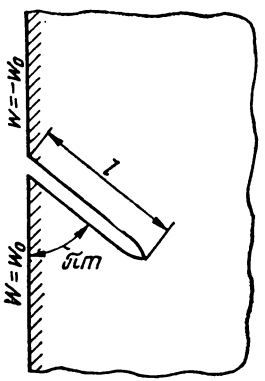


Рис. 5.46. Продольный сдвиг полупространства с краевой прямолинейной трещиной произвольной ориентации.

Рис. 5.47. Полупространство с краевой произвольно ориентированной трещиной при заданном продольном смещении на его границе.

щины. Край полупространства и берега трещин свободны от нагрузки (рис. 5.48; $T_1 = T_2 = 0$). КИН равен [19]

$$K_{III} = \tau\sqrt{\pi l}\,2^{-m}\,[m/(1-2m)]^{1/2-m}.$$

Если же в точке выхода трещин на край полупространства действуют сосредоточенные силы, а остальная граница тела свободна от нагрузки (см. рис. 5.48; $\tau = 0$), то [30]

$$K_{III} = (1/\sqrt{2\pi l})\,[2T_1\sqrt{(1-2m)/2m} + T_2\sqrt{2m/(1-2m)}].$$

Полубесконечная трещина. Пусть в теле имеется прямолинейная полубесконечная трещина, расположенная перпендикулярно краю полупространства. Граница полупространства свободна от напряжений. Тогда решение задачи такое же, как в случае бесконечного пространства с внешней прямолинейной трещиной при действии симметричной нагрузки (см. п. 5.4). В частности, когда берега трещины загружены сосредоточенными силами (рис. 5.49; $T_\infty = 0$), то

$$K_{III} = (2T/\sqrt{\pi a})/\sqrt{1-(a/b)^2},$$

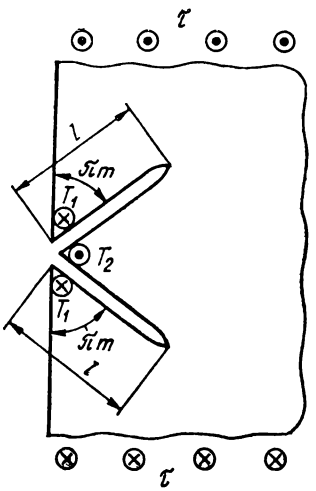


Рис. 5.48. Продольный сдвиг полупространства с двумя симметричными наклонными краевыми трещинами.

Если берега трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности действуют усилия с главным вектором T_∞ (см. рис. 5.49; $T = 0$), КИН равен

$$K_{III} = 2T_\infty/\sqrt{\pi a}\,.$$

Краевая и полубесконечная коллинеарные трещины. Пусть в полупространстве имеются краевая и полубесконечная трещины, расположенные на перпендикулярной краю прямой. Когда на бесконечности действуют усилия с главным вектором T_∞, а берега трещин и край полупространства свободны от нагрузки (рис. 5.50; $T = 0$), то [5]

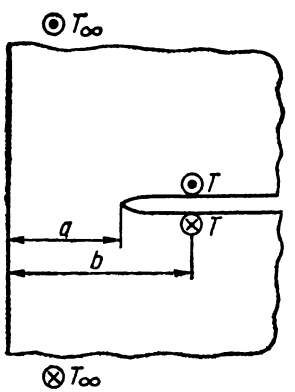
$$K_{III}(A) = (2T/\sqrt{\pi a})/\sqrt{(b/a)^2 - 1}\,,$$

$$K_{III}(B) = (2T/\sqrt{\pi b})/\sqrt{1 - (a/b)^2}\,.$$

Если же в точках выхода трещины на край полупространства действуют сосредоточенные силы, а остальная граница свободна от нагрузки (см. рис. 5.50; $T_\infty = 0$), КИН равны [21]

$$K_{III}(A) = (2T/\sqrt{\pi a})/\sqrt{1 - (a/b)^2}\,,$$

$$K_{III}(B) = (2T/\sqrt{3\pi b})/\sqrt{(b/a)^2 - 1}\,.$$



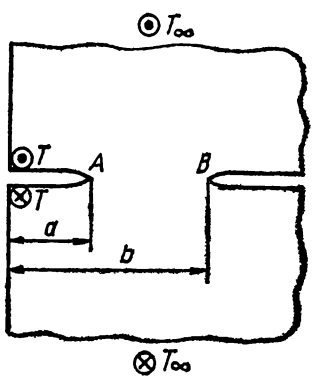


Рис. 5.49. Продольный сдвиг полупространства с прямолинейной полубесконечной трещиной.

Рис. 5.50. Продольный сдвиг полупространства с краевой и полубесконечной коллинеарными трещинами.

5.9. Бесконечный слой с трещинами

Внутренние прямолинейные трещины. Пусть в слое имеется прямолинейная трещина, центр которой находится на средней линии. На берегах трещины задана постоянная нагрузка, а грани свободны от напряжений (рис. 5.51, *а*). Асимптотическое решение задачи при малой относительной длине трещины $\lambda = l/h$ имеет вид [48]

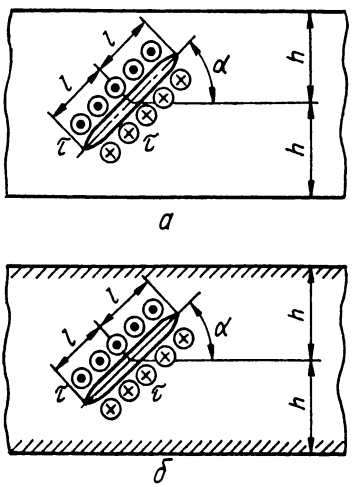
$$K_{III} = \tau \sqrt{\pi l}\,\{1 + \pi^2\lambda^2\,[1 - (1/3)\cos 2\alpha]/32 + \pi^4\lambda^4 2^{-10}\,[1 -$$

$$- (13/6)\cos 2\alpha + (1/9)\cos^2 2\alpha + (1/10)\cos 4\alpha]\} + O(\lambda^6).$$

В случае поперечной трещины ($\alpha = \pi/2$) можно записать замкнутое решение задачи

$$K_{III} = \tau \sqrt{2h \operatorname{tg}(\pi l/2h)}\,.$$

Этот результат следует из решения (5.16) для периодической системы коллинеарных трещин в бесконечном теле, находящихся под действием постоянных сдвигающих усилий. Аналогичный вывод справедлив и для других симметричных нагрузок. В частности, когда в слое с



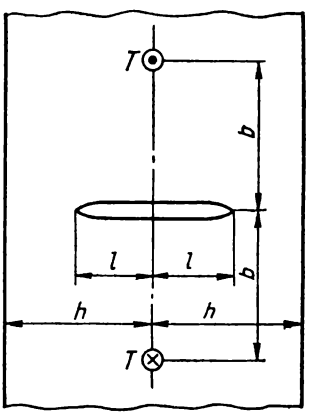


Рис. 5.51. Продольный сдвиг слоя с центральной произвольно ориентированной трещиной при свободных от нагрузки (*а*) или защемленных (*б*) гранях.

Рис. 5.52. Продольный сдвиг сосредоточенными силами слоя с центральной поперечной трещиной.

поперечной трещиной действуют на некотором расстоянии от трещины сосредоточенные силы (рис. 5.52), то КИН дается выражением [5]

$$K_{III} = (T/\sqrt{2h})\sqrt{\operatorname{tg}(\pi l/2h)}/\sqrt{1 - [\cos(\pi l/2h)/\operatorname{ch}(\pi b/2h)]^2}\,, \qquad (5.20)$$

которое определяет также решение задачи для периодической системы коллинеарных трещин. При $b = 0$ формула (5.20) соответствует результату (5.17).

Пусть произвольно ориентированная трещина, находящаяся под действием постоянной нагрузки, расположена в слое с жестко защемлен-

ными гранями (рис. 5.51, *б*). Тогда [48]

$$K_{III} = \tau \sqrt{\pi l}\,\{1 - \pi^2\lambda^2\,[1 + (1/3)\cos 2\alpha]/32 + \pi^4\lambda^4 2^{-10}\,[1 +$$

$$+ (13/6)\cos 2\alpha + (1/9)\cos^2 2\alpha + (1/10)\cos 4\alpha]\} + O(\lambda^6), \quad \lambda = l/h.$$

В случае продольной трещины ($\alpha = 0$) можно записать замкнутое решение задачи

$$K_{III} = \tau \sqrt{2h \operatorname{th}(\pi l/2h)}\,, \tag{5.21}$$

следующее из результата (5.18) для периодической системы параллельных трещин в бесконечном теле. Формула (5.21) при $\tau = G\omega_0/h$ определяет также решение задачи, когда берега трещины свободны от нагрузки, а на гранях слоя заданы постоянные смещения $w^{\pm} = \pm w_0$ [49]. Рассмат-

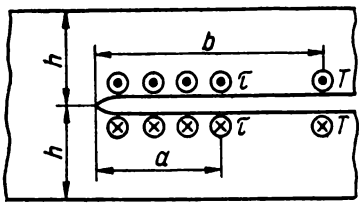


Рис. 5.53. Продольный сдвиг слоя с полубесконечной трещиной при свободных от нагрузки гранях.

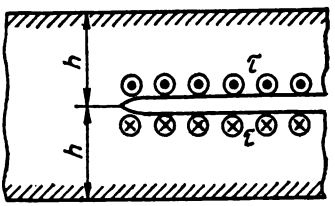


Рис. 5.54. Продольный сдвиг слоя с полубесконечной трещиной при жестко защемленных гранях.

ривался также случай двух продольных трещин [49] и одной эксцентрично расположенной поперечной трещины [50] в слое.

Полубесконечная трещина. Пусть на средней линии слоя расположена полубесконечная трещина. На берегах трещины действуют сосредоточенные силы, а грани свободны от нагрузки (рис. 5.53; $\tau = 0$). Тогда [7, 20, 51]

$$K_{III} = T\sqrt{2/h}\,[1 - \exp(-\pi b/h)]^{-1/2}.$$

Если на участке, примыкающем к вершине трещины, действует постоянная нагрузка (рис. 5.53; $T = 0$), КИН равен [7, 52]

$$K_{III} = (\tau/\pi)\sqrt{2h}\,\ln\{[1 + \sqrt{1 - \exp(-\pi a/h)}]/[1 -$$

$$- \sqrt{1 - \exp(-\pi a/h)}]\}.$$

В случае, когда грани слоя жестко защемлены, а на трещине действует постоянная нагрузка (рис. 5.54), КИН дается формулой

$$K_{III} = \tau\sqrt{2h}\,, \tag{5.22}$$

которая совпадает с решением (5.19) для периодической системы параллельных полубесконечных трещин. При $\tau = G\omega_0/h$ формула (5.22) дает решение задачи, когда берега трещины свободны от нагрузки, а на гранях заданы постоянные смещения $w^{\pm} = \pm w_0$ [5, 7, 41, 52, 53].

Изучался также случай двух параллельных полубесконечных трещин [54].

Краевая трещина. Пусть на граничную поверхность слоя выходит под прямым углом прямолинейная трещина. Берега трещины и грани свободны от нагрузки, а на бесконечности действуют сдвигающие усилия (рис. 5.55; $T = 0$). КИН определяется формулой

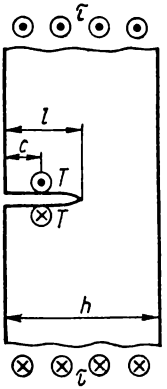
$$K_{III} = \tau \sqrt{2h \operatorname{tg}(\pi l/2h)},$$

которая следует из решения (5.16) для периодической системы коллинеарных трещин в бесконечном теле.

Если на берегах трещины действуют сосредоточенные силы, а остальная граница тела свободна от нагрузки (рис. 5.55; $\tau = 0$), то [20]

$$K_{III} = T\sqrt{2/h}\cos(\pi c/2h) \times$$
$$\times \sqrt{\operatorname{tg}(\pi a/2h)}/\sqrt{\cos^2(\pi c/2h) - \cos^2(\pi a/2h)}.$$

Две коллинеарные краевые трещины. Пусть в слое имеется две краевые трещины различной длины. На берегах левой трещины действуют



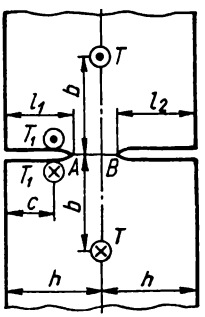


Рис. 5.55. Продольный сдвиг слоя с краевой трещиной.

Рис. 5.56. Продольный сдвиг слоя с двумя коллинеарными краевыми трещинами.

сосредоточенные силы, а остальная граница тела свободна от нагрузки (рис. 5.56; $T = 0$). Тогда [21]

$$K_{III}(A) = (T_1/\sqrt{2h})\{2\sin(\pi l_1/2h)[\cos(\pi c/2h) +$$
$$+ \cos(\pi l_1/2h)]/\{[\cos(\pi c/2h) - \cos(\pi l_1/2h)][\cos(\pi l_1/2h) +$$
$$+ \cos(\pi l_2/2h)]\}\}^{1/2},$$
$$K_{III}(B) = (T_1/\sqrt{2h})\{2\sin(\pi l_2/2h)[\cos(\pi c/2h) -$$
$$- \cos(\pi l_1/2h)]/\{3[\cos(\pi l_1/2h) + \cos(\pi l_2/2h)][\cos(\pi c/2h) +$$
$$+ \cos(\pi l_2/2h)]\}\}^{1/2}.$$

Если берега трещин, имеющих равную длину, и грани слоя свободны от нагрузки, а на средней линии действуют сосредоточенные силы (см.

рис. 5.56; $T_1 = 0$; $l_1 = l_2 = l$), КИН равен [5]

$$K_{III} = (T/\sqrt{2h})\sqrt{\operatorname{tg}(\pi l/2h)}/\sqrt{1 + \cos^2(\pi l/2h)/\operatorname{sh}^2(\pi b/2h)}\,.$$

Полубесконечный слой с трещинами. Пусть на торцевую поверхность полубесконечного слоя выходит прямолинейная трещина. Берега трещины и боковые грани слоя свободны от нагрузки, а на верхней и нижней частях торцевой грани действуют противоположно направленные сдвигающие усилия (рис. 5.57). КИН равен [55]

$$K_{III} = (2/\pi)\,\tau\sqrt{2h\,\operatorname{th}(\pi l/2h)}\,K\,(\operatorname{sch}(\pi l/2h)),$$

где $K(a)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

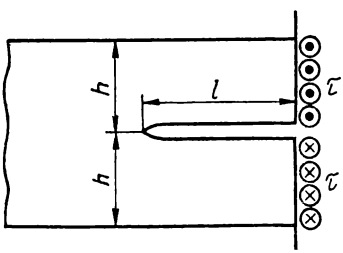


Рис. 5.57. Продольный сдвиг полубесконечного слоя с краевой трещиной.

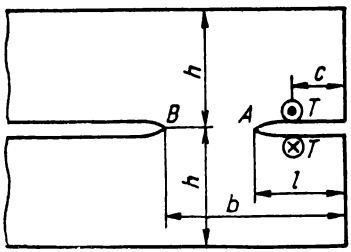


Рис. 5.58. Продольный сдвиг полубесконечного слоя с краевой и полубесконечной трещинами.

Когда кроме краевой трещины, берега которой загружены сосредоточенными силами, в слое имеется еще коллинеарная полубесконечная трещина (рис. 5.58), то [21]

$$K_{III}(A) = (2T/\sqrt{2h})\{\operatorname{sh}(\pi l/h)\,[\operatorname{ch}(\pi b/h) -$$

$$-\operatorname{ch}(\pi c/h)]/\{[\operatorname{ch}(\pi l/h) - \operatorname{ch}(\pi c/h)]\,[\operatorname{ch}(\pi b/h) - \operatorname{ch}(\pi l/h)]\}\}^{1/2},$$

$$K_{III}(B) = (2T/\sqrt{6h})\,\{\operatorname{sh}(\pi b/h)\,[\operatorname{ch}(\pi l/h) -$$

$$-\operatorname{ch}(\pi c/h)]/\{[\operatorname{ch}(\pi b/h) - \operatorname{ch}(\pi l/h)]\,[\operatorname{ch}(\pi b/h) - \operatorname{ch}(\pi c/h)]\}\}^{1/2}.$$

Этот результат является также решением задачи для бесконечного слоя, ослабленного конечной и двумя полубесконечными трещинами, при симметричном нагружении средней трещины сосредоточенными силами.

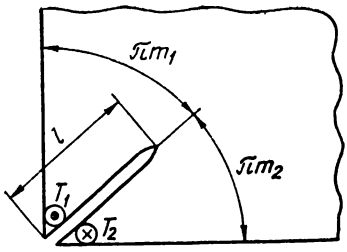
5.10. Бесконечный клин с трещинами

Краевая трещина. Пусть из вершины клина исходит прямолинейная трещина. Берега трещины в вершине клина сдвигаются сосредоточенными силами, а остальная граница тела свободна от нагрузки (рис. 5.59). КИН определяется выражением [21]

$$K_{III} = (T_1 m_1 + T_2 m_2)/\sqrt{\pi l m_1 m_2 (m_1 + m_2)}\,.$$

Отсюда при $T_1 = T_2 = T$ и $m_1 = m_2 = m$ следует решение для трещины, ориентированной вдоль биссектрисы клина [7, 20]

$$K_{III} = \sqrt{2}\,T/\sqrt{\pi l m}\,.$$



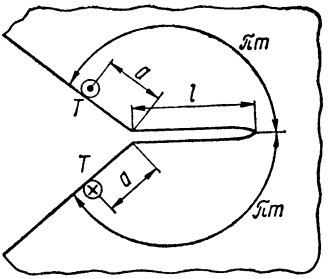


Рис. 5.59. Продольный сдвиг клина с краевой трещиной при свободных от нагрузки гранях.

Рис. 5.60. Продольный сдвиг клина с краевой симметричной трещиной при действии сосредоточенных сил на его гранях.

Рис. 5.61. Продольный сдвиг клина с краевой трещиной при заданных смещениях на его гранях.

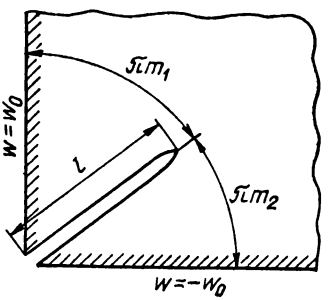
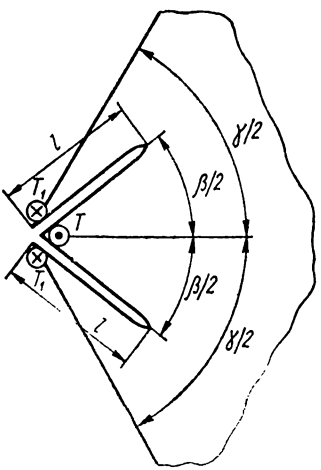
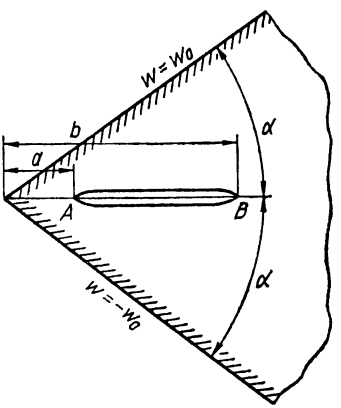


Рис. 5.62. Продольный сдвиг клина с двумя симметричными краевыми трещинами.

Рис. 5.63. Продольный сдвиг клина с внутренней радиальной трещиной при заданных смещениях на его гранях.





В случае симметричной краевой трещины при действии на гранях клина сосредоточенных сил (рис. 5.60) решение имеет вид [56]

$$K_{III} = (T/\sqrt{\pi m})\sqrt{2l^{1/m-1}}/\sqrt{l^{1/m} + a^{1/m}}.$$

Когда берега трещины свободны от нагрузки, а на гранях клина заданы постоянные смещения противоположных знаков (рис. 5.61), то [57]

$$K_{III} = 2Gw_0/\sqrt{\pi l\,(m_1 + m_2)}. \qquad (5.23)$$

Две симметричные краевые трещины. Пусть из вершины клина симметрично исходят две прямолинейные трещины. Берега трещин в вершине клина сдвигаются сосредоточенными силами (рис. 5.62). КИН определяется по формуле [30]

$$K_{III} = (1/\sqrt{2l\gamma})[T\sqrt{(\gamma - \beta)/\beta} + 2T_1\sqrt{\beta\,(\gamma - \beta)}].$$

Внутренняя радиальная трещина. Пусть на биссектрисе клина расположена внутренняя трещина. Берега трещины свободны от нагрузки, а на гранях клина заданы постоянные смещения противоположных знаков (рис. 5.63). КИН равны [49]

$$K_{III}(A) = Gw_0\sqrt{2}\,[b^{\pi/(2\alpha)} - a^{\pi/(2\alpha)}]/\sqrt{\alpha a\,(b^{\pi/\alpha} - a^{\pi/\alpha})},$$

$$K_{III}(B) = Gw_0\sqrt{2}\,[b^{\pi/(2\alpha)} - a^{\pi/(2\alpha)}]/\sqrt{\alpha b\,(b^{\pi/\alpha} - a^{\pi/\alpha})}.$$

Последний результат для $K_{III}(B)$ при $a = 0$ и $b = l$ согласуется с решением (5.23), когда $\pi m_1 = \pi m_2 = \alpha$.

5.11. Бесконечное тело с полостями и краевыми трещинами

Остроугольные отверстия с точками возврата на контуре. Пусть в теле имеется остроугольное отверстие, контур которого содержит одну точку возврата. На бесконечности заданы сдвигающие напряжения, а контур отверстия свободен от нагрузки (рис. 5.64). Когда параметрическое уравнение контура отверстия имеет вид

$$z = x(\theta) + iy(\theta) = a(1 - \delta^2)[\sigma_0/(1 - \delta) + (1 - \delta)/\sigma_0 - \delta)]/2,$$

$$\sigma_0 = \exp(i\theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \delta < 1),$$

то КИН определяется по формуле [58]

$$K_{III} = \tau\sqrt{\pi a\,(1 - \delta^2)}.$$

В случае продольного сдвига бесконечного тела, ослабленного остроугольным отверстием с двумя точками возврата на контуре (рис. 5.65), форма которого определяется уравнением

$$z = (a/2)[(1 + \lambda)\sigma_0/2 + (1 - \lambda)/(2\sigma_0) + 2\sigma_0(1 + \lambda)^{-1}(\sigma_0^2 - k)^{-1}],$$

$$\sigma_0 = \exp(i\theta) \quad (k = (\lambda - 1)/(\lambda + 1), \quad \lambda \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

КИН равен [58]

$$K_{III} = \tau\sqrt{\pi a}/(1 + k).$$

Когда тело ослаблено гипоциклоидальным отверстием в форме астроиды (рис. 5.66) (параметрическое уравнение контура: $x = a\cos^3\theta$,

$y = a\sin^3\theta$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$), КИН даются выражениями [7]

$$K_{III}(A) = (\tau\sqrt{3\pi a}/2)\sin\gamma,$$

$$K_{III}(B) = (\tau\sqrt{3\pi a}/2)\cos\gamma \quad (0 \leqslant \gamma \leqslant \pi/2).$$

Криволинейное отверстие с одной краевой трещиной. Пусть тело содержит эллиптическую полость и симметрично расположенную краевую трещину. Берега трещины и контур отверстия свободны от нагрузки,

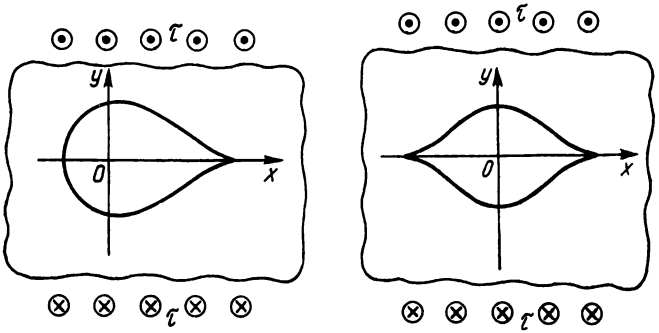


Рис. 5.64. Продольный сдвиг тела, ослабленного остроугольным отверстием с одной точкой возврата на контуре.

Рис. 5.65. Продольный сдвиг тела, ослабленного остроугольным отверстием с двумя точками возврата на контуре.

а на бесконечности заданы сдвигающие усилия (рис. 5.67). КИН дается выражением [59]

$$K_{III} = \tau\sqrt{(\pi/4)(a+b)(\xi+1)^2(\xi - 1/\xi)/[\xi^2 - (a-b)/(a+b)]}, \qquad (5.24)$$

где

$$\xi = [a + l + \sqrt{(a+l)^2 - (a^2 - b^2)}]/(a+b).$$

Данные по КИН для рассматриваемого случая эллиптического отверстия имеются также в работах [28, 60].

При $a = b$ из формулы (5.24) следует решение для случая кругового отверстия с радиальной трещиной [59, 61, 62]

$$K_{III} = \tau\sqrt{\pi l/2}\,(2 + l/a)^{3/2}(1 + l/a)^{-3/2}.$$

Рассматривался также продольный сдвиг тела с квадратным отверстием и краевой трещиной [25].

Криволинейное отверстие с системой краевых трещин. Пусть на контур эллиптического отверстия выходят две симметричные коллинеарные трещины. Контур отверстия и берега трещин свободны от нагрузки

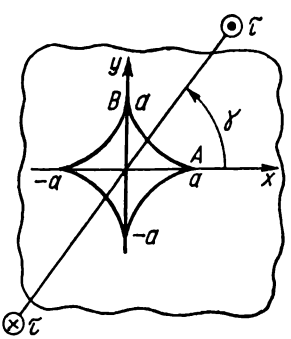


Рис. 5.66. Продольный сдвиг тела с отверстием в форме астроиды.

(рис. 5.68). КИН определяется по формуле [63]

$$K_{III} = \tau \sqrt{(\pi/2)(a+b)(\xi^3 - 1/\xi)/[\xi^2 - (a-b)/(a+b)]}, \quad (5.25)$$

где

$$\xi = [a + l + \sqrt{(a+l)^2 - (a^2 - b^2)}]/(a+b).$$

Данные по КИН для эллиптического отверстия с двумя краевыми трещинами имеются также в работах [60, 64].

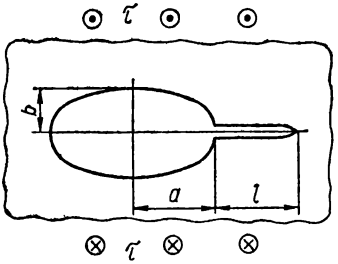


Рис. 5.67. Продольный сдвиг тела с эллиптической полостью и краевой трещиной.

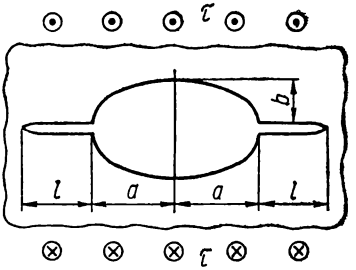


Рис. 5.68. Продольный сдвиг тела с эллиптической полостью и двумя краевыми трещинами.

При $a = b$ из формулы (5.25) следует решение для случая кругового отверстия с двумя радиальными коллинеарными трещинами [13, 39]

$$K_{III} = \tau \sqrt{\pi}\,(a+l)^{-3/2}[(a+l)^4 - a^4]^{1/2}.$$

Данные по КИН для кругового отверстия с двумя краевыми радиальными трещинами имеются в работах [2, 5, 7, 65—67]. Изучался также случай квадратного отверстия и двух коллинеарных трещин [25].

5.12. Бесконечное тело с полостями и внутренними трещинами

Криволинейное отверстие и прямолинейные трещины. Пусть в теле имеется эллиптическое отверстие и одна прямолинейная трещина. Берега трещины и контур отверстия свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы сдвигающие напряжения (рис. 5.69). КИН находятся по формулам

$$\left.\begin{aligned}
&K_{III}(A) = \tau \sqrt{\pi (a+b)\,\xi_1^2/\{[\xi_1^2 - (a-b)/(a+b)] \times} \cdots \to \\
&\to \cdots \overline{\times (\xi_2 - \xi_1)(\xi_1 - 1/\xi_1)(\xi_1 - 1/\xi_2)\}} \times \\
&\times \{-(1/2)(\xi_1 - 1/\xi_1)(\xi_1 - 1/\xi_1 + \xi_2 - 1/\xi_2) + \\
&+ [\xi_1\xi_2 + 1/(\xi_1\xi_2) - 2]\,E(k)/K(k)\}, \\
&K_{III}(B) = \tau \sqrt{\pi (a+b)\,\xi_2^2/\{[\xi_2^2 - (a-b)/(a+b)] \times} \cdots \to \\
&\to \cdots \overline{\times (\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - 1/\xi_1)(\xi_2 - 1/\xi_2)\}} \times \\
&\times \{(1/2)(\xi_2 - 1/\xi_2)(\xi_1 - 1/\xi_1 + \xi_2 - 1/\xi_2) - \\
&- [\xi_1\xi_2 + 1/(\xi_1\xi_2) - 2]\,E(k)/K(k)\},
\end{aligned}\right\} \quad (5.26)$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно,

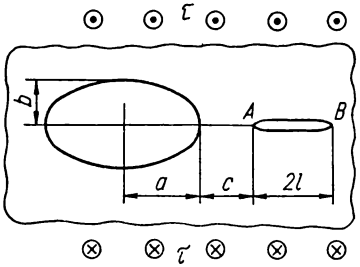
$$k = (\xi_2 - \xi_1)/(\xi_1\xi_2 - 1),$$

$$\xi_1 = [a + c + \sqrt{(a + c)^2 - (a^2 - b^2)}]/(a + b),$$

$$\xi_2 = [a + c + 2l + \sqrt{(a + c + 2l)^2 - (a^2 - b^2)}]/(a + b).$$

Первая из формул (5.26) получена в работе [59]. Выражение для $K_{III}(B)$ найдено при использовании результатов этой же работы.

Данные по КИН при взаимодействии эллиптического отверстия и прямолинейной трещины имеются также в работах [60, 64, 68].



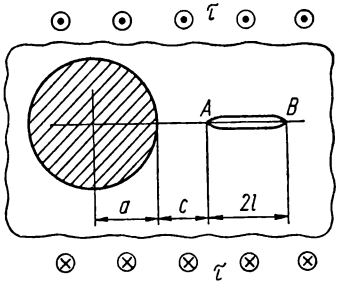


Рис. 5.69. Продольный сдвиг тела с эллиптической полостью и прямолинейной трещиной.

Рис. 5.70. Продольный сдвиг тела с круговым жестким включением и радиальной трещиной.

При $a = b$ из формул (5.26) следует решение для кругового отверстия и радиальной трещины. Последний случай рассматривался также в работах [68, 69]. Кроме того, в работе [68] изучалась аналогичная задача для ортотропной среды. Исследовалось взаимодействие эллиптического [70] и кругового [69] отверстий с двумя коллинеарными трещинами, а также квадратного отверстия и произвольно ориентированной трещины [71].

Когда контур кругового отверстия жестко защемлен (жесткое включение), а берега трещины свободны от нагрузки и на бесконечности заданы сдвигающие усилия (рис. 5.70), КИН равны

$$\left.\begin{aligned} &K_{III}(A) = \\ &= \tau\sqrt{\pi l}\sqrt{[a^2/(a + c) - (a + c + l)]^2 - l^2}/\sqrt{(a + c + l)^2 - l^2}, \\ &K_{III}(B) = \\ &= \tau\sqrt{\pi l}\sqrt{[a^2/(a + c + 2l) - (a + c + l)]^2 - l^2}/\sqrt{(a + c + l)^2 - l^2}. \end{aligned}\right\} \quad (5.27)$$

Первая из этих формул получена в работе [72]. Выражение для $K_{III}(B)$ найдено при использовании результатов этой же работы.

В случае, когда трещина выходит на границу жесткого включения ($c = 0$), из формул (5.27) имеем

$$K_{III}(A) = 0, \quad K_{III}(B) = 2\tau l\sqrt{2\pi l\,(a + l)}/\sqrt{(a + 2l)^3}.$$

Пусть напряженное состояние тела с полубесконечной трещиной, находящегося при продольном сдвиге, характеризуется КИН K^0_{III}. При появлении кругового отверстия, контур которого свободен от нагрузки (рис. 5.71), КИН в вершине полубесконечной трещины изменится и будет равным [73]

$$K_{III} = K^0_{III}\sqrt{1-\lambda^2}\,[(1-\lambda)/(1+\lambda)]\,E(k)/K(k), \quad \lambda = a/b,$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем $k = \sqrt{1-(1-\lambda)^2/(1+\lambda)^2}$.

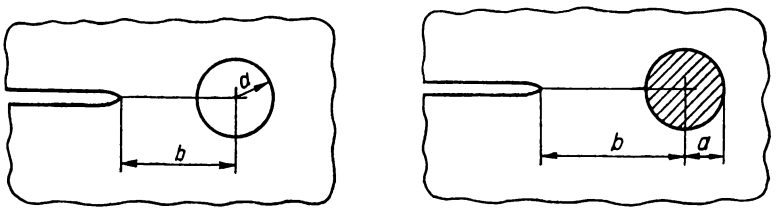


Рис. 5.71. Схема взаимодействия кругового отверстия и полубесконечной трещины при продольном сдвиге.

Рис. 5.72. Схема взаимодействия кругового жесткого включения и полубесконечной трещины при продольном сдвиге.

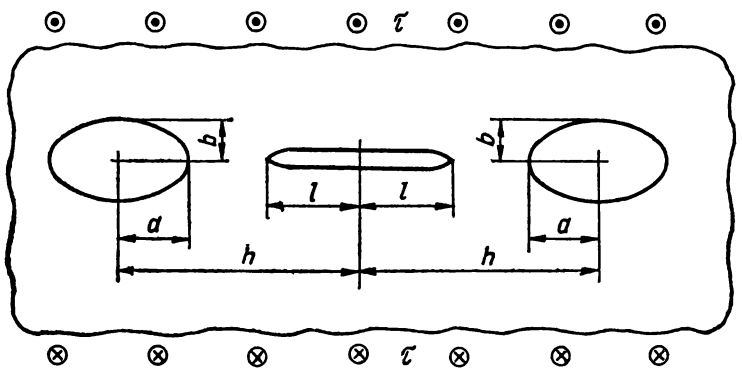


Рис. 5.73. Продольный сдвиг тела с двумя эллиптическими отверстиями и трещиной.

Если же на продолжении полубесконечной трещины появится жесткое круговое включение (рис. 5.72), то КИН примет значение [73]

$$K_{III} = K^0_{III}\sqrt{1-\lambda^2}, \quad \lambda = a/b.$$

Система отверстий и трещин. Пусть бесконечное тело ослаблено двумя одинаковыми эллиптическими отверстиями и центральной прямолинейной трещиной между ними. Контуры отверстий и берега трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности действуют сдвигающие усилия

(рис. 5.73). Задача решена методом СИУ в работе [68]. Ниже приведены значения КИН при $h/a = 1{,}25$ и $l/(h-a) = 0{,}5$:

b/a	10	5	2	1	0,5	0,2	0,1	0,01
$K_{III}/(\tau\sqrt{\pi l})$	2,010	2,313	2,703	3,141	3,315	3,179	3,031	2,845

В случае круговых отверстий ($b = a$) численные результаты для КИН даны в табл. 5.1.

Таблица 5.1. Значения КИН $K_{III}/(\tau\sqrt{\pi l})$ при продольном сдвиге тела с двумя круговыми отверстиями и прямолинейной трещиной [68]

$\frac{l}{h-a}$	h/a				$\frac{l}{h-a}$	h/a			
	2	1,5	1,25	1,1		2	1,5	1,25	1,1
0,001	1,544	2,081	2,886	4,509	0,5	1,664	2,258	3,147	4,961
0,1	1,548	2,087	2,984	4,523	0,8	2,045	2,823	4,006	6,455
0,3	1,582	2,137	2,967	4,649	0,9	2,486	3,489	5,032	8,169

Имеются также данные по КИН при взаимодействии прямолинейной трещины с двумя эллиптическими отверстиями в изотропном [7, 37, 70, 74] или ортотропном [6] теле. Продольный сдвиг тела с двумя круговыми жесткими включениями и прямолинейной трещиной между ними изучался в работе [72].

5.13. Бесконечный цилиндр с трещинами

Параболический цилиндр с трещиной. Пусть в параболическом цилиндре имеется симметричная краевая трещина, берега которой нагружены сосредоточенными силами, а остальная граница тела свободна от напряжений (рис. 5.74). Форма граничного контура цилиндра определяется уравнением $y^2 = 4a(a - x)$. КИН равен [7, 20]

$$K_{III} = T/\sqrt{2a/\pi}.$$

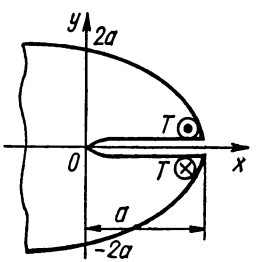


Рис. 5.74. Продольный сдвиг параболического цилиндра с краевой трещиной.

Круговой цилиндр с центральной трещиной. Пусть круговой цилиндр ослаблен центральной трещиной, на берегах которой действуют сосредоточенные силы. Внешняя граница цилиндра свободна от нагрузки (рис. 5.75). КИН определяется по формуле [21]

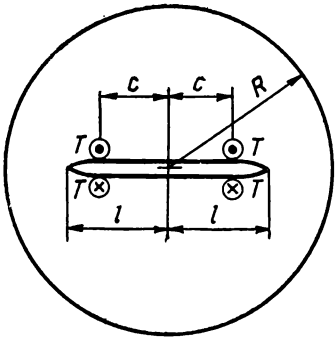
$$K_{III} = (2T/\sqrt{\pi l})\sqrt{(1 + l^2/R^2)/(1 - l^2/R^2)}\,(1 -$$

$$- c^2/R^2)/\sqrt{[1 - (cl/R^2)^2]\,[1 - (c/l)^2]}.$$

Если же на берегах трещины задана постоянная нагрузка, а на внешней границе смещения равны нулю (рис. 5.76), то [75]

$$K_{III} = \tau\sqrt{l/\pi}\,\sqrt{1/m^4 - 1}\,[K(2m/(1 + m^2)) - E(2m/(1 + m^2))], \quad m = l/R,$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.



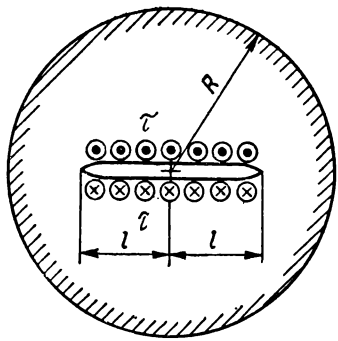
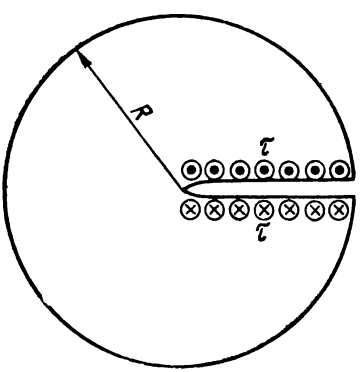


Рис. 5.75. Продольный сдвиг сосредоточенными силами кругового цилиндра с центральной трещиной.

Рис. 5.76. Действие постоянных сдвигающих усилий на берегах центральной трещины в круговом цилиндре с жестко защемленным граничным контуром.

Таблица 5.2. **Значения КИН $K_{III}/[2\,(Q/R)\sqrt{2R/\pi}]$ для краевой радиальной трещины в круговом цилиндре при действии на его границе сдвигающих сосредоточенных сил [76]**

$\frac{2\beta}{\pi}$	l/R								
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
1	0,0146	0,0246	0,0368	0,0535	0,0785	0,1197	0,1971	0,3754	0,9637
2	0,0293	0,0495	0,0739	0,1072	0,1564	0,2359	0,3782	0,6690	1,3645
3	0,0444	0,0749	0,1117	0,1613	0,2334	0,3458	0,5332	0,8658	1,5126
4	0,0601	0,1012	0,1505	0,2161	0,3090	0,4471	0,6592	0,9907	1,5770
5	0,0766	0,1287	0,1907	0,2717	0,3827	0,5386	0,7583	1,0702	1,6098
6	0,0942	0,1579	0,2328	0,3283	0,4540	0,6198	0,8350	1,1222	1,6284
7	0,1132	0,1893	0,2771	0,3860	0,5225	0,6907	0,8941	1,1574	1,6399
8	0,1341	0,2234	0,3244	0,4449	0,5878	0,7520	0,9398	1,1820	1,6475
9	0,1574	0,2610	0,3750	0,5050	0,6494	0,8045	0,9752	1,1997	1,6527
10	0,1841	0,3032	0,4298	0,5661	0,7071	0,8492	1,0029	1,2127	1,6565
11	0,2150	0,3511	0,4893	0,6280	0,7604	0,8869	1,0246	1,2224	1,6592
12	0,2520	0,4067	0,5543	0,6900	0,8090	0,9185	1,0418	1,2299	1,6613
13	0,2973	0,4722	0,6253	0,7514	0,8526	0,9448	1,0553	1,2356	1,6628
14	0,3551	0,5506	0,7023	0,8109	0,8910	0,9664	1,0660	1,2400	1,6640
15	0,4318	0,6460	0,7845	0,8669	0,9239	0,9838	1,0743	1,2433	1,6650
16	0,5392	0,7622	0,8695	0,9175	0,9511	0,9975	1,0807	1,2459	1,6656
17	0,7000	0,9016	0,9519	0,9602	0,9724	1,0078	1,0854	1,2477	1,6661
18	0,9571	1,0559	1,0234	0,9930	0,9877	1,0150	1,0886	1,2490	1,6664
19	1,3600	1,1924	1,0731	1,0136	0,9969	1,0192	1,0905	1,2498	1,6666
20	1,6641	1,2489	1,0917	1,0209	1,0000	1,0210	1,0917	1,2492	1,6655



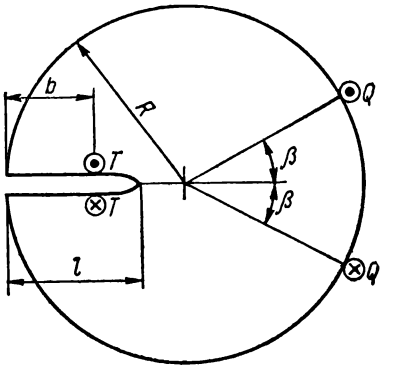


Рис. 5.77. Действие постоянной сдвигающей нагрузки на берегах радиальной трещины в круговом цилиндре.

Рис. 5.78. Продольный сдвиг сосредоточенными силами кругового цилиндра с краевой радиальной трещиной.

Круговой цилиндр с краевой радиальной трещиной. Пусть из центра кругового цилиндра исходит краевая радиальная трещина, на берегах которой действует постоянная нагрузка. Внешняя граница цилиндра свободна от нагрузки (рис. 5.77). КИН дается формулой [7]

$$K_{III} = (^8/_3)\,\tau\sqrt{2R/\pi}\,.$$

Пусть на берегах трещины и на границе цилиндра действуют сосредоточенные силы (рис. 5.78). При $l = R$ известно точное решение [20, 76]

$$K_{III} = T\,(\sqrt{2}/\sqrt{\pi b})\,(1 + b/R) +$$

$$+ 2Q\,(\sqrt{2}/\sqrt{\pi R})\,\sin(\beta/2).$$

При $T = 0$ и различных отношениях l/R в табл. 5.2 приведены значения КИН, полученные методом конформных отображений [76].

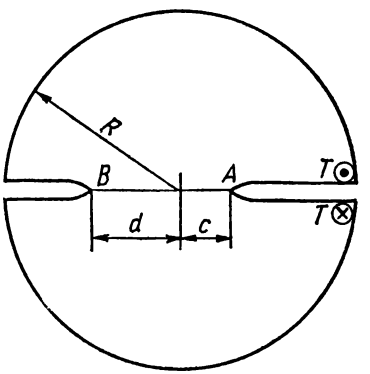


Рис. 5.79. Продольный сдвиг сосредоточенными силами кругового цилиндра с двумя коллинеарными краевыми трещинами.

Круговой цилиндр с двумя коллинеарными краевыми трещинами. Пусть в круговом цилиндре имеется две коллинеарные краевые трещины; на берегах одной из них действуют сдвигающие сосредоточенные силы, а внешняя граница свободна от нагрузки (рис. 5.79). КИН определяются выражениями [7, 20]

$$K_{III}(A) = T\,(\sqrt{2}/\sqrt{\pi R})\,\sqrt{(1 + c/R)\,(1 - c/R)}\,\times$$

$$\times\,(1 + d/R)/\sqrt{(c/R + d/R)\,(1 + cd/R^2)}\,,$$

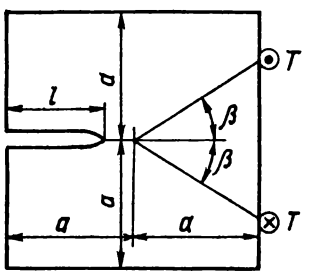
$$K_{III}(B) = T\,(\sqrt{2}/\sqrt{\pi R})\,\sqrt{(1 - d/R)\,(1 + d/R)}\,\times$$

$$\times\,(1 - c/R)\,\sqrt{(c/R + d/R)\,(1 + cd/R^2)}\,.$$

5.14. Прямоугольные балки с трещинами

Квадратная балка с краевой трещиной. Пусть в балке квадратного сечения в срединной плоскости имеется краевая трещина. На граничном контуре балки действуют сосредоточенные силы, а остальная часть контура и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 5.80). Значения КИН, полученные методом конформных отображений [76], приведены в табл. 5.3.

Пусть краевая трещина расположена в произвольной плоскости, параллельной загруженным постоянными сдвигающими усилиями граням балки. Две другие грани и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 5. 81). Значения КИН, полученные методом рядов Фурье [77], приведены в табл. 5.4.



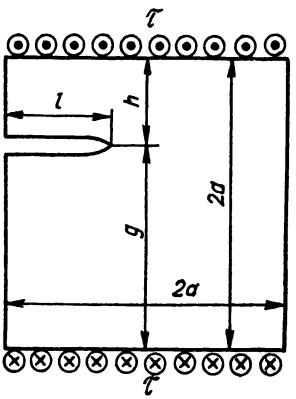
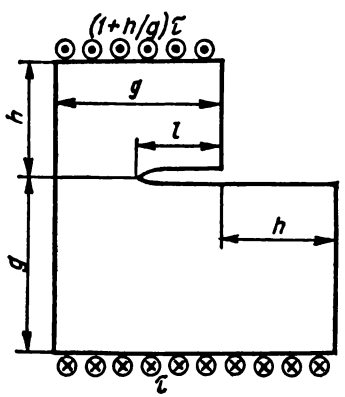


Рис. 5.80. Продольный сдвиг сосредоточенными силами квадратной балки с симметричной краевой трещиной.

Рис. 5.81. Продольный сдвиг квадратной балки с несимметричной краевой трещиной.



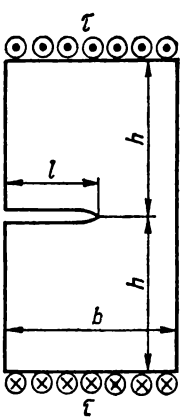


Рис. 5.82. Продольный сдвиг квадратной балки с квадратным вырезом и краевой трещиной.

Рис. 5.83. Продольный сдвиг прямоугольной балки с краевой трещиной.

Таблица 5.3. **Значения КИН $K_{III}/[2\,(T/a)\sqrt{2a/\pi}\,]$ для краевой симметричной трещины в квадратной балке при действии на ее границе сдвигающих сосредоточенных сил [76]**

$\frac{20\beta}{\pi}$	l/a								
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
1	0,0276	0,0431	0,0614	0,0864	0,1231	0,1807	0,2821	0,4971	1,1173
2	0,0524	0,0816	0,1161	0,1625	0,2288	0,3287	0,4907	0,7828	1,4118
3	0,0720	0,1119	0,1585	0,2205	0,3066	0,4305	0,6161	0,9143	1,4945
4	0,0844	0,1311	0,1852	0,2563	0,3531	0,4877	0,6795	0,9706	1,5232
5	0,0887	0,1376	0,1943	0,2683	0,3685	0,5060	0,6987	0,9864	1,5306
6	0,0930	0,1443	0,2035	0,2804	0,3837	0,5238	0,7169	1,0008	1,5372
7	0,1064	0,1647	0,2314	0,3168	0,4285	0,5744	0,7661	1,0375	1,5531
8	0,1297	0,2001	0,2792	0,3772	0,4995	0,6488	0,8315	1,0814	1,5705
9	0,1646	0,2523	0,3474	0,4592	0,5882	0,7320	0,8959	1,1198	1,5845
10	0,2126	0,3221	0,4341	0,5551	0,6808	0,8078	0,9472	1,1472	1,5939
11	0,2738	0,4074	0,5320	0,6518	0,7622	0,8659	0,9823	1,1645	1,5995
12	0,3451	0,5003	0,6279	0,7346	0,8231	0,9046	1,0039	1,1746	1,6028
13	0,4167	0,5860	0,7063	0,7941	0,8622	0,9275	1,0159	1,1801	1,6045
14	0,4719	0,6467	0,7561	0,8284	0,8831	0,9391	1,0219	1,1828	1,6053
15	0,4928	0,6685	0,7730	0,8394	0,8895	0,9427	1,0237	1,1836	1,6055
16	0,5153	0,6912	0,7899	0,8501	0,8957	0,9460	1,0254	1,1843	1,6058
17	0,5933	0,7641	0,8403	0,8805	0,9127	0,9550	1,0298	1,1863	1,6064
18	0,7696	0,8983	0,9191	0,9233	0,9352	0,9665	1,0355	1,1888	1,6071
19	1,1564	1,0829	1,0030	0,9633	0,9549	0,9763	1,0401	1,1908	1,6078
20	1,6080	1,1916	1,0420	0,9801	0,9628	0,9801	1,0420	1,1916	1,6080

Таблица 5.4. **Значения КИН $K_{III}/(\tau\sqrt{\pi l})$ при продольном сдвиге квадратной балки с несимметричной краевой трещиной [77]**

$\frac{g}{a}$	l/a								
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
0,50	1,044	1,080	1,137	1,201	1,271	1,354	1,467	1,663	2,181
0,75	1,034	1,050	1,088	1,138	1,200	1,280	1,398	1,611	2,157
1,00	1,032	1,044	1,077	1,123	1,182	1,261	1,382	1,600	2,152

Таблица 5.5. **Значения КИН $K_{III}/(\tau\sqrt{\pi l}\,)$ при продольном сдвиге квадратной балки с квадратным вырезом и краевой трещиной [77]**

$\frac{h}{g}$	l/g								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,2	1,507	1,443	1,480	1,545	1,624	1,718	1,845	2,063	2,656
0,5	2,082	1,831	1,763	1,765	1,811	1,906	2,075	2,404	3,249
1,0	3,008	2,568	2,417	2,377	2,413	2,526	2,751	3,199	4,353

Пусть поперечное сечение балки представляет собой квадрат, в одном из углов которого имеется квадратный вырез. Из угла этого выреза исходит трещина, параллельная загруженным граням балки (рис. 5.82). Значения КИН, полученные методом рядов Фурье [77], представлены в табл. 5.5.

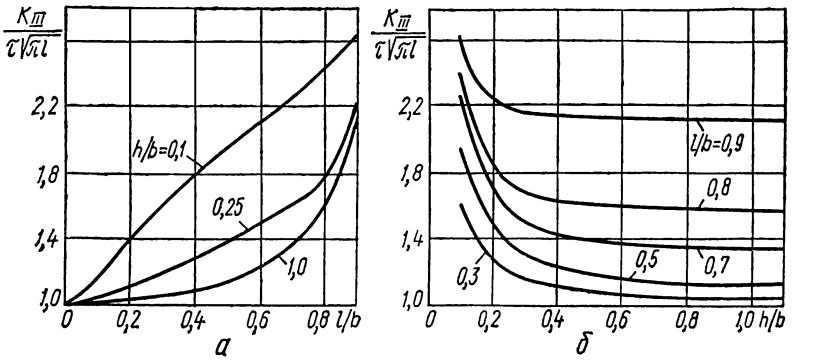


Рис. 5.84. Зависимость КИН $K_{III}/(\tau\sqrt{\pi l})$ от параметров l/b (*а*) и h/b (*б*) при продольном сдвиге прямоугольной балки с краевой трещиной [78].

Прямоугольная балка с краевой трещиной. Пусть в срединной плоскости прямоугольной балки имеется краевая трещина. Грани балки, параллельные трещине, загружены постоянными сдвигающими усилиями, а две другие грани и берега трещины свободны от нагрузки (рис. 5.83). Задача решена методом интегральных уравнений в работе [78]. Зависимости КИН от геометрических параметров показаны на рис. 5.84. Данные по КИН при продольном сдвиге прямоугольных ортотропных балок с трещинами имеются в работах [79, 80].

5.15. Кручение стержней с трещинами

Стержни кругового сечения. Пусть в круглом стержне, скручиваемом заданным моментом M, имеется краевая радиальная трещина (рис. 5.85). КИН выражается в виде [81]

$$K_{III} = \sqrt{2\pi}\, MR^{-5/2}\varepsilon^{1/2}(2-\varepsilon)^{3/2}[(4-4\varepsilon+3\varepsilon^2)\times$$
$$\times(1-\varepsilon)^{-1/2}\operatorname{arctg}\sqrt{1-\varepsilon}-3\varepsilon](1-\varepsilon)^{-2}/[2\pi^2-$$
$$-2\varepsilon^2A^2-(1-\varepsilon)(A+B)^2], \qquad (5.28)$$

где $A=(2-\varepsilon)^2(1-\varepsilon)^{-3/2}\operatorname{arctg}\sqrt{1-\varepsilon}-\varepsilon/(1-\varepsilon)$, $\varepsilon=l/R$, $B=2\varepsilon/(1-\varepsilon)-(3/4)\varepsilon^2A/(1-\varepsilon)$.

Решение рассматриваемой задачи в несколько ином виде приведено в работе [82]. В работах [81, 82] указано на ошибочность полученного ранее решения [83] (см. также [7, 13]). Имеются также данные по КИН при кручении круглого стержня с трещиной по дуге окружности [84].

При $\varepsilon \to 1$ из формулы (5.28) следует [83]

$$K_{III} = 48\sqrt{2\pi}\, MR^{-5/2}/[5(9\pi^2-64)].$$

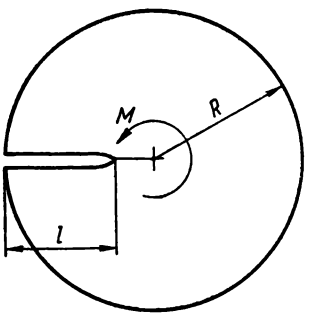
При кручении круглого стержня с двумя коллинеарными радиальными трещинами (рис. 5.86) КИН находится по формуле [82]

$$K_{III} = M\sqrt{\pi}\,(Rc)^{-5/2}\,[(1+c^2)^2\,\mathrm{arctg}\,c - c\,(1-c^2)]\times$$

$$\times\sqrt{(1-c^2)/(1+c^2)}/(\pi^2/2-l),\quad c = l/R,$$

$$l = 2\,[2\,(1-c^2)/c - (1-c^2)^3/(2c^3) + (1+c^2)^2\,c^{-2}\,\mathrm{arctg}\,c +$$

$$+ (1-c^4)^2/(4c^4)\,\mathrm{arctg}\,c]\,\mathrm{arctg}\,c + (1-c^2)^2/(2c^2) - \pi^2/2.$$



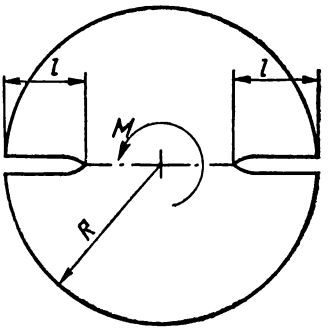


Рис. 5.85. Кручение круглого стержня с краевой радиальной трещиной.

Рис. 5.86. Кручение круглого стержня с двумя коллинеарными краевыми трещинами.

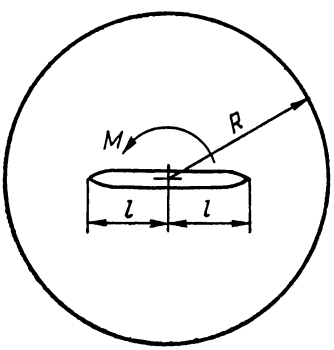
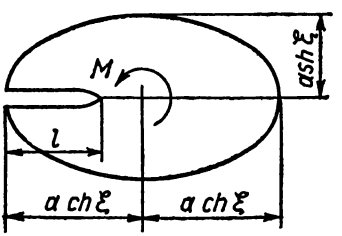


Рис. 5.87. Кручение круглого стержня с центральной трещиной.

Рис. 5.88. Кручение стержня эллиптического сечения с краевой трещиной.



Изучались также случаи циклической [82, 85, 86] и произвольной [81, 86—89] систем краевых радиальных трещин.

Пусть скручивается круглый стержень с центральной прямолинейной трещиной (рис. 5.87). Тогда [7, 83]

$$K_{III} = (M/2)\sqrt{\pi}\,R^{-5/2}k^4K(k)\,(1+c^2)^2\,[(1-c^2)/(1+c^2)]^{5/2}\times$$

$$\times\{(1-c^2)^2\,(1+c^2)^{-2}\,[1+2c^2/(1-c^4)] -$$

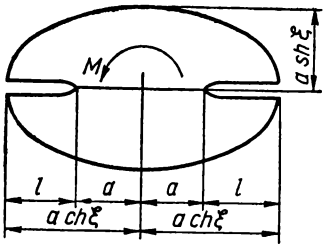
$$-[E(k)/K(k)]^2\}/\{8E(k)\,[K(k)]^{-2}\,[E(k) -$$

$$-(1-k^2)\,K(k)]\,[1-E(k)/K(k)] - \pi^2k^2\},\quad c = l/R,$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы с модулем $k = 1-c^2$.

Кручение круглых стержней с внутренними трещинами рассматривалось также в работах [90—92]. Изучались также круглые полые стержни кольцевого поперечного сечения с краевыми радиальными трещинами [60, 93, 94].

Стержни эллиптического сечения. Пусть поперечное сечение стержня является эллипсом. Скручиваемый стержень ослаблен симметричной кра-



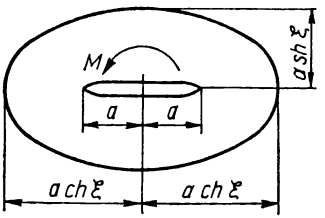
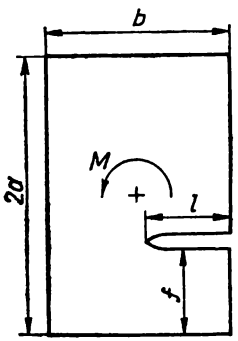


Рис. 5.89. Кручение стержня эллиптического сечения с двумя краевыми трещинами.

Рис. 5.90. Кручение стержня эллиптического сечения с центральной трещиной.



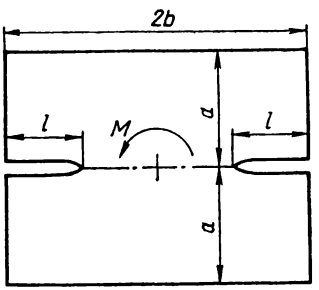


Рис. 5.91. Кручение стержня прямоугольного сечения с краевой трещиной.

Рис. 5.92. Кручение стержня прямоугольного сечения с двумя коллинеарными краевыми трещинами.

евой трещиной (рис. 5.88). КИН дается выражением [7, 83]

$$K_{III} = \frac{8M}{\sqrt{\pi}} \frac{(\operatorname{ch}\xi - 1)^{5/2}}{l^{5/2} \operatorname{sh} 2\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[(2n+1)^2 - 16] \operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2}\xi\right)} \Bigg/ \left\{ \frac{\pi}{4} - \right.$$

$$\left. - \frac{16}{\pi} \operatorname{sh} 2\xi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{th}\left(\frac{2n+1}{2}\xi\right)}{(2n+1)[(2n+1)^2 - 16]^2} \right\}$$

Таблица 5.6. Значения КИН $K_{III}/(M/b^{5/2})$ при кручении стержня прямоугольного сечения с краевой симметричной трещиной ($f = a$) [95]

$\frac{l}{b}$	a/b						
	0,10	0,20	0,25	0,50	1,0	2,5	5,0
0,05	17,355	6,0942	4,4347	1,7945	0,7894	0,2828	0,1463
0,10	20,044	7,5775	5,6166	2,3603	1,0337	0,3523	0,1706
0,15	21,395	8,4240	6,3455	2,7460	1,1989	0,3989	0,1875
0,20	22,483	9,0906	6,9182	3,0531	1,3274	0,4293	0,1980
0,25	23,687	9,7208	7,4473	3,3178	1,4134	0,4476	0,2037
0,30	25,070	10,371	7,9792	3,5539	1,4856	0,4566	0,2050
0,35	25,560	11,074	8,5357	3,7658	1,5250	0,4563	0,2027
0,40	28,236	11,847	9,1081	3,9507	1,5460	0,4496	0,1972
0,45	30,135	12,694	9,7291	4,1004	1,4424	0,4341	0,1889
0,50	32,303	13,614	10,387	4,2018	1,5154	0,4030	0,1780
0,55	34,790	14,589	11,093	4,2381	1,4546	0,3859	0,1648
0,60	37,651	15,572	11,597	4,1898	1,3689	0,3534	0,1495
0,65	40,924	16,466	12,020	3,0377	1,2539	0,3157	0,1324
0,70	44,573	17,710	12,165	3,7648	1,1115	0,2736	0,1139
0,75	48,306	17,237	11,861	3,3628	0,9476	0,2283	0,0943
0,80	51,316	16,485	10,942	2,8350	0,7636	0,1804	0,0740
0,85	51,445	14,481	9,2492	2,1976	0,5663	0,1315	0,0536
0,90	45,199	11,017	6,7580	1,4870	0,3680	0,0838	0,0341

Таблица 5.7. Значения КИН $K_{III}/(M/b^{5/2})$ при кручении стержня квадратного сечения ($b = 2a$) с краевой несимметричной трещиной [95]

$\frac{l}{b}$	f/b			
	0,1	0,2	0,3	0,4
0,05	0,8485	1,3027	1,5869	1,7459
0,10	1,0932	1,6779	2,0667	2,2909
0,15	1,2556	1,9157	2,3803	2,6541
0,20	1,3782	2,0941	2,6191	2,9415
0,25	1,4733	2,2350	2,8155	3,1886
0,30	1,5463	2,3487	2,9783	3,4044
0,35	1,5998	2,4379	3,1182	3,5948
0,40	1,6345	2,5022	3,2334	3,7573
0,45	1,6501	2,5388	3,3121	3,8845
0,50	1,6454	2,5433	3,3492	3,9646
0,55	1,6184	2,5102	3,3376	3,9828
0,60	1,5569	2,4335	3,2590	3,9261
0,65	1,4878	2,3070	3,1028	3,7693
0,70	1,3778	2,1254	2,8679	3,4994
0,75	1,2337	1,8855	2,5463	3,1194
0,80	1,0524	1,5878	2,1410	2,6279
0,85	0,8328	1,2353	1,6596	2,0369
0,90	0,5793	0,8421	1,1238	1,7761

при $l = a\,(\operatorname{ch}\xi - 1)$ и

$$K_{III} = \frac{8M}{\sqrt{\pi}} \frac{(\operatorname{ch}\xi + 1)^{5/2}}{l^{5/2} \operatorname{sh} 2\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{[(2n+1)^2 - 16] \operatorname{sh}\left(\frac{2n+1}{2}\xi\right)} \Bigg/ \left\{\frac{\pi}{4} - \right.$$

$$\left. - \frac{256}{\pi} \operatorname{sh} 2\xi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{cth}\left(\frac{2n+1}{2}\xi\right)}{(2n+1)[(2n+1)^2 - 16]^2} \right\}$$

при $l = a\,(\operatorname{ch}\xi + 1)$.

В случае двух краевых симметричных трещин в стержне эллиптического сечения (рис. 5.89) КИН равен [7, 83]

$$K_{III} = \frac{4M}{\sqrt{\pi}} \frac{(\operatorname{ch}\xi - 1)^{5/2}}{l^{5/2} \operatorname{sh} 2\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[(2n+1)^2 - 4] \operatorname{ch}((2n+1)\xi)} \Bigg/ \left\{\frac{\pi}{4} - \right.$$

$$\left. - \frac{32}{\pi} \operatorname{sh} 2\xi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{th}((2n+1)\xi)}{(2n+1)[(2n+1)^2 - 4]^2} \right\}.$$

При скручивании стержня эллиптического сечения с центральной трещиной (рис. 5.90) КИН имеет вид [7, 83]

$$K_{III} = (8M/\sqrt{\pi})\, a^{-5/2} \operatorname{th}\xi/(\operatorname{sh} 4\xi - 4 \operatorname{th}\xi).$$

В работах [7, 83] приведены также значения КИН для полуэллиптического стержня с краевой трещиной.

Стержни прямоугольного поперечного сечения. Пусть прямоугольный стержень с краевой трещиной скручивается моментом M (рис. 5.91). Значения КИН, полученные методом рядов Фурье [95], приведены в табл. 5.6 и 5.7.

При кручении прямоугольного стержня с двумя коллинеарными краевыми трещинами (рис. 5.92) аналогичные значения КИН даны в табл. 5.8.

Данные по КИН для прямоугольных стержней с краевыми трещинами имеются также в работах [7, 60, 78]. Изучалось также кручение стержней с продольными трещинами, когда поперечное сечение стержня представляет собой прямоугольник с краевыми прямоугольными вырезами [96] или кольцевой сегмент [97].

5.16. Изгиб стержней с трещинами

Круглый стержень с краевой радиальной трещиной. Круглый стержень радиуса R с краевой радиальной трещиной, выходящей из оси стержня, находится под действием поперечной силы P (рис. 5.93). КИН определяется по формуле [7, 83]

$$K_{III} = 32\sqrt{2\pi}\,(12 + 11\mu)\,[105\pi^2(1+\mu)]^{-1} P/R^{3/2} +$$

$$+ 32\sqrt{2\pi}\,(0{,}824927 + 0{,}928043\mu)\,[15\pi^2(1+\mu)]^{-1} P/R^{3/2},$$

причем второе слагаемое определяет ту часть КИН, которая появляется при кручении стержня, поскольку линия действия силы P не проходит через центр изгиба.

Таблица 5.8. Значения КИН $K_{III}/(M/(2b)^{3/2})$ при кручении стержня прямоугольного сечения с двумя коллинеарными краевыми трещинами [95]

$\frac{l}{b}$	$a/2b$					
	0,10	0,25	0,50	1,0	2,5	5,0
0,05	15,167	3,5426	1,3858	0,6130	0,2346	0,1307
0,10	18,404	4,6061	1,8334	0,7971	0,2826	0,1458
0,15	20,206	5,3436	2,1690	0,9364	0,3209	0,1583
0,20	21,599	5,9542	2,447	1,0489	0,3513	0,1683
0,25	22,894	6,5083	2,6970	1,1436	0,3551	0,1760
0,30	24,221	7,0463	2,9316	1,2253	0,3930	0,1814
0,35	25,641	7,5863	3,1547	1,2952	0,4060	0,1847
0,40	27,228	8,1527	3,3674	1,3539	0,4142	0,1859
0,45	28,997	8,7543	3,5718	1,4010	0,4178	0,1851
0,50	31,002	9,3861	3,7641	1,4348	0,4168	0,1824
0,55	33,291	10,045	3,9345	1,4545	0,4111	0,1777
0,60	35,919	10,714	4,0729	1,4574	0,4005	0,1709
0,65	38,939	11,356	4,1641	1,4396	0,3849	0,1620
0,70	42,369	11,903	4,1900	1,3979	0,3639	0,1509
0,75	46,114	12,249	4,1208	1,3285	0,3365	0,1376
0,80	49,649	12,238	3,9267	1,2260	0,3021	0,1220
0,85	51,951	11,663	3,5776	1,0830	0,2595	0,1038
0,90	50,420	10,226	3,0163	0,8868	0,2071	0,0827

Имеются также данные по КИН при изгибе круглых полых стержней кольцевого поперечного сечения с краевой радиальной трещиной [60, 93].

Круглый стержень с двумя коллинеарными краевыми трещинами. Стержень круглого сечения с двумя коллинеарными краевыми трещинами одинаковой длины изгибается поперечной силой, линия действия которой проходит через ось стержня (рис. 5.94). КИН равен [83]

$$K_{III} = [P/3\,(\pi\,(R-l))^{3/2}]\,(1+\mu)^{-1}\sqrt{1-c^4}\times$$
$$\times\,\{(1-2\mu)\,[4\,(1-c^2)/c + m^2 I_0 + I_2] - 3I_0\},$$

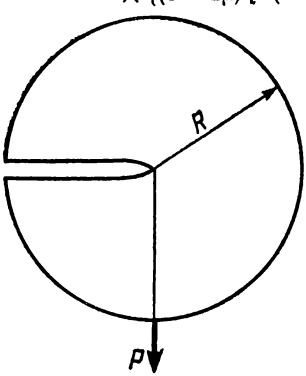


Рис. 5.93. Изгиб круглого стержня с краевой радиальной трещиной.

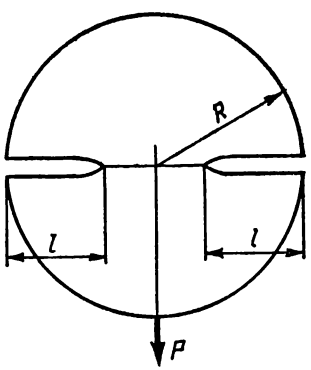
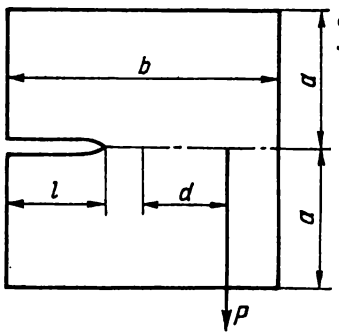


Рис. 5.94. Изгиб круглого стержня с двумя краевыми коллинеарными трещинами.

где $I_0 = 4 \operatorname{arctg} c$, $I_2 = I_0 (1 + c^2)^2/(8c^2) - (1 - c^2)/(2c)$, $c = (R - l)/R$, $m = (1/2)(c + 1/c)$.

В работах [7, 83] рассмотрен также случай изгиба круглого стержня с двумя коллинеарными краевыми трещинами различной длины.

Стержень прямоугольного сечения с краевой трещиной. Прямоугольный стержень с краевой симметричной трещиной находится под действием поперечной силы P, линия действия которой проходит через центр изгиба (рис. 5.95). Зависимости КИН от относительной длины трещины, полученные методом интегральных уравнений [78], показаны на рис. 5.96.



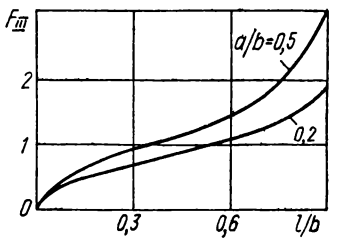
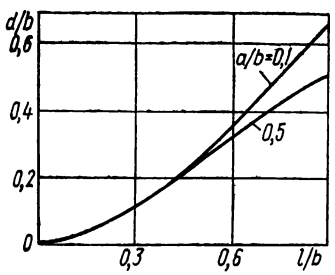


Рис. 5.95. Изгиб прямоугольного стержня с краевой трещиной.

Рис. 5.96. Зависимость КИН $K_{III}/(P\sqrt{\pi}/b^{3/2}) = F_{III}$ от относительной длины трещины l/b при изгибе балки с краевой трещиной для $\mu = 1/3$ [78].



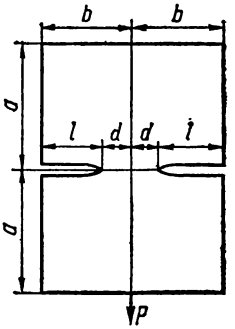


Рис. 5.97. Зависимость относительного расстояния центра изгиба до центра стержня d/b от параметра l/b при изгибе прямоугольного стержня с краевой трещиной для $\mu = 1/3$ [78].

Рис. 5.98. Изгиб прямоугольного стержня с двумя коллинеарными краевыми трещинами.

Положение центра изгиба проиллюстрировано на рис. 5.97. В случае, когда линия действия силы P проходит на расстоянии c от центра изгиба, КИН можно получить методом суперпозиции результатов, приведенных на рис. 5.96 и в табл. 5.6, где крутящий момент $M = \pm Pc$.

Стержень прямоугольного сечения с двумя коллинеарными краевыми трещинами. Прямоугольный стержень, содержащий две симметричные

краевые трещины, находится под действием поперечной силы P (рис. 5.98). КИН дается соотношением [7]

$$K_{III} = -P\sqrt{\pi l}\,3p_0\,(1+q_0)\,\nu^{3/2}\,\mathrm{dn}\,(\nu, k')/[16\pi l^2\gamma\delta K(k)\times$$

$$\times\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\,(\nu, k')\,\mathrm{cn}\,(\nu, k')],$$

где $k = (\sqrt{q_0^2-p_0^2}-\sqrt{q_0^2-1})/(\sqrt{q_0^2-p_0^2}+\sqrt{q_0^2-1})$, $k' = \sqrt{1-k^2}$, $\delta = q_0^2+\sqrt{(q_0^2-p_0^2)(q_0^2-1)}$, $\nu = (l/b)K(k')$, $2K(k)/K(k') = a/b$; $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода; $\mathrm{sn}\,(\nu, k')$, $\mathrm{cn}\,(\nu, k')$, $\mathrm{dn}\,(\nu, k')$ — эллиптические функции Якоби; параметры p_0 и q_0, зависящие от величин a, b и d, определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} 2kq_0^2 = (1+k) - p_0^2(1-k), \\ p_0^2\,\mathrm{sn}\,(\nu, k') - p_0\,[1+\sqrt{(1+k)/(1-k)}] - \sqrt{(1+k)/(1-k)}\,\mathrm{sn}\,(\nu, k') = 0. \end{cases}$$

ГЛАВА 6

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ТЕЛА С ТРЕЩИНАМИ

6.1. Бесконечное тело с плоской круговой трещиной

Действие нормальной осесимметричной нагрузки на поверхностях трещин. Пусть бесконечное тело с плоской круговой трещиной отнесено к цилиндрической системе координат (r, θ, z) с началом в центре трещины; плоскость трещины совпадает с плоскостью $z = 0$ (рис. 6.1). На поверхностях трещины задана нагрузка

$$\sigma_z^{\pm} = p(r), \quad \tau_{rz}^{\pm} = \tau_{\theta z}^{\pm} = 0 \quad (0 \leqslant r \leqslant a),$$

а напряжения на бесконечности отсутствуют. КИН даются выражениями [1—3]

$$K_{\mathrm{I}} = -\frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{rp(r)\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad K_{\mathrm{II}} = K_{\mathrm{III}} = 0.$$

При действии постоянной нагрузки $p(r) = -\sigma = \mathrm{const}$ отсюда следует [1, 4]

$$K_{\mathrm{I}} = 2\sigma\sqrt{a/\pi}, \quad K_{\mathrm{II}} = K_{\mathrm{III}} = 0. \tag{6.1}$$

Это решение соответствует также случаю, когда трещина свободна от нагрузки, а на бесконечности тело находится под действием растягивающих напряжений $\sigma_z^{\infty} = \sigma$.

Когда постоянная нагрузка действует только в области круга радиуса b, т. е. $p(r) = -\sigma$ при $0 \leqslant r \leqslant b$ и $p(r) = 0$ при $b < r \leqslant a$, то [4]

$$K_{\mathrm{I}} = 2\sigma\sqrt{a/\pi}\,[1 - \sqrt{1 - (b/a)^2}], \quad K_{\mathrm{II}} = K_{\mathrm{III}} = 0.$$

При действии нагрузки по кольцевой линии радиуса c, т. е. $p(r) = -(P/2\pi r)\,\delta(r - c)$, КИН равны [4]

$$K_{\mathrm{I}} = P/[(\pi a)^{3/2}\sqrt{1 - (c/a)^2}].$$

Отсюда при $c = 0$ следует решение, когда в центре трещины действуют сосредоточенные растягивающие силы P [4],

$$K_{\mathrm{I}} = P/(\pi a)^{3/2}.$$

Действие осесимметричной радиальной касательной нагрузки на поверхностях трещины. Пусть на поверхностях круговой трещины (см. рис. 6.1) задана нагрузка

$$\sigma_z^{\pm} = \tau_{\theta z}^{\pm} = 0, \quad \tau_{rz}^{\pm} = q(r) \quad (0 \leqslant r \leqslant a),$$

а напряжения на бесконечности отсутствуют. КИН даются выражениями [3]

$$K_{II} = -\frac{2}{a\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{r^2 q(r)\, dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad K_I = K_{III} = 0.$$

При действии постоянной нагрузки $q(r) = -\tau = \text{const}$ отсюда следует [3, 5]

$$K_{II} = (\tau/2)\sqrt{\pi a}, \quad K_I = K_{III} = 0.$$

Когда постоянная нагрузка действует только в области круга радиуса b, т. е. $q(r) = -\tau$ при $0 \leqslant r \leqslant b$ и $q(r) = 0$ при $b < r \leqslant a$, то [3, 6]

$$K_{II} = \tau\sqrt{a/\pi}\,[\arcsin(b/a) - (b/a)(1 - b^2/a^2)],$$

$$K_I = K_{III} = 0.$$

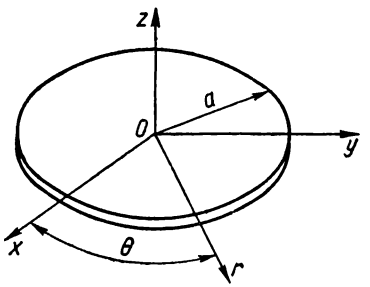


Рис. 6.1. Схема декартовой и цилиндрической систем координат в бесконечном теле с круговой трещиной.

Действие осесимметричной крутящей нагрузки на поверхностях трещины. Пусть на поверхностях круговой трещины (см. рис. 6.1) задана нагрузка

$$\sigma_z^{\pm} = \tau_{rz}^{\pm} = 0, \quad \tau_{\theta z}^{\pm} = \tau(r) \quad (0 \leqslant r \leqslant a),$$

а напряжения на бесконечности отсутствуют. КИН даются выражениями [3]

$$K_{III} = -\frac{2}{a\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{r^2 \tau(r)\, dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad K_I = K_{II} = 0.$$

При действии постоянной нагрузки $\tau(r) = -\tau = \text{const}$ отсюда следует [3, 7]

$$K_{III} = (\tau/2)\sqrt{\pi a}, \quad K_I = K_{II} = 0.$$

Это решение соответствует также случаю, когда трещина свободна от нагрузки, а на бесконечности тело находится под действием крутящей нагрузки $\tau_{\theta z}^{\infty} = \tau$.

Когда крутящая нагрузка изменяется по линейному закону $\tau(r) = -\tau_0(r/a)$, то [6, 8]

$$K_{III} = (4/3)\,\tau_0\sqrt{a/\pi}.$$

Действие произвольной нормальной нагрузки на берегах трещины. Пусть на поверхностях трещины (см. рис. 6.1) задана нагрузка

$$\sigma_z^{\pm} = p(x, y), \quad \tau_{xz}^{\pm} = \tau_{yz}^{\pm} = 0 \quad (x^2 + y^2 \leqslant a^2),$$

а напряжения на бесконечности отсутствуют. КИН даются выражениями [9—12]

$$K_I(\theta) = -\frac{1}{\pi\sqrt{\pi a}} \iint_S \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, p(x, y)\, dxdy}{(a\cos\theta - x)^2 + (a\sin\theta - y)^2}, \qquad (6.2)$$

где область S — круг $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

Когда в некоторой точке $x = \xi$, $y = \eta$ поверхности трещины приложены сосредоточенные растягивающие силы P, т. е. $p(x, y) = -P\delta(x - \xi)\,\delta(y - \eta)$, то из формулы (6.2) следует [10]:

$$K_I(\theta) = (P/(\pi\sqrt{\pi a}))\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2}/[(a\cos\theta - \xi)^2 + (a\sin\theta - \eta)^2].$$

Это решение можно записать также в виде [3, 6, 13, 14]

$$K(A) = (P/(\pi\sqrt{\pi a}))\sqrt{a^2 - \rho^2}/(a^2 + \rho^2 - 2\rho a\cos\varphi),$$

где ρ и φ показаны на рис. 6.2.

Если представить нагрузку $p(x, y)$ в виде

$$p(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty}[f_n(r)\cos n\theta + g_n(r)\sin n\theta],$$

общее решение задачи (6.2) можно записать также в форме [15]

$$K_I(\theta) = -\frac{2}{\sqrt{\pi a}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\cos n\theta}{a^n}\int_0^a\frac{r^{n+1}f_n(r)\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin n\theta}{a^n}\int_0^a\frac{r^{n+1}g_n(r)\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}\right], \quad K_{II} = K_{III} = 0.$$

В частности, при $p(x, y) = -\sigma_0(r/a)\cos\theta$ КИН равны [8, 16]

$$K_I(\theta) = (4/3)\,\sigma_0\sqrt{a/\pi}\cos\theta, \quad K_{II} = K_{III} = 0.$$

Действие произвольной касательной нагрузки на берегах трещины. Пусть на поверхностях трещины (см. рис. 6.1) задана нагрузка

$$\sigma_z^{\pm} = 0, \quad \tau_{rz}^{\pm} = q(r, \theta), \quad \tau_{\theta z}^{\pm} = \tau(r, \theta) \quad (0 \leqslant r \leqslant a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

а напряжения на бесконечности отсутствуют. КИН даются выражениями [11]

$$K_{II}(\theta') = -\frac{2}{\pi(2 - \mu)\sqrt{\pi a}}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{S}\left\{q(r, \theta)\left[\cos(\theta - \theta') - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\mu r}{2a} + \mu\frac{(r^2 + a^2)\cos(\theta - \theta') - 2ra}{S}\right] -$$

$$\left. - \tau(r, \theta)\left(1 + \mu\frac{a^2 - r^2}{S}\right)\sin(\theta - \theta')\right\} r dr d\theta,$$

$$K_{III}(\theta') = -\frac{2}{\pi(2 - \mu)\sqrt{\pi a}}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{S}\left\{\tau(r, \theta)\left[(1 - \mu)\times\right.\right.$$

$$\times\cos(\theta - \theta') - \frac{\mu r}{2a} - \mu\frac{(r^2 + a^2)\cos(\theta - \theta') - 2ra}{S}\right] +$$

$$\left. + q(r, \theta)\left(1 - \mu - \mu\frac{a^2 - r^2}{S}\right)\sin(\theta - \theta')\right\} r dr d\theta,$$

$$K_I(\theta') = 0, \quad S = a^2 + r^2 - 2ra\cos(\theta - \theta'). \qquad (6.3)$$

Если на берегах трещины действует нагрузка

$$\sigma_z^{\pm} = 0, \quad \tau_{xz}^{\pm} = k(r), \quad \tau_{yz}^{\pm} = 0 \quad (0 \leqslant r \leqslant a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

то решение задачи, следующее из формулы (6.3), имеет вид [11]

$$K_{II}(\theta) = -\frac{2\cos\theta}{a^2\sqrt{\pi a}} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\, k(r) \left[\frac{r^2}{a^2 - r^2} + 2\frac{1+\mu}{2-\mu}\right] r dr,$$

$$K_{III}(\theta) = \frac{2\sin\theta}{a^2\sqrt{\pi a}} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\, k(r) \left[\frac{r^2}{a^2 - r^2} + \frac{2(1-2\mu)}{2-\mu}\right] r dr,$$

$$K_I(\theta) = 0.$$

Отсюда при $k(r) = -\tau = \text{const}$ следует [17—19]

$$\left.\begin{aligned} K_{II}(\theta) &= 4\tau\sqrt{a/\pi}\cos\theta/(2-\mu), \\ K_{III}(\theta) &= -4\tau\sqrt{a/\pi}\sin\theta\,(1-\mu)/(2-\mu), \quad K_I(\theta) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Последнее решение соответствует также случаю, когда трещина свободна от нагрузки, а на бесконечности заданы сдвигающие усилия $\tau_{xz}^{\infty} = \tau$.

Пусть в точке $x = b$, $y = 0$ на берегах трещины (см. рис. 6.1) действуют радиальные сосредоточенные сдвигающие силы Q, т. е. $q(r, \theta) = -(Q/b)\,\delta(r - b)\,\delta(\theta)$, $\tau(r, \theta) = 0$. Тогда из формулы (6.3) находим

$$K_{II}(\theta) = [2Q/(\pi(2-\mu)\sqrt{\pi a})] \times \sqrt{a^2 - b^2}\,(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{-1} \times \{\cos\theta - \mu b/(2a) + \mu[(b^2 + a^2)\cos\theta - 2ab](a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{-1}\},$$

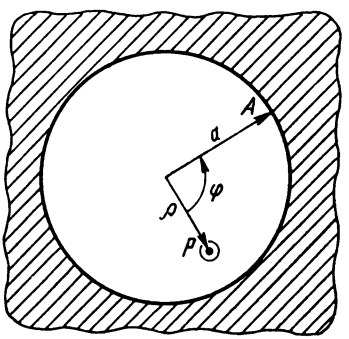


Рис. 6.2. Сечение бесконечного тела с круговой трещиной вдоль плоскости трещины.

$$K_{III}(\theta) = -[2Q/(\pi(2-\mu)\sqrt{\pi a})]\sqrt{a^2 - b^2}\,(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{-1}[1 - \mu - \mu(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{-1}],$$

$$K_I(\theta) = 0.$$

Отсюда при $b = 0$ следует решение задачи, когда радиальная сила приложена в центре трещины [3, 6]

$$K_{II}(\theta) = 2(1+\mu)\,Q\cos\theta/((2-\mu)(\pi a)^{3/2}),$$

$$K_{III}(\theta) = -2(1-2\mu)\,Q\sin\theta/((2-\mu)(\pi a)^{3/2}),$$

$$K_I(\theta) = 0.$$

Когда в точке $x = b$, $y = 0$ на берегах трещины (см. рис. 6.1) действует окружная сосредоточенная сдвигающая сила R, т. е. $q(r, \theta) = 0$,

$\tau(r, \theta) = -(R/b)\,\delta(r-b)\,\delta(\theta)$, то из решения (6.3) следует

$$K_{II}(\theta) = -[2R/(\pi(2-\mu)\sqrt{\pi a})]\sqrt{a^2-b^2}\,(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{-1}[1+$$

$$+\mu(a^2-b^2)(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{-1}]\sin\theta,$$

$$K_I(\theta) = 0,$$

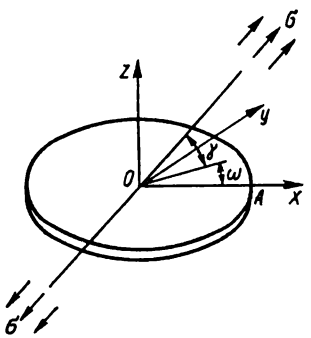
$$K_{III}(\theta) = [2R/(\pi(2-\mu)\sqrt{\pi a})]\sqrt{a^2-b^2}\,(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{-1}\times$$

$$\times\{(1-\mu)\cos\theta - \mu b/(2a) - \mu[(a^2+b^2)\cos\theta - 2ab]\times$$

$$\times(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{-1}\}.$$

Действие произвольной нагрузки на берегах круговой трещины рассматривалось также в работах [3, 20—25].

Действие растягивающей нагрузки на бесконечности. Суперпозицией решений (6,1) и (6.4) легко получить КИН в случае, когда трещина сво-



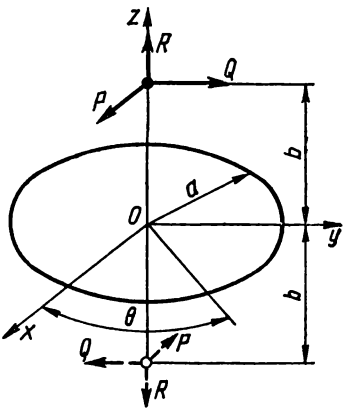


Рис. 6.3. Одноосное растяжение бесконечного тела с произвольно расположенной круговой трещиной.

Рис. 6.4. Действие сосредоточенных сил во внутренних точках бесконечного тела с круговой трещиной.

бодна от нагрузки, а на бесконечности тело находится под действием одноосного растяжения в произвольном направлении (рис. 6.3) [16, 26],

$$K_I(A) = 2\sigma\sin^2\gamma\sqrt{a/\pi},$$

$$K_{II}(A) = (2/(2-\mu))\,\sigma\sin 2\gamma\cos\omega\sqrt{a/\pi},$$

$$K_{III}(A) = (2(1-\mu)/(2-\mu))\,\sigma\sin 2\gamma\sin\omega\sqrt{a/\pi}.$$

Действие сосредоточенных сил во внутренних точках тела. Пусть на оси Oz, проходящей через центр трещины перпендикулярно ее плоскости, на расстоянии b от центра трещины приложены три сосредоточенные силы P, Q и R, действующие в направлении осей Ox, Oy и Oz соответственно (рис. 6.4). КИН даются выражениями [3, 6]

$$K_I(\theta) = \{(P\cos\theta + Q\sin\theta)\{(1-2\mu)[\operatorname{arcctg}\lambda - \lambda/(1+\lambda^2)] -$$

$$- 2\lambda/(1+\lambda^2)^2\} + 2R\,(1+\lambda^2)^{-1}\,[1-\mu+\lambda^2/(1+\lambda^2)]\}/[4\,(1-\mu)\,(\pi a)^{3/2}],$$

$$K_{II}(\theta) = \{(P\cos\theta + Q\sin\theta)\,(2-\mu)^{-1}\,\{3\,(1-\mu)\,(1-2\mu)\,\lambda\,[\operatorname{arcctg}\lambda -$$

$$- \lambda/(1+\lambda^2)] + 2\,(1+\lambda^2)^{-1}\,[2\,(1-\mu^2) - (2-\mu)\,\lambda^2/(1+\lambda^2)]\} +$$

$$+ R\,\{(1-2\mu)\,[\lambda/(1+\lambda^2) - \operatorname{arcctg}\lambda] -$$

$$- 2\lambda/(1+\lambda^2)^2\}\}/[4\,(1-\mu)\,(\pi a)^{3/2}], \quad \lambda = b/a,$$

$$K_{III}(\theta) = -(P\sin\theta + Q\cos\theta)\,[3 - 3\lambda\operatorname{arcctg}\lambda +$$

$$+ 1/(1+\lambda^2)]\,(1-2\mu)/[4\,(2-\mu)\,(\pi a)^{3/2}].$$

Отсюда при $\lambda \to 0$ получим КИН для случая, когда сосредоточенные силы действуют на верхней поверхности трещины в ее центре,

$$K_I(\theta) = (P\cos\theta + Q\sin\theta)\,(1-2\mu)/[8\,(1-\mu)\,a\sqrt{\pi a}] + R/[2\,(\pi a)^{3/2}],$$

$$K_{II}(\theta) = (P\cos\theta + Q\sin\theta)\,(1+\mu)/[(2-\mu)\,(\pi a)^{3/2}] - R/[8\,(1-\mu)\,a\sqrt{\pi a}],$$

$$K_{III}(\theta) = -(P\sin\theta + Q\cos\theta)\,(1-2\mu)/(2-\mu)\,(\pi a)^{3/2}.$$

Если же, кроме того, в симметричной точке оси Oz действуют такие же по величине силы P, Q и R, но противоположного направления (см. рис. 6.4), КИН равны [3, 6]

$$K_I(\theta) = R\,(1+\lambda^2)^{-1}\,[1-\mu+\lambda^2/(1+\lambda^2)]/[(1-\mu)\,(\pi a)^{3/2}], \quad \lambda = b/a,$$

$$K_{II}(\theta) = (P\cos\theta + Q\sin\theta)\,\{3\,(1-\mu)\,(1-2\mu)\,\lambda\,[\operatorname{arcctg}\lambda - \lambda/(1+\lambda^2)] +$$

$$+ 2\,(1+\lambda^2)^{-1}\,[2\,(1-\mu^2) - (2-\mu)\,\lambda/(1+\lambda^2)]\}/[2\,(1-\mu)\,(2-\mu)\,(\pi a)^{3/2}],$$

$$K_{III}(\theta) = -(P\sin\theta + Q\cos\theta)\,[3 - 3\lambda\operatorname{arcctg}\lambda + 1/(1+\lambda^2)]\,(1 -$$

$$- 2\mu)/[2\,(2-\mu)\,(\pi a)^{3/2}].$$

Действие пары симметричных растягивающих сил в теле с круговой трещиной рассматривалось также в работах [2, 27—30].

Раскрытие берегов трещины жестким круговым включением. Пусть между граничными поверхностями круговой трещины вставлено жест-

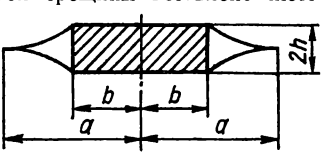


Рис. 6.5. Раскрытие берегов круговой трещины в бесконечном теле жестким круговым включением постоянной толщины.

кое круговое включение постоянной толщины (рис. 6.5). Асимптотическое решение задачи при малых значениях параметра $\lambda = b/a$ имеет вид [31]

$$K_I = K_0\,\{4\lambda/\pi + 16\lambda^2/\pi^3 + [64/\pi^5 + 4/(3\pi)]\,\lambda^3 +$$

$$+ [80/(9\pi^3) + 256/\pi^7]\,\lambda^4 + [448/(9\pi^5) + 1024/\pi^9 + 4/(5\pi)]\lambda^5 + O(\lambda^6)\},$$

$$K_0 = hG/[(1-\mu)\sqrt{\pi a}].$$

Ниже приведены также значения КИН K_I/K_0, полученные при численном решении интегрального уравнения [31]:

λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
K_I/K_0	0,132	0,278	0,445	0,641	0,881	1,189	1,616	2,293	3,709

Рассматривался также случай, когда трещина раскрывается жестким круговым включением переменной толщины [32].

В работах [30, 32—34] приведены данные по КИН для трансверсально-изотропного пространства с круговой трещиной.

6.2. Бесконечное тело с плоской эллиптической трещиной

Постоянная нагрузка на берегах трещины. Пусть бесконечное тело отнесено к декартовой системе координат (x, y, z) с началом в центре трещины; плоскость трещины совпадает с плоскостью $z = 0$ (рис. 6.6). На поверхностях трещины задана постоянная нагрузка $\sigma_z^{\pm} = -\sigma$, $\tau_{xz}^{\pm} = -q$, $\tau_{yz}^{\pm} = -\tau$, $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqslant 1$, а напряжения на бесконечности отсутствуют. КИН определяются формулами [18, 35—37]

$$
\left.
\begin{aligned}
&K_{\mathrm{I}}(A) = \sigma \sqrt{\pi b}\,[\sin^2\varphi + (b/a)^2\cos^2\varphi]^{1/4}/E(k),\\
&K_{\mathrm{II}}(A) = k^2\sqrt{\pi b}\,[\sin^2\varphi + (b/a)^2\cos^2\varphi]^{-1/4}\times\\
&\times\{k'q\cos\varphi/[(k^2-\mu)E(k) + \mu k'^2K(k)] +\\
&+\tau\sin\varphi/[(k^2+\mu k'^2)E(k) - \mu k'^2K(k)]\},\\
&K_{\mathrm{III}}(A) = -(1-\mu)k^2\sqrt{\pi b}\,[\sin^2\varphi + (b/a)^2\cos^2\varphi]^{-1/4}\times\\
&\times\{q\sin\varphi/[(k^2-\mu)E(k) + \mu k'^2K(k)] - \tau k'\cos\varphi/[(k^2+\mu k'^2)\times\\
&\times E(k) - \mu k'^2K(k)]\},\\
&k^2 = 1-k'^2,\quad k' = b/a\quad (a \geqslant b),
\end{aligned}
\right\} \qquad (6.5)
$$

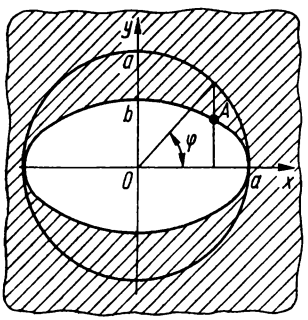


Рис. 6.6. Сечение бесконечного тела с эллиптической трещиной вдоль плоскости трещины.

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы.

Решение (6.5) соответствует также случаю, когда трещина свободна от нагрузки, а на бесконечности заданы напряжения $\sigma_z^{\infty} = \sigma$, $\tau_{xz}^{\infty} = q$ и $\tau_{yz}^{\infty} = \tau$. Суперпозицией результатов (6.5) легко получить КИН при произвольном однородном поле напряжений на бесконечности. Данные по КИН для рассматриваемой нагрузки имеются также в работах [9, 38—43].

Линейно изменяющееся давление на поверхностях трещины. Пусть на поверхностях эллиптической трещины (см. рис. 6.6) действует только нормальная нагрузка, изменяющаяся по линейному закону, $\sigma_z^{\pm} = \sigma\,(x/a) + p\,(y/b)$, $\tau_{xz}^{\pm} = \tau_{yz}^{\pm} = 0$, $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqslant 1$. Тогда КИН равны [44, 45]

$$
\left.
\begin{aligned}
&K_{\mathrm{I}}(A) = \sqrt{\pi b}\,[\sin^2\varphi + (b/a)^2\cos^2\varphi]^{1/4}(\sigma\cos\varphi G_x + p\sin\varphi G_y),\\
&K_{\mathrm{II}} = 0,\quad K_{\mathrm{III}} = 0,
\end{aligned}
\right\} \qquad (6.6)
$$

где

$$G_x = k^2/[(2k^2-1)E(k) - (1-k^2)K(k)],$$

$$G_y = k^2/[(1+k^2)E(k) - (1-k^2)K(k)],\quad k^2 = 1 - b^2/a^2,$$

$K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы.

Результат (6.6) при $\sigma = -M_y a/I_y$ и $p = -M_x b/I_x$ можно рассматривать как решение задачи о чистом изгибе призматического стержня моментами M_x и M_y, когда плоская эллиптическая трещина расположена в поперечном сечении стержня, причем центр эллипса находится в центре тяжести поперечного сечения, моменты инерции которого относительно осей Ox и Oy равны I_x и I_y. При этом предполагается, что трещина расположена достаточно далеко от боковой поверхности стержня. Случай, когда центр тяжести сечения не лежит в центре трещины, получается суперпозицией формул (6.5) и (6.6) [10, 44].

Квадратичная нормальная нагрузка на берегах трещины. Пусть на поверхностях трещины (см. рис. 6.6) действует нагрузка

$$\sigma_z^{\pm} = p_{20}(x/a)^2 + p_{11}xy/(ab) + p_{02}(y/b)^2, \quad \tau_{xz}^{\pm} = \tau_{yz}^{\pm} = 0.$$

КИН определяются по формулам [3, 45]

$$K_{\mathrm{I}}(A) = \sqrt{\pi}\,(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{1/4}\{(p_{11}/6)(a/b)^{7/2}\sin 2\varphi/(J_{21}+J_{12}) +$$

$$+ (192/(ab)^{3/2})[(A_2/a^2)\cos^2\varphi + (A_3/b^2)\sin^2\varphi]\},$$

$$K_{\mathrm{II}} = 0, \quad K_{\mathrm{III}} = 0,$$

где

$$A_2 = (a^5/288)[p_{20}(J_{12}+5J_{03}) - (a/b)^2 p_{02}(J_{21}+J_{12})]/\Delta,$$

$$A_3 = (a^5/288)[-p_{20}(J_{12}+J_{21}) + (a/b)^2 p_{02}(J_{21}+5J_{30})]/\Delta,$$

$$\Delta = (J_{21}+5J_{30})(J_{12}+5J_{03}) - (J_{21}+J_{12})^2,$$

$$J_{30} = (1/15)\,k^{-6}[(8+3k^2+4k^4)K(k) - (8+7k^2+8k^4)E(k)],$$

$$J_{21} = (1/3)\,k^{-6}[-(8+k^2)K(k) + (5+2k^2+3k'^{-2})E(k)],$$

$$J_{12} = (1/3)\,k^{-6}k'^{-2}[(8-9k^2)K(k) - (10-3k^2-2k'^{-2})E(k)],$$

$$J_{03} = (1/15)\,k^{-6}k'^{-2}[(8k'^{-2}-23k^2)E(k) - (8-19k^2+15k^4)K(k)],$$

$$k = \sqrt{1-(b/a)^2}, \quad k' = \sqrt{1-k^2}.$$

Линейно изменяющаяся сдвиговая нагрузка на поверхностях трещины. Пусть на поверхностях трещины (см. рис. 6.6) заданы напряжения $\sigma_z^{\pm} = 0$, $\tau_{xz}^{\pm} = \tau_1\,(y/b)$, $\tau_{yz}^{\pm} = \tau_2\,(x/a)$, $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqslant 1$, а на бесконечности нагрузка отсутствует. КИН даются выражениями [3]

$$K_{\mathrm{II}}(A) = a\sqrt{\pi}\,(1-\mu)\sin\varphi\cos\varphi k'^{-3/2}C^{-1}(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi)^{-1/4} \times$$

$$\times [\tau_1(J_{11}+3J_{20})(a/b) + \tau_2(J_{11}+3J_{02})],$$

$$K_{\mathrm{I}} = 0,$$

$$K_{\mathrm{III}}(A) = \sqrt{\pi}\,(1-\mu)(ab)^{-5/2}(b^2\cos\varphi + a^2\sin\varphi)^{-1/4} \times$$

$$\times [B_2 b^2\cos^2\varphi - B_1 a^2\sin^2\varphi],$$

где

$$B_1 = \{(a/b)\,\tau_1[J_{11} + 3(1-\mu)J_{20}] - \mu\tau_2 J_{11}\}(a^4/C),$$

$$B_2 = \{\tau_2[J_{11} + 3(1-\mu)J_{20}] - (a/b)\,\mu\tau_1 J_{11}\}(a^4/C),$$

$$C = (1-\mu)[(1+\mu)J_{11}^2 + 3J_{11}(J_{20}+J_{02}) + 9(1-\mu)J_{20}J_{02}],$$

$$J_{20} = (1/3)\,k^{-4}[(2+k^2)K(k) - 2(1+k^2)E(k)],$$

$$J_{02} = (1/3)(kk')^{-4}[k'^2(2-3k^2)K(k) + 2(2k^2-1)E(k)],$$

$$J_{11} = k^{-4}[-2K(k) + (1+k'^{-2})E(k)].$$

Данные по КИН при действии полиномиальной нагрузки на берегах эллиптической трещины рассматривались также в работах [21, 46—50]. Рассматривалось также растяжение тела с эллиптической трещиной сосредоточенными силами [51]. Данные по КИН для трансверсально-изотропной среды с эллиптической трещиной приведены в работах [52, 53].

Туннельная трещина конечной ширины. Предельным случаем эллиптической трещины (см. рис. 6.6) при $a \to \infty$ является туннельная трещина

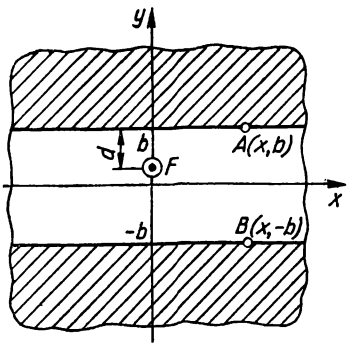


Рис. 6.7. Сечение бесконечного тела с туннельной трещиной конечной ширины вдоль плоскости трещины.

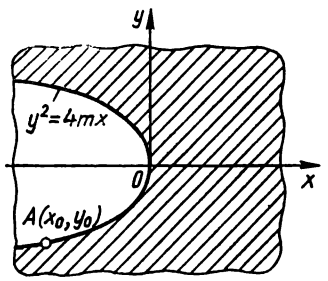


Рис. 6.8. Сечение бесконечного тела с параболической трещиной вдоль плоскости трещины.

конечной ширины $2b$ (рис. 6.7). Из приведенных выше формул для КИН легко получить соответствующие результаты в предельном случае, если учесть, что $\sin\varphi \to 1$ и $a\cos\varphi \to x$ при $a \to \infty$. В частности, из соотношений (6.5) следует КИН для туннельной трещины в бесконечном теле, находящемся в условиях плоской и антиплоской деформации. Если на берегах трещины (см. рис. 6.7) заданы напряжения $\sigma_z^{\pm} = \sigma_0(x/b)$, $\tau_{xz}^{\pm} = \tau_{yz}^{\pm} = 0$ $(-\infty < x < \infty,\ |y| \leqslant b)$, из формул (6.6) найдем

$$K_I(A) = \sigma_0 x\sqrt{\pi b},\quad K_{II} = 0,\quad K_{III} = 0.$$

Пусть поверхности туннельной трещины раскрываются под действием двух нормальных растягивающих сил F. Приведем приближенные формулы для определения КИН, полученные в работе [54]:

$$K_I(A) = F(\pi d)^{-3/2}(2-d/b)^{1/2}[1+(x/d)^2]^{-1},$$

$$K_I(B) = F[\pi(2b-d)]^{-3/2}(d/b)^{1/2}[1+x^2/(2b-d)^2]^{-1}.$$

Эти соотношения дают точные результаты в двух предельных случаях, когда трещина становится полубесконечной или когда сосредоточенные силы непрерывно расположены вдоль прямой, параллельной оси Ox (плоская деформация). Известны также другие приближенные решения рассматриваемой задачи [14, 55].

Плоская параболическая трещина. Частным случаем эллиптической трещины является параболическая трещина (рис. 6,8). Пусть на поверх-

ностях трещины задана постоянная нагрузка $\sigma_z^{\pm} = -\sigma$, $\tau_{xz}^{\pm} = -q$, $\tau_{yz}^{\pm} = -\tau$, $y^2 - 4mx \leqslant 0$. Тогда КИН равны [56]

$$K_{\mathrm{I}}(A) = \sigma \sqrt{\pi}\,(y_0^2 + 4m^2)^{1/4},$$

$$K_{\mathrm{II}}(A) = \sqrt{2\pi}\,(m^2 + mx_0)^{-1/4}\,[qm/(1-\mu) - \tau\sqrt{mx_0}],$$

$$K_{\mathrm{III}}(A) = \sqrt{2\pi}\,(m^2 + mx_0)^{-1/4}\,[q\sqrt{mx_0} + \tau(1-\mu)].$$

Данные по КИН для параболической трещины имеются также в работах [14, 43].

6.3. Бесконечное тело с плоскими внутренними трещинами различной формы

Прямоугольная трещина. Пусть в бесконечном теле в плоскости $z = 0$ имеется прямоугольная трещина ($-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$) (рис. 6.9). Тело находится под действием растягивающих ($\sigma_z^{\infty} = p$) и сдвигающих ($\sigma_{xz}^{\infty} = \tau$, $\tau_{yz}^{\infty} = q$) усилий на бесконечности, а поверхности трещины свободны от нагрузки. Задача решена методом интегральных уравнений в работе [57]. Изменение значений КИН вдоль сторон прямоугольника показано на рис. 6.10—6.12.

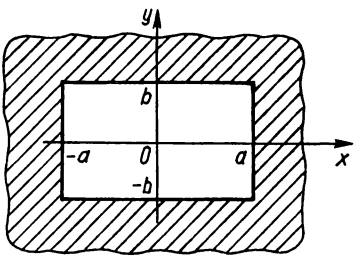


Рис. 6.9. Сечение бесконечного тела с прямоугольной трещиной вдоль плоскости трещины.

Порядок особенности напряжений (ν) в угловой точке контура трещины зависит от величины угла трещины α: $\nu = 1/2$ при $\alpha = \pi$ (гладкий контур, $\nu < 1/2$ при $\alpha < \pi$ и $\nu > 1/2$ при $\alpha > \pi$ [58]. Отсюда следует, что КИН вдоль контура трещины при приближении к угловой точке стремится к нулю, если трещина занимает выпуклую область.

Данные по КИН для прямоугольной трещины имеются в работах [59—61] (растяжение) и [62] (сдвиг). Отдельно рассматривался случай квадратной трещины [19, 63—67].

Треугольная трещина. Пусть трещина имеет форму равностороннего треугольника со стороной $2a$ (рис. 6.13). На бесконечности тело растягивается усилиями p, перпендикулярными трещине. Ниже приведены значения КИН вдоль стороны треугольника, полученные в работе [68] методом интегральных уравнений:

x/a	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	0,9	0,95
$K_{\mathrm{I}}/p\sqrt{2\pi a}$	0,478	0,477	0,476	0,471	0,462	0,449	0,432	0,378	0,281	0,234

Данные по КИН для треугольной трещины имеются также в работах [65, 67].

Полукруговая трещина. Пусть тело, ослабленное плоской трещиной в виде полукруга радиуса a, растягивается на бесконечности равномерно распределенными усилиями интенсивностью p в направлении, перпендикулярном плоскости трещины. На рис. 6.14 показана эпюра изменения КИН вдоль контура трещины, полученная в работах [19, 63] методом интегральных уравнений.

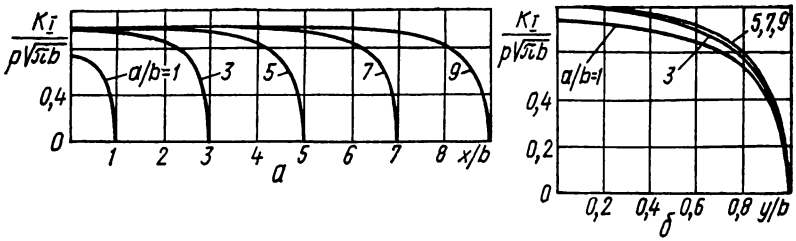


Рис. 6.10. Изменение величины $K_I/(p\sqrt{\pi b})$ вдоль бо́льших (*а*) и меньших (*б*) сторон прямоугольной трещины при растяжении на бесконечности [57].

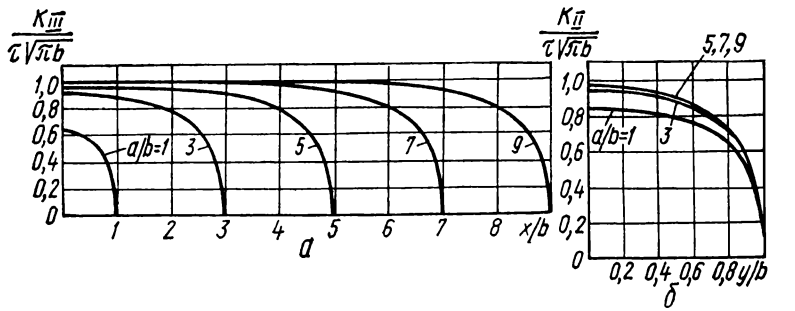


Рис. 6.11. Изменение величины $K_{III}/(\tau\sqrt{\pi b})$ вдоль бо́льших (*а*) и $K_{II}/(\tau\sqrt{\pi b})$ вдоль меньших (*б*) сторон прямоугольной трещины при сдвиге на бесконечности [57].

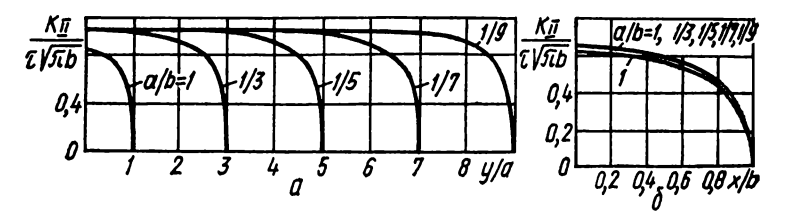
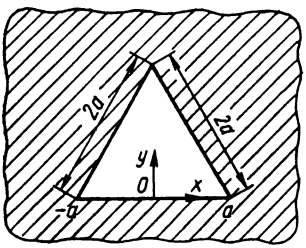


Рис. 6.12. Изменение величины $K_{II}/(\tau\sqrt{\pi b})$ вдоль бо́льших (*а*) и $K_{III}/(\tau\sqrt{\pi a})$ вдоль меньших (*б*) сторон прямоугольной трещины при сдвиге на бесконечности [57].

Полукруговая — полуэллиптическая трещина. Пусть трещина состоит из полукруга радиуса a и полуэллипса с полуосями a и $1{,}5a$ (рис. 6.15, *а*). Поверхности трещины находятся под действием нормальной нагрузки, линейно изменяющейся вдоль оси симметрии, $\sigma_z^{\pm} = p_0 + p_1 x$, $\tau_{xz}^{\pm} = 0$, $\tau_y^{\pm} = 0$. Задача решена методом интегральных уравнений в работе [65]. Изменение КИН вдоль контура трещины показано на рис. 6.15, *б*.



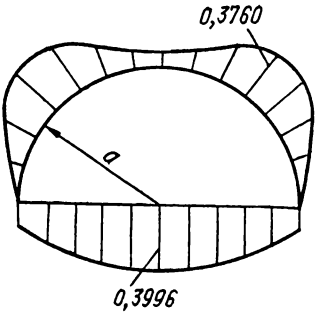
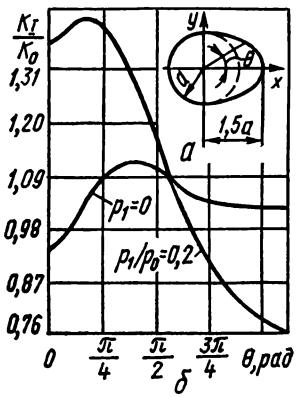


Рис. 6.13. Сечение бесконечного тела с треугольной трещиной вдоль плоскости трещины.

Рис. 6.14. Изменение КИН $K_I / (p\sqrt{2\pi a})$ вдоль контура полукруговой трещины при растяжении на бесконечности [19, 63].

Рис. 6.15. Схема полукруговой — полуэллиптической трещины ($а$) и изменение КИН K_I/K_0 ($K_0 = 2p_0\sqrt{a/\pi}$) вдоль контура трещины ($б$) при действии на ее поверхностях постоянного давления ($p_1 = 0$) или линейной нагрузки ($p_1/p_0 = 0{,}2$) [65].



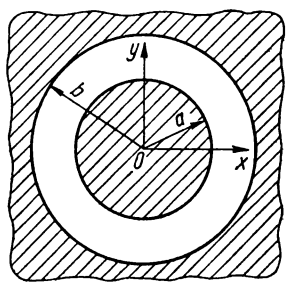


Рис. 6.16. Сечение бесконечного тела с кольцевой трещиной вдоль плоскости трещины.

Таблица 6.1. **Значения КИН для кольцевой трещины в бесконечном теле при растяжении на бесконечности [70]**

a/b	$K_I(a)/(p\sqrt{\pi b})$	$K_I(b)/(p\sqrt{\pi b})$	a/b	$K_I(a)/(p\sqrt{\pi b})$	$K_I(b)/(p\sqrt{\pi b})$
0	—	0,6364	0,50	0,5694	0,4725
0,04	2,1514	0,6259	0,60	0,4885	0,4271
0,05	1,9078	0,6232	0,70	0,4101	0,3738
0,10	1,3406	0,6095	0,80	0,3270	0,3086
0,20	0,9546	0,5802	0,90	0,2270	0,2206
0,30	0,7772	0,5480	0,95	0,1592	0,1570
0,40	0,6608	0,5124	0,98	0,1003	0,0997

Кольцевая трещина. Пусть тело ослаблено плоской трещиной, форма которой представляет собой круговое кольцо (рис. 6.16). На бесконечности действуют растягивающие усилия $\sigma_z^\infty = p$ в направлении, перпендикулярном плоскости трещины. В работе [69] получены асимптотические решения задачи при больших

$$\left.\begin{aligned}
&K_{\mathrm{I}}(a) = p\sqrt{\pi a/\lambda}\exp(2{,}5/\lambda)\,\Phi(-1),\\
&K_{\mathrm{I}}(b) = p\sqrt{\pi b/\lambda}\exp(-2{,}5/\lambda)\,\Phi(1),\\
&\Phi(t) = 1 + (0{,}246 + \chi)\,\lambda^{-2} + (0{,}0708 + 0{,}276\chi + \chi^2)\,\lambda^{-4} +\\
&+ [1{,}750 + (0{,}336 + \chi)\,\lambda^{-2} + (0{,}00922 - 0{,}176\chi)\,\lambda^{-4}]\,(t/\lambda) +\\
&+ [1{,}604 + (0{,}264 + 0{,}385\chi)\,\lambda^{-2}]\,(t/\lambda)^2 + (1{,}029 +\\
&+ 0{,}119\lambda^{-2})\,(t/\lambda)^3 + 0{,}517\,(t/\lambda)^4 + 0{,}215\,(t/\lambda)^5 + O(\lambda^{-6})\\
&(\chi = 0{,}0625\ln\lambda)
\end{aligned}\right\} \qquad (6.7)$$

и малых значениях параметра $\lambda = 2/\ln(b/a)$

$$\left.\begin{aligned}
&K_{\mathrm{I}}(a) = 2p\sqrt{b/\pi}\,\{C/\sqrt{\varepsilon} - (\sqrt{\varepsilon}/\pi)\ln[(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)]\},\\
&K_{\mathrm{I}}(b) = 2p\sqrt{b/\pi}\,\{1 - (C/\pi)\ln[(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)]\},\\
&C = (1/\pi)\,\{2\arccos\varepsilon + \sqrt{1-\varepsilon^2}\ln[(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)]\}/[\arccos\varepsilon +\\
&+ (0{,}3634\varepsilon + 0{,}1715\varepsilon^2 + 0{,}1117\varepsilon^5)\sqrt{1-\varepsilon^2}],\quad \varepsilon = \exp(-2/\lambda),
\end{aligned}\right\} \qquad (6.8)$$

$$\left.\begin{aligned}
K_{\mathrm{I}}(a) &= 4p\sqrt{b}\pi^{-3/2}\varepsilon^{-1/2}\sqrt{1-\varepsilon^2},\\
K_{\mathrm{I}}(b) &= 4p\sqrt{b}\pi^{-3/2}\arccos\varepsilon.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.9)$$

Формулы (6.7) можно использовать при $2 \leqslant \lambda < \infty$, формулы (6.8) — при $0 < \lambda \leqslant 2$, формулы (6.9) — при $0 < \lambda < 0{,}75$.

Числовые значения КИН, полученные методом СИУ [70], приведены также в табл. 6.1. Эти результаты хорошо согласуются с решениями (6.7)—(6.9). Данные по КИН при растяжении бесконечного тела с кольцевой трещиной имеются также в работах [14, 19, 71—73]. Рассматривались задачи о кручении [72, 74] и сдвиге [75] бесконечного тела с кольцевой трещиной, а также о растяжении изотропного пространства с эксцентрической кольцевой трещиной [76, 77]. Кольцевая трещина в трансверсально изотропном теле изучалась в работе [78].

6.4. Бесконечное тело с плоской полубесконечной трещиной

Сосредоточенная нагрузка на поверхностях трещины. Пусть трещина занимает полуплоскость $z = 0$, $y \leqslant 0$. На оси Oy на расстоянии a от края трещины действуют симметричные пары сил P, T_1 и T_2 (рис. 6.17). КИН даются формулами [79]

$$\left.\begin{aligned}
&K_{\mathrm{I}}(A) = \sqrt{2}P\,(a\pi)^{-3/2}/(1 + x^2/a^2) + (1-2\mu)\,2^{-3/2}\pi^{-1/2}\times\\
&\times(1-\mu)^{-1}\,[T_1\,\mathrm{Im}\,\zeta - T_2\,\mathrm{Re}\,\zeta],\\
&K_{\mathrm{II}} = 0,\\
&K_{\mathrm{III}} = 0,\quad \zeta = (a + ix)^{-3/2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.10)$$

Действие симметричной нормальной нагрузки на берегах полубесконечной трещины ($T_1 = T_2 = 0$) рассматривалось также в работах [13, 14, 55, 56, 80—82].

Когда к поверхностям трещины приложены антисимметричные пары сил N, Q_1 и Q_2 (рис. 6.18), то [79]

$$\left.\begin{aligned}
&K_{II}(A) = \sqrt{2}\,(\pi a)^{-3/2}\{4Q_1\mu\,(2-\mu)^{-1}\,(x/a)\,[1+(x/a)^2]^{-2} + \\
&+ Q_2[1+(x/a)^2]^{-1}\{1+(2\mu/(2-\mu))\,[1-(x/a)^2]/[1+(x/a)^2]\}\} - \\
&- N(1-2\mu)\,[2\sqrt{\pi}\,(2-\mu)]^{-1}\,\mathrm{Re}\,\zeta, \\
&K_I = 0, \\
&K_{III}(A) = \sqrt{2}\,(\pi a)^{-3/2}\{Q_1[1+(x/a)^2]^{-1}\{1-(2\mu/(2-\mu))\times \\
&\times[1-(x/a)^2]/[1+(x/a)^2]\} + 4Q_2\mu\,(2-\mu)^{-1}\,(x/a)\times \\
&\times[1+(x/a)^2]^{-2}\} + N(1-2\mu)\,[2\sqrt{\pi}\,(2-\mu)]^{-1}\,\mathrm{Im}\,\zeta.
\end{aligned}\right\} \quad (6.11)$$

Действие антисимметричной сдвигающей нагрузки на берегах полубесконечной трещины ($N = 0$) изучалось также в работах [80—83].

Действие нагрузки на отрезке прямой, параллельной краю трещины. Пусть на отрезке прямой, параллельной краю, на верхней и нижней по-

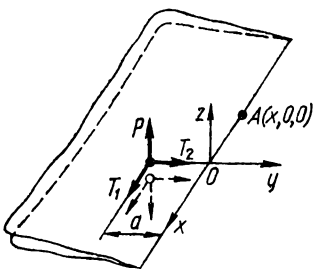


Рис. 6.17. Действие симметричных сосредоточенных сил на поверхности полубесконечной трещины в бесконечном теле.

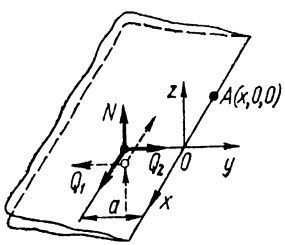


Рис. 6.18. Действие антисимметричных сосредоточенных сил на поверхности полубесконечной трещины в бесконечном теле.

верхностях трещины распределена нормальная и сдвигающая нагрузка (рис. 6.19). КИН получены методом суперпозиции с помощью формул (6.10) и (6.11):

$$\left.\begin{aligned}
&K_I(A) = PC_1/\pi^{3/2}, \\
&K_{II}(A) = (1/\pi^{3/2})\,[QC_1 + (2\mu/(2-\mu))\,(QC_2 + RC_3)], \\
&K_{III}(A) = (1/\pi^{3/2})\,[RC_1 + (2\mu/(2-\mu))\,(RC_2 - QC_3)],
\end{aligned}\right\} \quad (6.12)$$

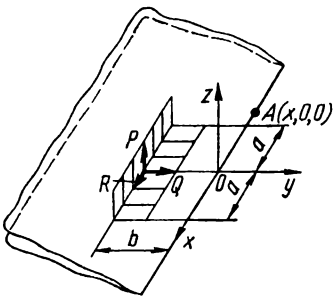
где

$$\left.\begin{aligned}
&C_1 = \sqrt{2/b}\,[\mathrm{arctg}\,((a+x)/b) + \mathrm{arctg}\,((a-x)/b)], \\
&C_2 = \sqrt{2/b}\,[((a+x)/b)/[1+(a+x)^2/b^2] + \\
&+ ((a-x)/b)/[1+(a-x)^2/b^2]], \\
&C_3 = \sqrt{2/b}\,[1/[1+(a+x)^2/b^2] - 1/[1+(a-x)^2/b^2].
\end{aligned}\right\} \quad (6.13)$$

Если длина отрезка $a \to \infty$, то из соотношений (6.12) и (6.13) следуют КИН при плоской и антиплоской деформации тела с полубесконечной трещиной:

$$K_{\mathrm{I}} = \sqrt{2}P/\sqrt{\pi b}, \quad K_{\mathrm{II}} = \sqrt{2}Q/\sqrt{\pi b}, \quad K_{\mathrm{III}} = \sqrt{2}R/\sqrt{\pi b}. \qquad (6.14)$$

Действие нагрузки на отрезке прямой, перпендикулярной краю трещины. Пусть на отрезке $-b \leqslant y \leqslant 0$ оси Oy на верхней и нижней поверх-



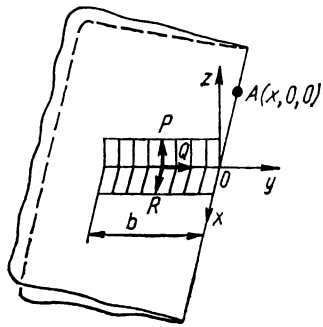


Рис. 6.19. Действие на верхнюю и нижнюю поверхности полубесконечной трещины равной по величине и противоположной по направлению нагрузки на отрезке прямой, параллельной краю трещины.

Рис. 6.20. Действие на верхнюю и нижнюю поверхности полубесконечной трещины равной по величине и противоположной по направлению нагрузки на отрезке прямой, перпендикулярной краю трещины.

ностях трещины распределена нормальная и сдвигающая нагрузка (рис. 6.20). Тогда [3]

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}}(A) &= (1/(2\pi\sqrt{\pi|x|}))\,PH_1, \\ K_{\mathrm{II}}(A) &= (1/(2\pi\sqrt{\pi|x|}))\,[QH_1 + (2\mu/(2-\mu))\,(QH_2 - RH_3)], \\ K_{\mathrm{III}}(A) &= (1/(2\pi\sqrt{\pi|x|}))\,[RH_1 - (2\mu/(2-\mu))\,(RH_2 - QH_3)], \end{aligned}\right\} \qquad (6.15)$$

где

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \ln[(1+\eta-\sqrt{2\eta})/(1+\eta+\sqrt{2\eta})] + 2\operatorname{arctg}(\sqrt{2\eta}+1) + \\ &+ 2\operatorname{arctg}(\sqrt{2\eta}-1), \\ H_2 &= H_1/2 - 2\eta\sqrt{2\eta}/(1+\eta^2), \\ H_3 &= \{(1/2)\ln[(1+\eta-\sqrt{2\eta})/(1+\eta+\sqrt{2\eta})] - \\ &- \operatorname{arctg}(\sqrt{2\eta}+1) - \operatorname{arctg}(\sqrt{2\eta}-1) - \\ &- 2\sqrt{2\eta}/(1+\eta^2)\}\operatorname{sign}(x), \quad \eta = b/|x|. \end{aligned}\right\} \qquad (6.16)$$

При $b \to \infty$ из соотношений (6.15) и (6.16) следует

$$K_{\mathrm{I}}(A) = P/\sqrt{\pi|x|},$$

$$K_{\mathrm{II}}(A) = (1/\sqrt{\pi|x|})\,\{Q + (\mu/(2-\mu))\,[Q + R\operatorname{sign}(x)]\},$$

$$K_{\mathrm{III}}(A) = (1/\sqrt{\pi|x|})\,\{R - \mu/(2-\mu))\,[R + Q\operatorname{sign}(x)]\}.$$

Действие кусочно-постоянной нагрузки на поверхностях трещины. Пусть на верхней и нижней поверхностях полубесконечной трещины на прямоугольной площадке $|x| \leqslant a$ $(-b \leqslant y \leqslant 0)$ действует постоянная нормальная и сдвигающая нагрузка (рис. 6.21). КИН даются выражениями [3]

$$K_{\mathrm{I}}(A) = pF_1/\pi^{3/2},$$

$$K_{\mathrm{II}}(A) = (1/\pi^{3/2})\,[qF_1 + (2\mu/(2-\mu))\,(qF_2 - \tau F_3)],$$

$$K_{\mathrm{III}}(A) = (1/\pi^{3/2})\,[\tau F_1 - (2\mu/(2-\mu))\,(\tau F_2 + qF_3)],$$

где

$$F_1 = \sqrt{|x|+a}\,h_1(b/(|x|+a)) - \operatorname{sign}(|x|-a)\sqrt{||x|-a|}\times$$
$$\times h_1(b/(||x|-a|)),$$

$$F_2 = \sqrt{|x|+a}\,h_2(b/(|x|+a)) -$$
$$-\operatorname{sign}(|x|-a)\sqrt{||x|-a|}\,h_2(b/(||x|-a|)),$$

$$F_3 = \operatorname{sign}(x)\,[\sqrt{|x|+a}\,h_3(b/(|x|+a)) -$$
$$-\sqrt{||x|-a|}\,h_3(b/(||x|-a|))],$$

$$h_1(\eta) = 2\sqrt{2\eta}\operatorname{arctg}(1/\eta) + \ln[(1+\eta-\sqrt{2\eta})/(1+\eta+\sqrt{2\eta})] +$$
$$+ 2\operatorname{arctg}(\sqrt{2\eta}+1) + 2\operatorname{arctg}(\sqrt{2\eta}-1),$$

$$h_2(\eta) = (1/2)\ln[(1+\eta-\sqrt{2\eta})/(1+\eta+\sqrt{2\eta})] +$$
$$+ \operatorname{arctg}(\sqrt{2\eta}+1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2\eta}-1),$$

$$h_3(\eta) = 2\sqrt{2\eta} + (1/2)\ln[(1+\eta-\sqrt{2\eta})/(1+\eta+\sqrt{2\eta})] -$$
$$-\operatorname{arctg}(\sqrt{2\eta}+1) - \operatorname{arctg}(\sqrt{2\eta}-1).$$

Действие сосредоточенных сил во внутренних точках тела с трещиной. Пусть поверхности трещины свободны от нагрузки, а в двух симметричных точках $(0, 0, a)$ и $(0, 0, -a)$ действуют растягивающие силы P

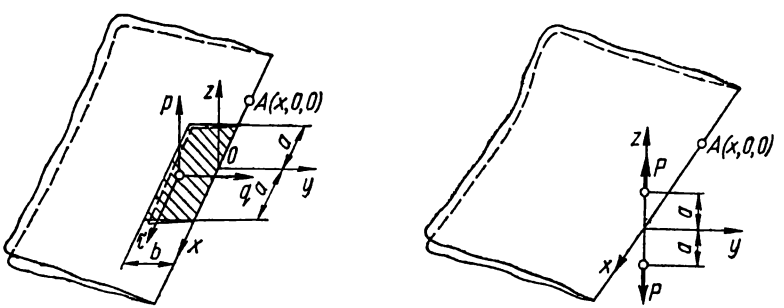


Рис. 6.21. Действие постоянной нагрузки на прямоугольной площадке верхней и нижней поверхностей полубесконечной трещины.

Рис. 6.22. Растяжение бесконечного тела с полубесконечной трещиной двумя сосредоточенными силами.

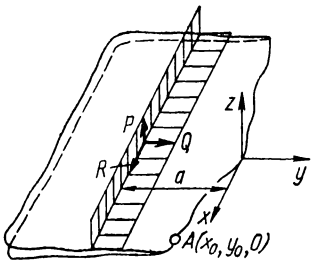


Рис. 6.23. Действие на верхнюю и нижнюю поверхности полубесконечной трещины с синусоидальным краем нагрузки, распределенной по бесконечной прямой.

(рис. 6.22). КИН равны [3]

$$K_{\mathrm{I}}(A) = \{P/[4(1-\mu)(\pi a)^{3/2}]\} \times$$
$$\times (1 + x^2/a^2)^{-1} [7 - 4\mu -$$
$$- 4(x/a)^2/(1 + x^2/a^2)],$$
$$K_{\mathrm{II}} = 0, \quad K_{\mathrm{III}} = 0.$$

Полубесконечная трещина с синусоидальным краем. Пусть в бесконечном теле в плоскости $z = 0$ имеется полубесконечная трещина с синусоидальным краем (рис. 6.23), уравнение которого имеет вид

$$y = B[\cos(2\pi x/\lambda) - 1],$$

где B — амплитуда и λ — длина волны волнового края трещины. Поверхности трещины загружены силами, действующими на прямой $y = -a$. Асимптотическое решение задачи при малых значениях параметра $\varepsilon = B/\lambda$ имеет вид [84]

$$K_{\mathrm{I}}(A) = (P/\sqrt{\pi})\sqrt{2/[a + B(\cos(2\pi x_0/\lambda) - 1)]} + O(\varepsilon^2),$$

$$K_{\mathrm{II}}(A) = (1/\sqrt{\pi})\sqrt{2/[a + B(\cos(2\pi x_0/\lambda) - 1)]} \times$$
$$\times \{R + \varepsilon Q[2\pi \sin(2\pi x_0/\lambda)]\} + O(\varepsilon^2),$$

$$K_{\mathrm{III}}(A) = (1/\sqrt{\pi})\sqrt{2/[a + B(\cos(2\pi x_0/\lambda) - 1)]} \times$$
$$\times \{Q - \varepsilon R[2\pi \sin(2\pi x_0/\lambda)]\} + O(\varepsilon^2).$$

При $\varepsilon \to 0$ отсюда следуют формулы (6.14) для полубесконечной трещины с прямолинейным краем.

6.5. Бесконечное тело с внешней круговой трещиной

Действие нормальной осесимметричной нагрузки на поверхностях трещины. Пусть в плоскости $z = 0$ внешняя круговая трещина занимает область $a \leqslant r < \infty$ (рис. 6.24). На поверхностях трещины задана нагрузка $\sigma_z^{\pm} = p(r)$, $\tau_{rz}^{\pm} = 0$, $\tau_{\theta z}^{\pm} = 0$ $(a \leqslant r < \infty)$, а напряжения на бесконечности отсутствуют. КИН даются формулами [16, 85, 86]

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}} &= -\frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_a^{\infty} \frac{r p(r)\, dr}{\sqrt{r^2 - a^2}} - \frac{2}{a\sqrt{\pi a}} \int_a^{\infty} \arccos(a/r)\, r p(r)\, dr, \\ K_{\mathrm{II}} &= K_{\mathrm{III}} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (6.18)$$

Если же в кольцевой области $a \leqslant r \leqslant b$ на поверхностях трещины действует постоянная нагрузка σ, а вне ее напряжения отсутствуют, т. е. $p(r) = -\sigma\eta(b - r)$ ($\eta(r)$ — функция Хевисайда), то [16]

$$K_{\mathrm{I}} = \sigma(\pi b^2)(\pi a)^{-3/2}[\arccos(a/b) + (a/b)\sqrt{1 - (a/b)^2}],$$
$$K_{\mathrm{II}} = K_{\mathrm{III}} = 0.$$

Когда сосредоточенные растягивающие силы P равномерно распределены по окружности радиуса b ($b > a$), т. е. $p(r) = -P\delta(r-b)$, то [16, 85, 86]

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}} &= P(2\pi b)(\pi a)^{-3/2}\left[\arccos(a/b) + a/\sqrt{b^2-a^2}\right], \\ K_{\mathrm{II}} &= K_{\mathrm{III}} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.18)$$

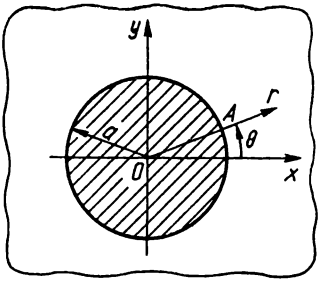


Рис. 6.24. Сечение бесконечного тела с внешней круговой трещиной вдоль плоскости трещины.

Отсюда при $b \to \infty$ и $P(2\pi b) = R = \mathrm{const}$ получаем решение задачи, когда растягивающие силы R приложены на бесконечности.

В ряде работ [3, 6, 80, 87] приведено решение (6.17) без второго слагаемого, вследствие чего полученные на его основе реультаты типа (6.18) не удовлетворяют последнему условию при предельном переходе. Такие решения соответствуют случаю неподвижной бесконечно удаленной точки.

Действие осесимметричной радиальной касательной нагрузки на поверхностях трещины. Пусть на поверхностях внешней круговой трещины (см. рис. 6.24) задана нагрузка $\sigma_z^{\pm} = 0$, $\tau_{\theta z}^{\pm} = 0$, $\tau_{rz}^{\pm} = q(r)$ $(a \leqslant r < \infty)$, а напряжения на бесконечности отсутствуют. КИН даются выражениями [3]

$$K_{\mathrm{II}} = -2\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_a^{\infty}\frac{q(r)\,dr}{\sqrt{r^2-a^2}}, \quad K_{\mathrm{I}} = 0, \quad K_{\mathrm{III}} = 0.$$

Когда в кольцевой области $a \leqslant r \leqslant b$ действует постоянная нагрузка q, а вне ее напряжения отсутствуют, т. е. $q(r) = -q\eta(b-r)$, то [3]

$$K_{\mathrm{II}} = 2q\sqrt{a/\pi}\ln\left(b/a + \sqrt{b^2/a^2-1}\right), \quad K_{\mathrm{I}} = 0, \quad K_{\mathrm{III}} = 0.$$

Действие осесимметричной крутящей нагрузки на поверхностях трещины. Пусть на берегах трещины (см. рис. 6.24) задана нагрузка $\sigma_z^{\pm} = \tau_{rz}^{\pm} = 0$, $\tau_{\theta z}^{\pm} = \tau(r)$ $(a \leqslant r < \infty)$, а напряжения на бесконечности отсутствуют. КИН равны [86]

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{III}} &= -2\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_a^{\infty}\frac{\tau(r)\,dr}{\sqrt{r^2-a^2}} - \frac{3}{2a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\int_a^{\infty}\left[r^2 + \frac{2}{\pi}r^2 \times\right. \\ &\left.\times \arcsin\frac{a}{r} - \frac{2}{\pi}a\sqrt{r^2-a^2}\right]\tau(r)\,dr, \\ K_{\mathrm{I}} &= 0, \quad K_{\mathrm{II}} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.19)$$

Когда тангенциальные сосредоточенные силы Q равномерно распределены по окружности радиуса b ($b > a$), т. е. $\tau(r) = -Q\delta(r-b)$, то [86]

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{III}} &= Q(2\pi b)(a/b)/[\pi\sqrt{\pi a(b^2-a^2)}] + Q(2\pi b)(3/4)\,a^{-2} \times \\ &\times (\pi a)^{-1/2}[b + (2b/\pi)\arcsin(a/b) - (2/\pi)(a/b)\sqrt{b^2-a^2}], \\ K_{\mathrm{I}} &= 0, \quad K_{\mathrm{II}} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.20)$$

Отсюда при $b \to \infty$ и $Q(2\pi b)\ b = M_z = \text{const}$ получаем решение задачи, когда крутящий момент M_z действует на бесконечности. В работах [3, 7] приведено решение (6.19) без второго слагаемого, вследствие чего полученные на их основе результаты типа (6.20) не удовлетворяют последнему условию при предельном переходе. Такие решения соответствуют случаю отсутствия вращения на бесконечности.

Неосесимметричная нагрузка на поверхностях трещины. Пусть поверхности трещины (см. рис. 6.24) раскрываются под действием двух нормальных сосредоточенных сил R, приложенных на оси Ox на расстоянии b ($b > a$) от центра перешейка, т. е. $\sigma_z^{\pm} = -(R/b)\,\delta(r-b)\,\delta(\theta)$, $\tau_{rz}^{\pm} = 0$, $\tau_{\theta z}^{\pm} = 0$ ($a \leqslant r < \infty$). Тогда КИН даются формулами [16]

$$\left.\begin{aligned} &K_{\mathrm{I}}(A) = [R/(\pi a)^{3/2}]\,[\arccos(a/b) + a\sqrt{b^2-a^2}/(a^2+b^2- \\ &-2ab\cos\theta)], \\ &K_{\mathrm{II}} = 0,\quad K_{\mathrm{III}} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.21)$$

Когда в двух симметричных точках (b, 0, 0) и ($-b$, 0, 0), на оси Ox действуют симметричные радиальные сдвигающие силы Q, т. е. $\sigma_z^{\pm} = 0$, $\tau_{\theta z}^{\pm} = 0$, $\tau_{rz}^{\pm} = \mp Q\delta(r-b)\,[\delta(\theta) + \delta(\theta-\pi)]$ ($a \leqslant r < \infty$), то КИН равны [86]

$$\left.\begin{aligned} &K_{\mathrm{I}}(A) = \{Q(1-2\mu)/[2\pi b\sqrt{\pi a}\,(1-\mu)]\}\,\mathrm{Re}\,\{2-[1/(1-\zeta)]\,[1+ \\ &+\sqrt{\zeta/(1-\zeta)}\,\operatorname{arctg}\sqrt{\zeta/(1-\zeta)}] - [1/(1+\zeta)]\,[1- \\ &-\sqrt{\zeta/(1+\zeta)}\,\operatorname{arctg}\sqrt{\zeta/(1-\zeta)}]\}, \\ &K_{\mathrm{II}} = 0,\quad K_{\mathrm{III}} = 0,\quad \zeta = (a/b)\exp(i\theta). \end{aligned}\right\} \qquad (6.22)$$

Пусть на поверхностях трещины (см. рис. 6.24) задана сдвигающая нагрузка $\sigma_z^{\pm} = 0$, $\tau_{xz}^{\pm} = -q\,(a/r)^5$, $\tau_{yz}^{\pm} = 0$ ($a \leqslant r < \infty$). КИН определяются соотношениями [88]

$$K_{\mathrm{II}}(A) = (^{16}/_{9})\,q\sqrt{a/\pi}\cos\theta,$$

$$K_{\mathrm{III}}(A) = -(^{16}/_{9})\,q\sqrt{a/\pi}\sin\theta,\quad K_{\mathrm{I}} = 0.$$

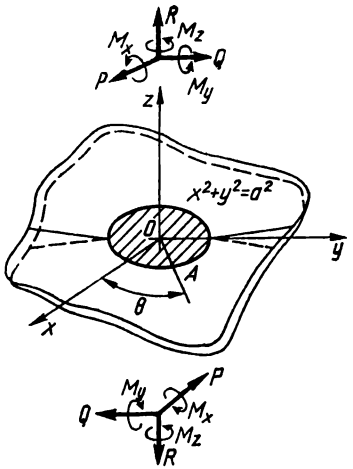
Соотношения (6.21) и (6.22) соответствуют случаю, когда на бесконечности допускаются перемещения, однако отсутствуют вращения. Имеется также решение [86] при отсутствии ограничений на перемещения и вращение на бесконечности. В работах [2, 3, 6, 55, 87, 89] приведены КИН при неподвижной бесконечно удаленной точке.

Действие сосредоточенных сил во внутренних точках тела. Пусть на оси Oz на расстоянии c от плоскости свободной от нагрузки внешней круговой трещины (см. рис. 6.24) действуют вдоль оси Oz две равные по величине, но противоположные по направлению сосредоточенные растягивающие силы R. КИН даются формулами [9, 16]

$$K_{\mathrm{I}} = [R/(\pi a)^{3/2}]\,\{\operatorname{arctg}(c/a) + [ac/(a^2+c^2)]\,[1- \\ -a^2(1-\mu)^{-1}(a^2+c^2)^{-1}]\},\quad K_{\mathrm{II}} = 0,\quad K_{\mathrm{III}} = 0.$$

При $c \to \infty$ отсюда следует решение задачи, когда растягивающие силы R приложены на бесконечности. В работах [3, 90—92] приведены выра-

Рис. 6.25. Бесконечное тело с внешней круговой трещиной при действии нагрузки на бесконечности.



жения для КИН при допущении, что бесконечно удаленная точка неподвижна; эти решения не удовлетворяют последнему условию при предельном переходе.

Действие нагрузки на бесконечности. Пусть поверхности трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности приложены изгибающие моменты M_x, M_y, M_z и сила с составляющими P, Q, R (рис. 6.25). В этом случае КИН равны [3, 10, 93]

$$K_{\mathrm{I}}(A) = R/(2a\sqrt{\pi a}) + \\ + [3/(2a^2\sqrt{\pi a})]\,(M_x \sin\theta - M_y \cos\theta),$$

$$K_{\mathrm{II}}(A) = [1/(2a\sqrt{\pi a})]\,(P\cos\theta + Q\sin\theta),$$

$$K_{\mathrm{III}}(A) = 3M_z/(4a^2\sqrt{\pi a}) - [1/(2a\sqrt{\pi a})]\,(P\sin\theta - Q\cos\theta).$$

Данные по КИН при действии нагрузки на бесконечности имеются также в работах [8, 16, 94, 95].

Рассматривалось также упругое равновесие трансверсально-изотропного тела с внешней круговой трещиной [91].

6.6. Бесконечное тело с внешними плоскими трещинами различной формы

Внешняя эллиптическая трещина. Пусть в плоскости $z = 0$ внешняя трещина занимает область $x^2/a^2 + y^2/b^2 \geqslant 1$ (рис. 6.26). Поверхности трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности приложены сила с составляющими P, Q, R и изгибающие моменты M_x, M_y и M_z. КИН определяются по формулам [3]

$$K_{\mathrm{I}}(A) = (1/2)\,(\pi ab)^{-1/2}\,[R + 3\,(M_x/b)\sin\varphi - \\ - 3\,(M_y/a)\cos\varphi]\,(a^2\sin\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{-1/4},$$

$$K_{\mathrm{II}}(A) = (1/2)\,(\pi ab)^{-1/2}\,[Pb\cos\varphi + Qa\sin\varphi - \\ - (C_1 + C_2)\,M_z \sin\varphi\cos\varphi]\,(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{-3/4},$$

$$K_{\mathrm{III}}(A) = (1/2)\,(\pi ab)^{-1/2}\,[-Pa\sin\varphi + Qb\cos\varphi + \\ + M_z\,(C_1\,(a/b)\sin^2\varphi - C_2\,(b/a)\cos^2\varphi)]\,(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{-3/4},$$

где

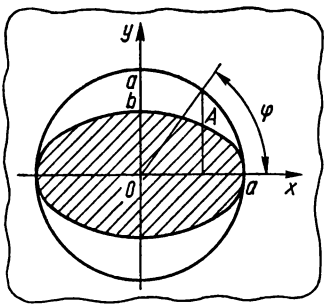
$$C_1 = 3k'^2\,\{[k^2 - 2\mu\,(1 + k'^2)]\,K(k) - (k^2 - 4\mu)\,E(k)\}/[4\mu k'^2\,(1 + \\ + k'^2)\,K(k) - (k^4 + 8\mu k'^2)\,E(k)],$$

$$C_2 = 3\,\{k'^2\,[k^2 + 2\mu\,(1 + k'^2)]\,K(k) - (k^2 + 4\mu k'^2)\,E(k)\}/[4\mu k^2\,(1 + \\ + k'^2)\,K(k) - (k^4 + 8\mu k'^2)\,E(k)],$$

$K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы с модулем $k = \sqrt{1-(b/a)^2}$, $k' = b/a$.

Данные по КИН для внешней эллиптической трещины имеются также в работах [94, 96, 97]. Рассматривалось также упругое равновесие бесконечного тела с внешней трещиной, контуром которой является кривая Ламе [97] или овал [98].

Плоская трещина вне двух круговых перешейков. Пусть тело ослаблено плоской внешней трещиной, находящейся вне двух круговых перешейков радиусом a (рис. 6.27). Поверхности трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности тело растягивается усилиями с главным



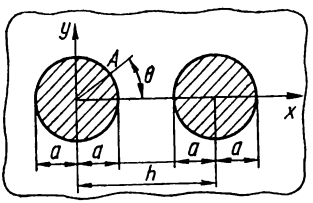


Рис. 6.26. Сечение бесконечного тела с внешней эллиптической трещиной вдоль плоскости трещины.

Рис. 6.27. Сечение бесконечного тела с внешней трещиной вне двух круговых перешейков вдоль плоскости трещины.

вектором $2P$ в направлении, перпендикулярном плоскости трещины. Асимптотические формулы для КИН при большом относительном расстоянии между перешейками имеют вид [19, 99, 100]

$$K_I(A) = [P/(2a\sqrt{\pi a})]\,[1 - (2/\pi)\,\varepsilon + (4/\pi^2)\,(1 - \pi\cos\theta)\,\varepsilon^2 - (4/\pi^3)\,(2 + \pi^2/3 - 2\pi\cos\theta + \pi^2\cos 2\theta)]/(1 - 0{,}636\varepsilon + 0{,}406\varepsilon^2 - 0{,}468\varepsilon^3) + O(\varepsilon^4),$$

$$K_{II} = 0, \quad K_{III} = 0, \quad \varepsilon = a/h.$$

Плоская трещина вне четырех круговых перешейков. Пусть тело ослаблено плоской внешней трещиной, находящейся вне четырех круговых перешейков. Радиусы перешейков одинаковы и равны a, их центры расположены в вершинах квадрата со стороной h (рис. 6.28). На бесконечности тело растягивается усилиями с главным вектором $4P$ в направлении, перпендикулярном плоскости трещины. Асимптотические формулы для КИН при большом относительном расстоянии между перешейками имеют вид [19]

$$K_I(A) = [P/(2a\sqrt{\pi a})]\,[1 - 1{,}7234\varepsilon + (4{,}4419 - 2{,}6237\cos\theta - 1{,}7234\sin\theta)\,\varepsilon^2 - (4{,}5816 - 2{,}9701\cos\theta)\,\varepsilon^3]/(1 - 1{,}7234\varepsilon + 2{,}9701\varepsilon^2 - 4{,}7661\varepsilon^3) + O(\varepsilon^4),$$

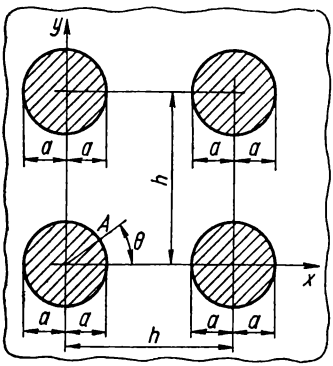
$$K_{II} = 0, \quad K_{III} = 0, \quad \varepsilon = a/h.$$

Плоская трещина вне периодической системы круговых перешейков. Пусть трещина в бесконечном теле расположена вне периодической системы круговых перешейков радиуса a, центры которых расположены на

одной прямой на расстоянии h один от другого (рис. 6.29). На бесконечности тело растягивается распределенной нагрузкой, главный вектор которой в полосе периодов равен P. Асимптотические формулы для КИН при большом относительном расстоянии между перешейками имеют вид [19, 100]

$$K_{\mathrm{I}}(A) = [P/(2a\sqrt{\pi a})]\,[1 + 1{,}530\varepsilon^3\,(0{,}666 - 3\cos^2\theta + \sin^2\theta) +$$
$$+ 1{,}310\varepsilon^5\,(2{,}325 - 5\cos^4\theta - 2{,}333\cos^2\theta + 10\cos^2\theta\sin^2\theta -$$
$$- \sin^4\theta - 3{,}333\sin^2\theta)] + O(\varepsilon^6),$$
$$K_{\mathrm{II}} = 0, \quad K_{\mathrm{III}} = 0, \quad \varepsilon = a/h.$$

Плоская трещина вне двоякопериодической системы круговых перешейков. Пусть тело ослаблено плоской трещиной, находящейся вне двоякопериодической системы круговых перешейков радиуса a, центры которых образуют квадратную решетку (рис. 6.30). На бесконечности тело растягивается распределенной нагрузкой, главный вектор которой в квадрате периодов равен P. Асимптоти-



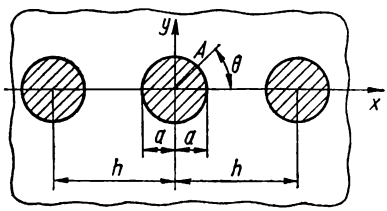


Рис. 6.28. Сечение бесконечного тела с внешней трещиной вне четырех круговых перешейков вдоль плоскости трещины.

Рис. 6.29. Сечение бесконечного тела с внешней трещиной вне периодической системы круговых перешейков вдоль плоскости трещины.

ческие формулы для КИН при большом относительном расстоянии между перешейками имеют вид [19, 100]

$$K_{\mathrm{I}}(A) = [P/(2a\sqrt{\pi a})]\,[1 - 0{,}240\lambda^3 - (0{,}323 + 0{,}101\cos^4\theta -$$
$$- 0{,}606\cos^2\theta\sin^2\theta)\,\lambda^5] + O(\lambda^6),$$
$$K_{\mathrm{II}} = 0, \quad K_{\mathrm{III}} = 0, \quad \lambda = 2a/h.$$

Плоская трещина вне кольцевого перешейка. Пусть два полупространства соединены между собой кольцевым перешейком, внутренний и внешний радиусы которого равны a и b ($b > a$), т. е. тело ослаблено системой внутренней и внешней круговых компланарных трещин (рис. 6.31). На бесконечности заданы растягивающие усилия с главным вектором P, направленным по оси геометрической и силовой симметрии. Асимптотические формулы для КИН при малых значениях параметра $\varepsilon = a/b$ имеют вид [19, 97]

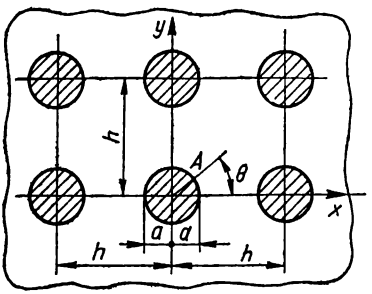
$$K_{\mathrm{I}}(A) = (P/2)\,(\pi b)^{-3/2}\sqrt{\varepsilon}\,[1 + 0{,}334\varepsilon^2 + 0{,}044\varepsilon^2 + 0{,}2\varepsilon^4]/(1 -$$
$$- 0{,}135\varepsilon^3 - 0{,}055\varepsilon^5) + O(\varepsilon^{11/2}),$$

$$K_I(B) = [P/(2b\sqrt{\pi b})]\,[1 + (4/3)\,\pi^{-2}\varepsilon^3\,(1 + 0{,}8\varepsilon^2)]/(1 - $$
$$- 0{,}135\varepsilon^3 - 0{,}055\varepsilon^5) + O(\varepsilon^6).$$

Когда на поверхностях внутренней круговой трещины действует постоянное давление интенсивностью σ, а на поверхностях внешней трещины (рис. 6.31) и на бесконечности напряжения отсутствуют, то асимптотические выражения для КИН будут [19]

$$K_I(A) = 2\sigma\sqrt{a/\pi}\,[1 + 4\varepsilon^2/(9\pi^2) + 32\varepsilon^5/(75\pi^2)] + O(\varepsilon^6),$$

$$K_I(B) = (4/3)\,\sigma\sqrt{b/\pi}\varepsilon^3\,[1 + 0{,}6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3/(9\pi^2)] + O(\varepsilon^7).$$



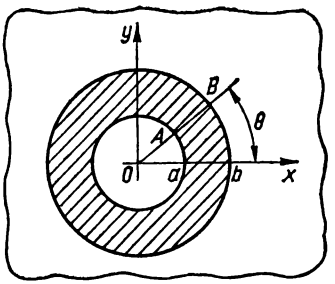


Рис. 6.30. Сечение бесконечного тела с внешней трещиной вне двоякопериодической системы круговых перешейков вдоль плоскости трещины.

Рис. 6.31. Сечение бесконечного тела с плоской трещиной вне кольцевого перешейка вдоль плоскости трещины.

Данные по КИН для плоской трещины вне кольцевого перешейка имеются также в работе [92]. Рассматривался также случай плоской трещины, расположенной вне концентрических кругового и кольцевого перешейков [19].

6.7. Бесконечное тело с системой плоских трещин

Система компланарных трещин. Пусть тело ослаблено двумя круговыми трещинами радиусов a_1 и a_2, размещенными в одной плоскости $z = 0$ (рис. 6.32). Поверхности трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности тело растягивается однородными усилиями $\sigma_z^\infty = \sigma$. Значения КИН, полученные методом массовых сил [101], приведены в табл. 6.2. На основе этих данных для КИН $K_I(B)$ построена аппроксимационная формула [101]

$$K_I(B) = \sigma\sqrt{\pi a_1}\,[0{,}6366 + \lambda\,(-0{,}0037 + 0{,}1741\varepsilon - 0{,}0366\varepsilon^2 -$$
$$- 0{,}0016\varepsilon^3) + \lambda^2\,(0{,}0126 - 0{,}6444\varepsilon + 0{,}1351\varepsilon^2 + 0{,}0052\varepsilon^3) +$$
$$+ \lambda^3\,(-0{,}0119 + 0{,}6082\varepsilon - 0{,}0932\varepsilon^2 - 0{,}0145\varepsilon^3)],$$
$$\varepsilon = a_2/a_1, \quad \lambda = (a_1 + a_2)/e \qquad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}8).$$

Выполняются предельные соотношения

$$K_I(B) \to (2/\pi)\,\sigma\sqrt{\pi a_1} \quad \text{при} \quad a_2/a_1 \to 0,$$

$$K_I(B) \to (2/\pi)\,[1 + (2/\pi)\,(\lambda/\sqrt{1-\lambda^2} - \arcsin\lambda)]\,\sigma\sqrt{\pi a_1}$$

$$\text{при} \quad a_1/a_2 \to 0, \quad \lambda = a_2/l.$$

В случае двух равных трещин ($a_1 = a_2 = a$) известны асимптотические формулы для КИН при больших относительных расстояниях между трещинами [19, 102]:

$$K_I(D) = 2\sigma\,(a/\pi)^{1/2}\,[1 + \lambda^3\,(12\pi)^{-1}\,(1 + \lambda\cos\theta)] + O(\lambda^5), \quad \lambda = 2a/e.$$

Данные по КИН для системы компланарных круговых трещин имеются в работах [103—106]. Изучалось также взаимодействие эллиптических компланарных трещин [19, 105, 107, 108].

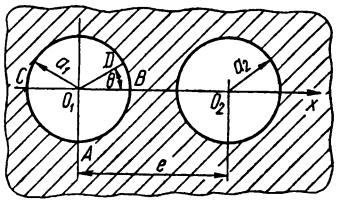


Рис. 6.32. Сечение бесконечного тела с двумя компланарными круговыми трещинами вдоль плоскости трещин.

Система параллельных трещин. Пусть тело ослаблено двумя параллельными эллиптическими трещинами с полуосями a и b. Поверхности трещин свободны от нагрузок, а на бесконечности тело находится под действием растягивающих усилий, направленных перпендикулярно плоскостям трещин. Значения КИН K_I, полученные методом массовых сил [101], приведены в табл. 6.3. Отметим, что значения КИН K_{II} и K_{III} невелики, причем $K_{III} < K_{II}$. На основе данных табл. 6.3 построена аппроксимационная формула [101]

$$K_I(B) = \sigma\sqrt{\pi b}\,[0{,}6843 - 0{,}0727\varepsilon - 0{,}4530\varepsilon^2 + 0{,}2899\varepsilon^3 +$$

Таблица 6.2. Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi a_1}) = F_I$ в точках A, B и C при растяжении бесконечного пространства с двумя компланарными круговыми трещинами [101]

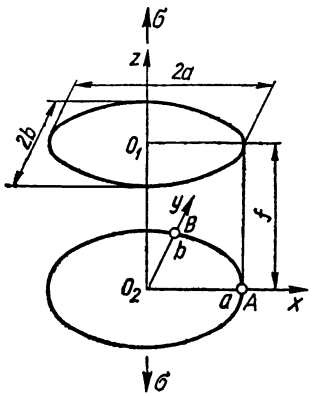
a_1/a_2	$(a_1+a_2)/e$ = 0,5			0,7			0,8		
	$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_I(C)$	$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_I(C)$	$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_I(G)$
0	0,658	0,658	0,658	0,720	0,720	0,720	0,801	0,801	0,801
0,25	0,647	0,650	0,645	0,669	0,687	0,661	0,692	0,737	0,675
0,5	0,642	0,645	0,641	0,653	0,672	0,648	0,664	0,707	0,653
0,7	0,640	0,643	0,639	0,647	0,664	0,643	0,654	0,693	0,647
0,9	0,639	0,642	0,638	0,644	0,658	0,641	0,648	0,682	0,643
1,0	0,639	0,641	0,638	0,643	0,656	0,640	0,646	0,678	0,642
1/0,9	0,638	0,640	0,638	0,642	0,654	0,640	0,645	0,674	0,641
1/0,7	0,638	0,639	0,637	0,640	0,650	0,639	0,642	0,666	0,639
2,0	0,637	0,638	0,637	0,638	0,645	0,638	0,639	0,656	0,638
4,0	0,637	0,637	0,637	0,637	0,639	0,637	0,638	0,644	0,637
∞	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637

Таблица 6.3. **Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi b}) = F_I$ в точках A и B при растяжении бесконечного пространства с двумя параллельными эллиптическими трещинами [101]**

$f/2b$	b/a							
	0,25		0,5		0,75		1,0	
	$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_I(A)$	$F_I(B)$
0,25	0,393	0,687	0,464	0,613	0,488	0,548	0,494	0,494
0,5	0,421	0,723	0,500	0,650	0,525	0,585	0,532	0,532
0,75	0,435	0,756	0,522	0,683	0,553	0,619	0,562	0,562
1,0	0,443	0,787	0,537	0,714	0,573	0,648	0,585	0,585
1,5	0,451	0,838	0,556	0,763	0,598	0,685	0,612	0,612
2,0	0,455	0,872	0,566	0,790	0,611	0,703	0,624	0,624
5,0	0,464	0,925	0,582	0,822	0,625	0,722	0,636	0,636

$$+\delta(0{,}2027 - 0{,}2254\varepsilon + 0{,}5482\varepsilon^2 - 0{,}3233\varepsilon^3) +$$
$$+\delta^2(-0{,}0473 + 0{,}1200\varepsilon - 0{,}3186\varepsilon^2 + 0{,}1722\varepsilon^3) +$$
$$+\delta^3(0{,}0038 - 0{,}0156\varepsilon + 0{,}0414\varepsilon^2 - 0{,}0215\varepsilon^3)]$$
$$(0 \leqslant \varepsilon = b/a \leqslant 1, \quad 0{,}25 \leqslant \delta = f/(2b) \leqslant 5).$$

В этой же работе изучалось взаимодействие сдвинутых параллельных эллиптических трещин. В случае растяжения тела с двумя параллельными



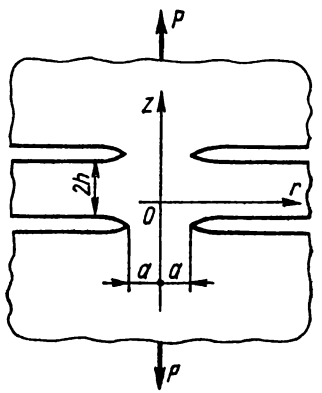


Рис. 6.33. Растяжение бесконечного тела с двумя параллельными равными эллиптическими трещинами.

Рис. 6.34. Сечение бесконечного тела с двумя внешними круговыми трещинами координатной плоскостью $\varphi = 0$.

круговыми трещинами (рис. 6.33; $a = b$) для КИН известны асимптотические формулы при больших относительных расстояниях между трещинами [3, 5, 6]:

$$K_I = 2\sigma\sqrt{a/\pi}\,[1 - (^2/_3)\,\pi^{-1}\lambda^3 + O(\lambda^5)], \quad \lambda = 2a/f,$$

$$K_{II} = -(^2/_3)\,\sigma\pi^{-1}\sqrt{a/\pi}\,[\lambda^2 - (^4/_5)\,\lambda^4 + O(\lambda^6)].$$

Данные по КИН для двух параллельных круговых трещин имеются также в работах [80, 103, 109].

Пусть бесконечное тело ослаблено двумя внешними круговыми трещинами радиусом a, которые находятся в параллельных плоскостях. Тело отнесено к цилиндрической системе координат $Or\varphi z$ так, что плоскость $z = 0$ параллельна плоскостям расположения трещин, а ось Oz проходит через центры трещин. На бесконечности приложены растягивающие усилия, главный вектор которых P направлен вдоль оси Oz (рис. 6.34). Асимптотические формулы для КИН при большом относительном расстоянии между трещинами имеют вид [19]

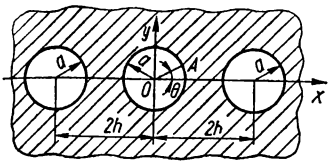


Рис. 6.35. Сечение бесконечного тела с периодической системой компланарных круговых трещин плоскостью $z = 0$.

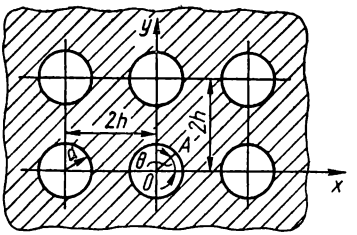


Рис. 6.36. Сечение бесконечного тела с двоякопериодической системой компланарных круговых трещин плоскостью $z = 0$.

$$K_{\mathrm{I}} = [P/(2a\sqrt{\pi a})]\,[1 - 0{,}1670\varepsilon^3 - 0{,}0104\varepsilon^4 + 0{,}2432\varepsilon^5 - 0{,}0229\varepsilon^6 + O(\varepsilon^7)], \quad \varepsilon = a/(2h),$$

$$K_{\mathrm{II}} = [P/(2a\sqrt{\pi a})]\,\varepsilon^2\,[0{,}2412 - 0{,}0071\varepsilon + 0{,}0852\varepsilon^3 + 0{,}3595\varepsilon^4 + O(\varepsilon^5)],$$

$$K_{\mathrm{III}} = 0.$$

Периодическая система дискообразных трещин. Пусть в плоскости $z = 0$ размещена периодическая система круговых трещин радиуса a, центры которых расположены на одной прямой с периодом $2h$ (рис. 6.35). На бесконечности тело находится под действием растягивающих усилий $\sigma_z^{\infty} = \sigma$. Асимптотические формулы для КИН при больших относительных расстояниях между трещинами имеют вид [19, 110]

$$K_{\mathrm{I}}(A) = 2\sigma\sqrt{a/\pi}\,\{1 + (2/\pi)\,[0{,}1002\varepsilon^3 + 0{,}0194\varepsilon^5 + 0{,}0064\varepsilon^6 + 0{,}0042\varepsilon^7 + (0{,}1296 + 0{,}0709\varepsilon^2)\,\varepsilon^5\cos^2\theta - (0{,}0324 + 0{,}0118\varepsilon^2)\,\varepsilon^5\sin^2\theta + 0{,}0787\varepsilon^7\cos^4\theta + 0{,}0098\varepsilon^7\sin^4\theta - 0{,}1181\varepsilon^7\sin^2\theta\cos^2\theta + (0{,}1296\varepsilon^5 + 0{,}0709\varepsilon^7)\,(1/15 - (7/15)\cos^2\theta) - (0{,}0324\varepsilon^5 + 0{,}0118\varepsilon^7)\,(1/15 - (7/15)\sin^2\theta) + 0{,}0787\varepsilon^7\,(7/315 - (16/315)\cos^2\theta - (29/63)\cos^4\theta) + 0{,}0098\varepsilon^7\,(7/315 + (16/315)\sin^2\theta - (29/63)\sin^4\theta) - 0{,}1181\varepsilon^7\,(1/63 - (29/63)\cos^2\theta\sin^2\theta)]\} + O(\varepsilon^8), \quad \varepsilon = a/h.$$

Аналогичные результаты в случае периодической системы круговых трещин, центры которых расположены на прямой, составляющей произволь-

ный угол с плоскостью трещин, при действии на берегах трещин постоянной нормальной и касательной нагрузки приведены в работе [111].

Двоякопериодическая система дискообразных трещин. Пусть в плоскости $z = 0$ имеется двоякопериодическая система трещин радиуса a, центры которых расположены в узлах некоторой квадратной сетки с делением $2h$ (рис. 6.36). На бесконечности тело растягивается усилиями σ, направленными перпендикулярно плоскости трещин. Асимптотические формулы для КИН при больших относительных расстояниях между трещинами имеют вид [19, 110]

$$K_I(A) = 2\sigma\sqrt{a/\pi}\,\{1 + 0{,}2393\varepsilon^3 + 0{,}0810\varepsilon^5 + 0{,}0574\varepsilon^6 +$$

$$+ \varepsilon^7[0{,}0035 + 0{,}0557(\cos^4\theta + \sin^4\theta) + 0{,}0142\cos^2\theta\sin^2\theta]\} +$$

$$+ O(\varepsilon^8), \quad \varepsilon = a/h.$$

Данные по КИН для квадратной решетки круговых компланарных трещин имеются также в работе [112]. Рассматривались также случаи двоякопериодической системы компланарных круговых трещин, центры которых расположены в узлах прямоугольной [113], треугольной [113] или шестиугольной [19, 110] сетки.

6.8. Полубесконечное пространство с трещинами

Параллельные граничной поверхности плоские трещины. Пусть в плоскости, параллельной границе полупространства, размещена дискообразная трещина (рис. 6.37). На берегах трещины задано постоянное давление $\sigma_z^{\pm} = -\sigma$, а граница полупространства свободна от нагрузки. Асимптотические формулы для КИН при большом удалении трещины от границы имеют вид [114]

$$K_I = 2\sigma\sqrt{a/\pi}\,[1 + 0{,}5303(a/h)^3 - 0{,}8909(a/h)^5 +$$

$$+ 0{,}2812(a/h)^6 + 1{,}2272(a/h)^7 - 0{,}7846(a/h)^8] + O(a/h)^9,$$

$$K_{II} = 2\sigma\sqrt{a/\pi}\,[0{,}3325(a/h)^4 - 0{,}6981(a/h)^6 + 0{,}1763(a/h)^7 +$$

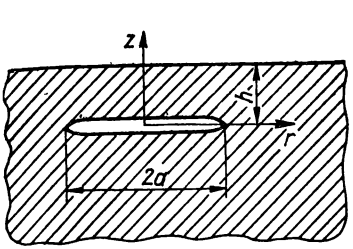
$$+ 1{,}0771(a/h)^8 - 0{,}3797(a/h)^9] + O(a/h)^{10}, \quad K_{III} = 0.$$

Известны также значения КИН $K_I = K_0F_I$ и $K_{II} = K_0F_{II}$ ($K_0 = 2\sigma\sqrt{a/\pi}$), найденные с помощью численного решения интегральных уравнений рассматриваемой задачи [114]:

h/a	1,05	1,1	1,2	1,3	1,6667	2,5	5,0
F_I	1,2042	1,1863	1,1561	1,1320	1,0759	1,0275	1,0040
F_{II}	0,0900	0,0822	0,0640	0,0514	0,0248	0,0082	0,0006

Ниже приведены числовые значения КИН $K_I = K_0F_I$ и $K_{II} = K_0F_{II}$ ($K_0 = 2\sigma\sqrt{a/\pi}$) при $\mu = 1/3$, полученные методом интегральных уравнений [115], для случая, когда круговая трещина (см. рис. 6.37) под давлением находится в полупространстве с жестко защемленной граничной поверхностью:

h/a	1,05	1,1	1,2	1,3	1,6667	2,5	5,0
F_I	0,9082	0,9138	0,9234	0,9323	0,9549	0,9842	0,9974
F_{II}	0,0730	0,0683	0,0598	0,0524	0,0330	0,0015	0,0003



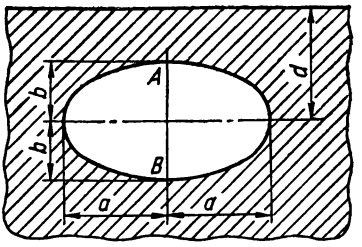
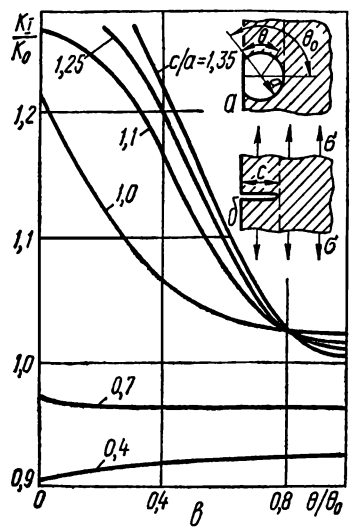


Рис. 6.37. Сечение полубесконечного пространства с дискообразной трещиной координатной плоскостью $\varphi = 0$.

Рис. 6.38. Сечение полубесконечного пространства с перпендикулярной его границе внутренней эллиптической трещиной вдоль плоскости трещины.



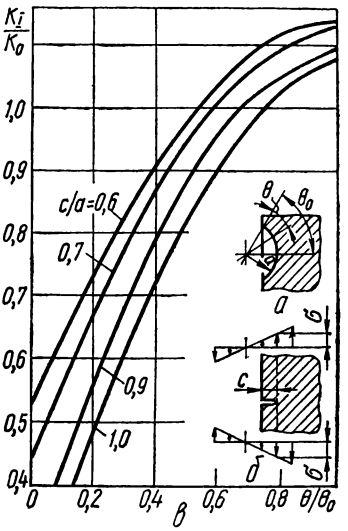


Рис. 6.39. Сечения полубесконечного пространства с краевой трещиной в форме части круга вдоль плоскости трещины (*а*) и перпендикулярной ей плоскостью симметрии (*б*) и изменение КИН K_I/K_0 ($K_0 = 2\sigma\sqrt{a/\pi}$) вдоль фронта трещины при растяжении на бесконечности (*в*) [134, 135].

Рис. 6.40. Сечения полубесконечного пространства с краевой трещиной в форме части круга вдоль плоскости трещины (*а*) и перпендикулярной ей плоскостью симметрии (*б*) и изменение КИН K_I/K_0 ($K_0 = 4\sigma\sqrt{a/\pi}/3$) вдоль фронта трещины при действии на бесконечности линейно распределенной растягивающей нагрузки (*в*) [134, 135].

Пусть полупространство со свободным краем ослаблено плоской круговой трещиной (см. рис. 6.37), когда к ближнему от границы полупространства берегу трещины приложена осесимметричная нормальная нагрузка, а на втором берегу трещины напряжения отсутствуют. Значения КИН, полученные методом интегральных уравнений [116], приведены в табл. 6.4.

Таблица 6.4. **Значения КИН $K_I = K_0 F_I$ и $K_{II} = -K_0 F_{II}$ при действии на бе распределенной нагрузки p ($K_0 = \pi p \sqrt{a}$) или приложенной в центре трещи**

μ	8,0		4,0		2,0	
	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
					Равномерно распреде	
0	0,181	0,0706	1,187	0,0711	0,210	0,0754
1/6	0,181	0,0565	0,187	0,0570	0,211	0,0616
0,3	0,182	0,0404	0,188	0,0410	0,212	0,0457
0,5	0,182	0,0001	0,189	0,0008	0,216	0,0061
					Сосредото	
0	0,0919	0,0706	0,100	0,0712	0,141	0,0778
1/6	0,0920	0,0565	0,100	0,0572	0,142	0,0639
0,3	0,0921	0,0404	0,101	0,0411	0,144	0,0480
0,5	0,0924	0,0001	0,102	0,0009	0,147	0,0084

Таблица 6.5. **Значения КИН $K_I(A) = 2p\sqrt{b/\pi}\,F(A)$ и $K_I(B) = 2p$ эллиптической трещиной ($\mu = 0{,}3$) [124]**

$\frac{b}{a}$	0		0,3		0,5	
	$F(A)$	$F(B)$	$F(A)$	$F(B)$	$F(A)$	$F(B)$
0	1,571	1,571	1,614	1,602	1,714	1,655
0,125	1,535	1,535	1,565	1,555	1,652	1,598
0,2	1,495	1,495	1,518	1,510	1,592	1,546
0,25	1,465	1,465	1,483	1,477	1,550	1,507
0,4	1,365	1,365	1,376	1,372	1,423	1,392
0,5	1,297	1,297	1,305	1,302	1,343	1,317
0,6	1,231	1,231	1,237	1,235	1,267	1,246
0,75	1,137	1,137	1,142	1,140	1,163	1,147
1,0	1,000	1,000	1,003	1,002	1,016	1,006

Данные по КИН для дискообразной трещины в полупространстве имеются также в работах [117—120]. Изучались также четыре параллельные дискообразные трещины [121] и внешняя круговая трещина [122, 123].

Перпендикулярные граничной поверхности плоские внутренние трещины. Пусть в плоскости, перпендикулярной границе полупространства, расположена эллиптическая трещина (рис. 6.38). Берега трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности тело находится под действием растягивающих усилий p, направленных нормально к плоскости трещины. Значения КИН, полученные модифицированным методом массовых сил [124], приведены в табл. 6.5. На основе этих данных для КИН построены также аппроксимационные формулы [124]

$$K_I(A) = 2p\sqrt{b/\pi}\,[1{,}5733 - 0{,}2636\varepsilon - 0{,}8051\varepsilon^2 +$$

жнем от границы полупространства берегу круговой трещины равномерно ны сосредоточенной силы P ($K_0 = P/a^{3/2}$) [116]

h/a							
1,0		0,5		0,3		0,2	
F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
ленная нагрузка							
0,286	0,101	0,493	0,200	0,821	0,388	1,297	0,691
0,289	0,0878	0,498	0,188	0,826	0,377	1,303	0,681
0,293	0,0728	0,503	0,174	0,833	0,364	1,309	0,670
0,301	0,0350	0,516	0,139	0,848	0,333	1,326	0,641
ченная сила							
0,308	0,131	0,780	0,403	1,576	0,973	2,794	1,888
0,311	0,118	0,784	0,391	1,581	0,962	2,800	1,878
0,314	0,103	0,790	0,377	1,588	0,950	2,806	1,867
0,322	0,0654	0,803	0,342	1,603	0,918	2,823	1,838

$\sqrt{b/\pi}\,F(B)$ при растяжении полупространства с внутренней

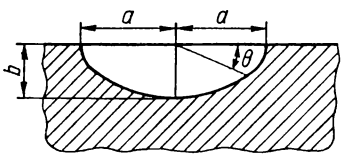
b/d					
0,6		0,7		0,8	
$F(A)$	$F(B)$	$F(A)$	$F(B)$	$F(A)$	$F(B)$
1,805	1,693	1,944	1,739	2,179	1,801
1,733	1,629	1,860	1,667	2,075	1,715
1,664	1,572	1,776	1,604	1,965	1,644
1,616	1,531	1,719	1,559	1,894	1,595
1,473	1,407	1,553	1,427	1,692	1,451
1,384	1,329	1,451	1,344	1,570	1,362
1,301	1,255	1,358	1,266	1,460	1,281
1,189	1,154	1,233	1,162	1,314	1,172
1,033	1,009	1,062	1,014	1,119	1,020

$$+ 0{,}4964\varepsilon^3 + \lambda\,(0{,}3238 - 0{,}6953\varepsilon + 0{,}8849\varepsilon^2 - 0{,}4163\varepsilon^3) +$$
$$+ \lambda^2\,(-1{,}1887 + 1{,}3824\varepsilon - 1{,}2401\varepsilon^2 + 0{,}5707\varepsilon^3) +$$
$$+ \lambda^3\,(2{,}1729 - 2{,}0798\varepsilon + 0{,}2480\varepsilon^2 + 0{,}3357\varepsilon^3)],$$
$$K_I(B) = 2p\sqrt{b/\pi}\,[1{,}5739 - 0{,}2639\varepsilon - 0{,}8056\varepsilon^2 +$$
$$+ 0{,}4968\varepsilon^3 + \lambda\,(0{,}0408 - 0{,}4013\varepsilon + 0{,}7657^2 - 0{,}4010\varepsilon^3) +$$
$$+ \lambda^2\,(0{,}1595 + 0{,}3690\varepsilon - 1{,}3921\varepsilon^2 + 0{,}8604\varepsilon^3) +$$
$$+ \lambda^3\,(0{,}1882 - 0{,}7773\varepsilon + 1{,}2263\varepsilon^2 - 0{,}5995\varepsilon^3)],$$
$$\varepsilon = b/a, \quad \lambda = b/d \quad (0 \leqslant b/a \leqslant 1, \quad 0 \leqslant b/d \leqslant 0{,}8).$$

Данные по КИН при растяжении полупространства с внутренней эллиптической трещиной имеются также в работах [125—131].

Рассматривался также случай, когда берега эллиптической трещины нагружены линейно распределенными нормальными усилиями [125, 126, 132]. В работах [129, 133] изучалось растяжение полупространства с внутренней прямоугольной трещиной.

Плоские краевые трещины. Пусть в плоскости, перпендикулярной граничной поверхности, размещена краевая трещина в форме части круга. Берега трещины и граница полупространства свободны от нагрузки, а на бесконечности действуют равномерно (рис. 6.39, *а*, *б*) или линейно (рис. 6.40, *а*, *б*) распределенные растягивающие усилия. Изменение КИН K_I вдоль фронта трещины, полученное методом последовательных приближений [134], приведено на рис. 6.39, *в* и 6.40, *в*. Данные по КИН для краевой полукруговой трещины ($c/a = 1$) имеются также в работах [134—139].



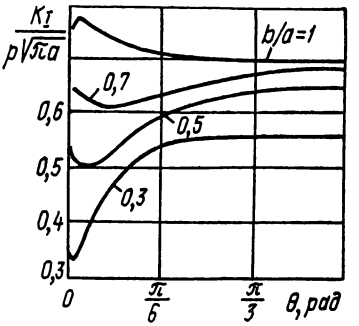
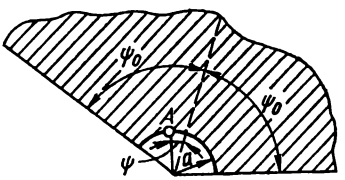


Рис. 6.41. Сечение полупространства с краевой полуэллиптической трещиной вдоль плоскости трещины.

Рис. 6.42. Изменение КИН $K_I/(p\sqrt{\pi a})$ вдоль фронта краевой полуэллиптической трещины в полупространстве при действии растягивающих усилий на бесконечности ($\mu = 0{,}3$) [140].

Пусть полупространство ослаблено краевой полуэллиптической трещиной (рис. 6.41). Берега трещины и граница полупространства свободны от нагрузки, а на бесконечности действуют постоянные растягивающие усилия p в направлении, перпендикулярном плоскости трещины. Изменение КИН K_I вдоль фронта трещины, полученное методом СИУ [140], показано на рис. 6.42. Отметим, что в месте выхода трещины на свободную поверх-



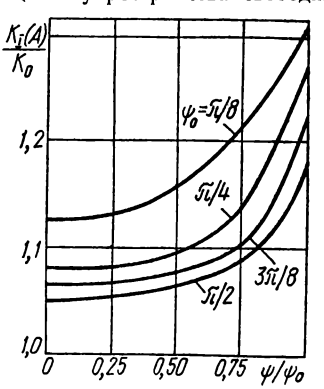


Рис. 6.43. Сечение бесконечного клина с поперечной угловой трещиной в форме кругового сектора вдоль плоскости трещины.

Рис. 6.44. Изменение КИН $K_I(A)/K_0$ ($K_0 = 2\sigma\sqrt{a/\pi}$) вдоль фронта угловой трещины в бесконечном клине при действии на бесконечности растягивающих усилий.

ность полупространства ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$) сингулярность напряжений на фронте трещины ниже, чем во внутренних точках ($0 < \theta < \pi$) [141]. Вследствие этого КИН K_I в этих точках равен нулю, однако при удалении от границы полупространства K_I быстро возрастает и достигает в некоторой точке, близкой к краю полупространства, максимального значения [140]. Данные по КИН для краевой полуэллиптической трещины имеются также в работах [126, 128, 139, 142—150]. Исследовалось взаимодействие двух компланарных краевых полуэллиптических трещин [151], а также изучалась краевая полуэллиптическая трещина, неортогональная к границе полупространства [152]. Рассматривались также краевые прямоугольные трещины [148, 153].

Плоская трещина в клине. Пусть в бесконечном клине имеется плоская краевая трещина в форме кругового сектора, расположенная ортогонально ребру клина (рис. 6.43). Берега трещины и грани клина свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы постоянные растягивающие усилия σ. Задача решена приближенно при использовании аппроксимационных зависимостей для перемещений в работе [154]. Изменение КИН вдоль фронта трещины показано на рис. 6.44.

Данные по КИН для четверти пространства ($\psi_0 = \pi/4$) с угловой трещиной имеются также в работах [155—159]. Рассматривались также задачи для четверти пространства с плоской внутренней трещиной [160].

6.9. Бесконечный слой с трещинами

Трещина в срединной плоскости. Пусть плоская круговая трещина радиуса a расположена в срединной плоскости слоя. К берегам трещины приложена нормальная нагрузка интенсивности σ (рис. 6.45). Асимптотическое решение задачи при большой относительной толщине слоя $\lambda = h/a$ имеет вид [161]

$$K_I = 2\sigma\sqrt{a/\pi}\,(1 + c_0\lambda^{-3} + 9{,}6c_1\lambda^{-5} + c_0^2\lambda^{-6}) + O(\lambda^{-7}). \qquad (6.23)$$

Коэффициенты c_0 и c_1 в зависимости от граничных условий на гранях слоя имеют следующие значения:

1) грани слоя свободны от нагрузок

$$c_0 = 0{,}906, \quad c_1 = -0{,}179;$$

2) на гранях слоя все смещения равны нулю

$$c_0 = -0{,}824, \quad c_1 = 0{,}115 \quad (\mu = 0{,}3);$$

3) слой зажат между двумя гладкими жесткими основаниями, силы трения между основаниями и слоем отсутствуют (нормальное смещение и касательные напряжения на гранях слоя равны нулю)

$$c_0 = -0{,}512, \quad c_1 = 0{,}0585.$$

Асимптотические значения КИН для слоя малой относительной толщины определяются по следующим формулам:

1) грани слоя свободны от нагрузки [162]

$$\left.\begin{aligned} &K_I = \sigma\sqrt{12h}\,(0{,}1267 + 0{,}6733\lambda^{-1} + 0{,}5\lambda^{-2} + C),\\ &C = (0{,}0104 - 0{,}1267\lambda^{-1} - 0{,}3367\lambda^{-2} - 0{,}1667\lambda^{-3}) \times\\ &\times\,(0{,}6733 + \lambda^{-1})^{-1}; \end{aligned}\right\} \qquad (6.24)$$

2) смещения на гранях слоя равны нулю [161]

$$K_I = \sigma \sqrt{(1-2\mu)\,h}/(1-\mu); \tag{6.25}$$

3) нормальное смещение и касательные напряжения на гранях слоя равны нулю [163]

$$K_I = \sigma \sqrt{h}. \tag{6.26}$$

Относительная погрешность формулы (6.23) при $2 \leqslant \lambda < \infty$ и формул (6.24) — (6.26) при $\lambda \leqslant 2$ не превышает 1 %.

Данные по КИН для слоя с дискообразной трещиной имеются также в работах [80, 164—167]. Рассматривались также случаи эллиптической

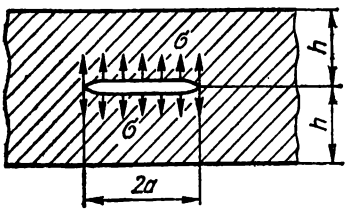


Рис. 6.45. Бесконечный слой с дискообразной трещиной в срединной плоскости при действии на ее берегах постоянного давления.

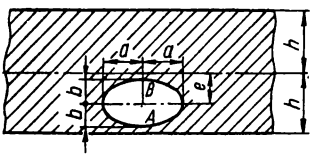


Рис. 6.46. Сечение бесконечного слоя с внутренней поперечной эллиптической трещиной вдоль плоскости трещины.

[168], прямоугольной [168], кольцевой [169] и внешней круговой [19, 170] трещин в срединной плоскости изотропного слоя. Трансверсально изотропный слой с трещинами изучался в работах [169, 171, 172].

Внутренняя трещина в перпендикулярной граням плоскости. Пусть в плоскости, перпендикулярной граням слоя, имеется эллиптическая трещина (рис. 6.46). Грани слоя и берега трещины свободны от нагрузки, а на

Таблица 6.6. **Значения КИН $K_I(A)/K_0 = F_I(A)$ для бесконечного слоя с центральной ($e = 0$) поперечной эллиптической трещиной при действии растягивающих усилий на бесконечности $\mu = 0{,}3$ [124]**

$\frac{b}{a}$	b/h						
	0	0,1	0,3	0,5	0,6	0,7	0,8
0	1,000	1,006	1,058	1,187	1,303	1,488	1,816
0,125	1,000	1,002	1,034	1,124	1,207	1,335	1,550
0,25	1,000	1,001	1,021	1,088	1,153	1,253	1,420
0,5	1,000	1,000	1,010	1,050	1,093	1,157	1,269
0,75	1,000	1,000	1,006	1,032	1,060	1,105	1,187
1,0	1,000	1,000	1,004	1,022	1,041	1,075	1,137

бесконечности действуют растягивающие усилия σ в направлении, нормальном к плоскости трещины. Значения КИН $K_I = K_0 F_I$, полученные модифицированным методом массовых сил [124], приведены в табл. 6.6 и 6.7. Здесь K_0 — КИН $K_I(A)$ для эллиптической трещины в бесконечном про-

странстве, определяемый по формулам

$$\left.\begin{aligned} K_0 &= \sigma\sqrt{\pi b}/\Phi, \quad \Phi = E(k), \quad k = \sqrt{1-b^2/a^2} \quad (b \leqslant a), \\ \Phi &= (b/a)\,E(k'), \quad k' = \sqrt{1-a^2/b^2} \quad (b > a), \end{aligned}\right\} \tag{6.27}$$

где $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

На основании данных табл. 6.6 построена аппроксимационная формула [124]

$$K_I(A) = K_0\,[1{,}0000 + \lambda\,(0{,}1786 - 0{,}0396\varepsilon - 0{,}8255\varepsilon^2 + 0{,}8897\varepsilon^3) + \lambda^2\,(-0{,}6985 - 0{,}3101\varepsilon + 3{,}3302\varepsilon^2 - 3{,}1085\varepsilon^3) + \lambda^3\,(1{,}9715 - 2{,}4531\varepsilon + 0{,}0386\varepsilon^2 + 1{,}3748\varepsilon^3)]$$

$$(\mu = 0{,}3; \quad 0{,}125 \leqslant \varepsilon = b/a \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \lambda = b/h \leqslant 0{,}8),$$

относительная погрешность которой не превышает 1 %.

Таблица 6.7. **Значения КИН $K_I(A)/K_0 = F_I(A)$ и $K_I(B)/K_0 = F_I(B)$ для бесконечного слоя с эксцентрической поперечной эллиптической трещиной при действии растягивающих усилий на бесконечности ($\mu = 0{,}3$) [124]**

$\frac{b}{a}$	$\frac{e}{h}$	$b/(h-e) = 0{,}5$		$b/(h-e) = 0{,}7$		$b/(h-e) = 0{,}8$	
		$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_I(A)$	$F_I(B)$
0,25	0	1,088	1,088	1,253	1,253	1,420	1,420
	0,125	1,079	1,054	1,236	1,135	1,399	1,198
	0,25	1,074	1,042	1,224	1,100	1,382	1,143
	0,5	1,067	1,035	1,202	1,081	1,343	1,114
	1,0	1,058	1,029	1,173	1,065	1,293	1,089
0,5	0	1,050	1,050	1,157	1,157	1,269	1,269
	0,125	1,045	1,028	1,148	1,077	1,259	1,116
	0,25	1,042	1,021	1,142	1,054	1,251	1,078
	0,5	1,039	1,018	1,132	1,043	1,232	1,061
	1,0	1,035	1,015	1,119	1,036	1,211	1,050
1,0	0	1,022	1,022	1,075	1,075	1,137	1,137
	0,125	1,020	1,011	1,072	1,032	1,135	1,050
	0,25	1,019	1,008	1,071	1,021	1,133	1,031
	0,5	1,018	1,007	1,067	1,016	1,126	1,023
	1,0	1,016	1,006	1,062	1,014	1,119	1,020

Данные по КИН для слоя с поперечной эллиптической трещиной имеются также в работах [173—175].

Прямоугольная сквозная трещина. Пусть в бесконечном слое в перпендикулярной граням плоскости имеется сквозная прямоугольная трещина (рис. 6.47). Берега трещины и грани слоя свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы растягивающие напряжения $\sigma_x^\infty = \sigma$. Значения КИН по толщине слоя, полученные МКЭ [176], приведены в табл. 6.8.

Данные по КИН для слоя (толстой пластины) со сквозной трещиной имеются также в работах [55, 177, 178].

Поверхностные трещины. Пусть бесконечный слой ослаблен поверхностной полуэллиптической трещиной (рис. 6.48). Берега трещины и грани слоя свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы растягивающие

Таблица 6.8. **Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$ при растяжении бесконечного**

z/h	$l/h=2$			$l/h=4$			
	$\mu=0$	$\mu=0{,}3$	$\mu=0{,}45$	$\mu=0$	$\mu=0{,}3$	$\mu=0{,}45$	$\mu=0$
0/32	1,000	1,044	1,089	1,000	1,041	1,096	1,001
8/32	1,000	1,044	1,076	1,000	1,041	1,095	1,001
16/32	1,000	1,043	1,098	1,000	1,038	1,091	1,001
24/32	1,000	1,042	1,082	1,000	1,026	1,062	1,001
26/32	1,000	1,039	1,085	1,000	1,018	1,045	1,001
28/32	1,000	1,029	1,076	1,000	1,010	1,027	1,001
30/32	1,000	1,006	1,016	1,000	0,996	0,989	1,001
31/32	1,000	0,988	0,998	1,000	0,990	0,986	1,001
32/32	1,000	0,967	0,885	1,000	0,980	0,943	1,001

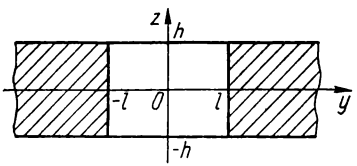
напряжения $\sigma_z^\infty = \sigma$ и изгибающий момент $M_x^\infty = M$. Значения КИН, полученные с помощью МКЭ [179, 180], приведены в табл. 6.9.

В случае растяжения по данным табл. 6.9 построена аппроксимационная формула [175, 179]

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi b/Q_0}F_I\,(b/a,\ b/t,\ \theta)\quad (0\leqslant b/a\leqslant 2,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,$$

$b/t < 1{,}25\,(b/a + 0{,}6)$ при $0\leqslant b/a\leqslant 0{,}2$, $b/t\leqslant 1$ при $0{,}2\leqslant b/a\leqslant 2$),

где $F_I = [M_1 + M_2\,(b/t)^2 + M_3\,(b/t)^4]\,gf$.



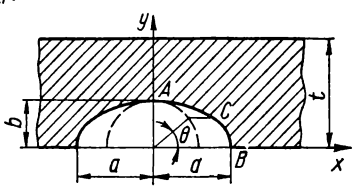


Рис. 6.47. Сечение бесконечного слоя с прямоугольной сквозной трещиной плоскостью $x = 0$.

Рис. 6.48. Сечение бесконечного слоя с поверхностной полуэллиптической трещиной плоскостью $z = 0$.

При $b/a \leqslant 1$

$$\left.\begin{aligned} &M_1 = 1{,}13 - 0{,}09\,(b/a),\quad M_2 = -0{,}54 + 0{,}89/(0{,}2 + b/a),\\ &M_3 = 0{,}5 - 1/(0{,}65 + b/c) + 14\,(1 - b/c)^{24},\\ &g = 1 + [0{,}1 + 0{,}35\,(b/t)^2]\,(1 - \sin\theta)^2,\\ &f = [(b/a)^2\cos^2\theta + \sin^2\theta]^{1/4},\quad Q_0 = 1 + 1{,}464\,(b/a)^{1{,}65}. \end{aligned}\right\} \quad (6.28)$$

При $b/a > 1$

$$\left.\begin{aligned} &M_1 = \sqrt{a/b}\,(1 + 0{,}04a/b),\quad M_2 = 0{,}2\,(a/b)^4,\\ &M_3 = -0{,}11\,(a/b)^4,\quad g = 1 + [0{,}1 + 0{,}35\,(a/b)\,(b/t)^2]\,(1 - \sin\theta)^2,\\ &f = [(a/b)^2\sin^2\theta + \cos^2\theta]^{1/4},\quad Q_0 = 1 + 1{,}464\,(a/b)^{1{,}65}. \end{aligned}\right\} \quad (6.29)$$

слоя с прямоугольной сквозной трещиной [176]

$l/h=8$		$l/h=16$			$l/h=\infty$		
$\mu=0{,}3$	$\mu=0{,}45$	$\mu=0$	$\mu=0{,}3$	$\mu=0{,}45$	$\mu=0$	$\mu=0{,}3$	$\mu=0{,}45$
1,045	1,102	1,001	1,046	1,104	1,001	1,047	1,107
1,044	1,100	1,001	1,045	1,102	1,001	1,046	1,104
1,040	1,094	1,001	1,041	1,095	1,001	1,041	1,096
1,025	1,060	1,001	1,025	1,060	1,001	1,024	1,059
1,017	1,041	1,001	1,016	1,040	1,001	1,015	1,038
1,007	1,022	1,001	1,006	1,019	1,001	1,004	1,017
0,992	0,982	1,001	0,990	0,978	1,001	0,988	0,973
0,985	0,977	1,001	0,983	0,972	1,001	0,980	0,967
0,974	0,931	1,001	0,971	0,925	1,001	0,968	0,919

Данные табл. 6.9 получили подтверждение в работе [150], где применялся модифицированный метод объемных сил. В этой же работе построены аппроксимационные формулы для КИН в максимально углубленной точке поверхностной полуэллиптической трещины (см. рис. 6.48) при растяжении:

$$K_{\mathrm{I}}(A)=\sigma\sqrt{\pi b}\,[1{,}1362-0{,}3927\varepsilon-0{,}3454\varepsilon^2+0{,}2623\varepsilon^3+$$
$$+\lambda(-0{,}2179+0{,}2354\varepsilon+0{,}3773\varepsilon^2-0{,}4189\varepsilon^3)+$$
$$+\lambda^2(5{,}0486-16{,}7939\varepsilon+19{,}9861\varepsilon^2-8{,}0212\varepsilon^3)+$$
$$+\lambda^3(-2{,}6383+8{,}6007\varepsilon-9{,}6332\varepsilon^2+3{,}5118\varepsilon^3)]$$
$$(\mu=0{,}3,\quad 0{,}125\leqslant\varepsilon=b/a\leqslant 1,\quad 0\leqslant\lambda=b/t\leqslant 0{,}6)$$

и изгибе

$$K_{\mathrm{I}}(A)=\sigma_b\sqrt{\pi b}\,[1{,}1359-0{,}3929\varepsilon-0{,}3440\varepsilon^2+0{,}2613\varepsilon^3+$$
$$+\lambda(-1{,}5184+0{,}4178\varepsilon+0{,}7846\varepsilon^2-0{,}6329\varepsilon^3)+$$
$$+\lambda^2(4{,}3721-13{,}9152\varepsilon+16{,}2550\varepsilon^2-6{,}4894\varepsilon^3)+$$
$$+\lambda^3(-3{,}9502+12{,}5334\varepsilon-14{,}6137\varepsilon^2+5{,}8110\varepsilon^3)]$$
$$(\sigma_b=6M/t^2,\quad \mu=0{,}3,\quad 0{,}125\leqslant\varepsilon=b/a\leqslant 1,\quad 0\leqslant\lambda=b/t\leqslant 0{,}6).$$

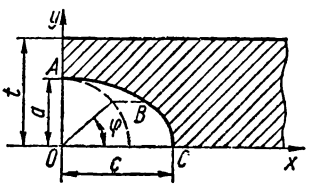


Рис. 6.49. Сечение полубесконечного слоя с поперечной угловой трещиной в форме четверти эллипса плоскостью $z=0$.

Данные по КИН для слоя с поверхностной полуэллиптической трещиной имеются также в работах [126, 132, 139, 145, 149, 156, 157, 174, 180—191]. Рассматривалось также взаимодействие двух компланарных полуэллиптических трещин, выходящих на одну [192] или две [193] грани слоя.

Угловая трещина в полубесконечном слое. Пусть в полубесконечном слое имеется плоская краевая трещина в форме четверти эллипса, расположенная ортогонально ребру (рис. 6.49). Берега трещины и грани слоя свободны от нагрузки, а на бесконечности действуют растягивающие усилия σ. Значения КИН $K_{\mathrm{I}}(B)/\sigma\sqrt{\pi a/Q_0}$ вдоль фронта трещины, полученные

Таблица 6.9. Значения КИН $K_1(c)/K_0$ при растяжении ($K_0 = \sigma\sqrt{\pi b}/\Phi$, где Φ определяется формулами (6.27)) и изгибе ($K_0 = \sigma_b\sqrt{\pi b}/\Phi$, $\sigma_b = 6M/t^2$) бесконечного слоя с поверхностной полуэллиптической трещиной ($\mu = 0{,}3$) [179, 180]

$\frac{b}{a}$	$\frac{2\theta}{\pi}$	Растяжение				Изгиб			
		b/t				b/t			
		0,2	0,4	0,6	0,8	0,2	0,4	0,6	0,8
0,2	0	0,617	0,724	0,899	1,190	0,572	0,629	0,701	0,787
	0,125	0,650	0,775	0,953	1,217	0,583	0,625	0,669	0,722
	0,250	0,754	0,883	1,080	1,345	0,648	0,655	0,669	0,686
	0,375	0,882	1,009	1,237	1,504	0,728	0,693	0,678	0,656
	0,500	0,990	1,122	1,384	1,657	0,787	0,716	0,672	0,601
	0,625	1,072	1,222	1,501	1,759	0,825	0,728	0,649	0,521
	0,750	1,128	1,297	1,581	1,824	0,847	0,731	0,619	0,427
	0,875	1,161	1,344	1,627	1,846	0,859	0,730	0,595	0,351
	1,000	1,173	1,359	1,642	1,851	0,862	0,729	0,586	0,321
0,4	0	0,767	0,896	1,080	1,318	0,705	0,755	0,798	0,838
	0,125	0,781	0,902	1,075	1,285	0,698	0,719	0,732	0,742
	0,250	0,842	0,946	1,113	1,297	0,722	0,695	0,667	0,634
	0,375	0,923	1,010	1,179	1,327	0,759	0,685	0,617	0,532
	0,500	0,998	1,057	1,247	1,374	0,789	0,672	0,565	0,426
	0,625	1,058	1,136	1,302	1,408	0,809	0,658	0,511	0,323
	0,750	1,103	1,184	1,341	1,437	0,822	0,644	0,462	0,224
	0,875	1,129	1,214	1,363	1,446	0,828	0,633	0,428	0,150
	1,000	1,138	1,225	1,370	1,447	0,830	0,629	0,416	0,123
0,6	0	0,916	1,015	1,172	1,353	0,838	0,851	0,862	0,868
	0,125	0,919	1,004	1,149	1,304	0,817	0,799	0,779	0,753
	0,250	0,942	1,009	1,142	1,265	0,803	0,740	0,676	0,604
	0,375	0,982	1,033	1,160	1,240	0,803	0,694	0,587	0,464
	0,500	1,024	1,062	1,182	1,243	0,803	0,653	0,504	0,331
	0,625	1,059	1,093	1,202	1,245	0,802	0,616	0,430	0,213
	0,750	1,087	1,121	1,218	1,260	0,801	0,588	0,370	0,112
	0,875	1,104	1,139	1,227	1,264	0,800	0,570	0,331	0,041
	1,000	1,110	1,145	1,230	1,264	0,800	0,564	0,317	0,015
1,0	0	1,174	1,229	1,355	1,464	1,076	1,029	1,003	0,964
	0,125	1,145	1,206	1,321	1,410	1,021	0,956	0,894	0,821
	0,250	1,105	1,157	1,256	1,314	0,942	0,839	0,729	0,607
	0,375	1,082	1,126	1,214	1,234	0,880	0,740	0,584	0,414
	0,500	1,067	1,104	1,181	1,193	0,831	0,655	0,458	0,241
	0,625	1,058	1,088	1,153	1,150	0,792	0,583	0,353	0,099
	0,750	1,053	1,075	1,129	1,134	0,765	0,528	0,273	—0,010
	0,875	1,050	1,066	1,113	1,118	0,748	0,494	0,224	—0,080
	1,000	1,049	1,062	1,107	1,112	0,742	0,482	0,207	—0,104
2,0	0	0,821	0,848	0,866	0,876	0,759	0,720	0,683	0,648
	0,125	0,794	0,818	0,833	0,839	0,709	0,648	0,587	0,526
	0,250	0,740	0,759	0,771	0,775	0,626	0,531	0,439	0,349
	0,375	0,692	0,708	0,716	0,717	0,552	0,429	0,310	0,193
	0,500	0,646	0,659	0,664	0,661	0,486	0,343	0,202	0,063
	0,625	0,599	0,609	0,610	0,607	0,429	0,273	0,119	—0,034
	0,750	0,552	0,560	0,560	0,554	0,379	0,221	0,062	—0,098
	0,875	0,512	0,519	0,519	0,513	0,343	0,189	0,030	—0,132
	1,000	0,495	0,501	0,501	0,496	0,329	0,176	0,019	—0,141

Таблица 6.10. **Значения КИН $K_I(B)/\sigma\sqrt{\pi a/Q_0}$ при растяжении полубесконечного слоя с плоской угловой трещиной в форме четверти эллипса ($\mu = 0{,}3$) [175]**

a/c	$2\varphi/\pi$	a/t			a/c	$2\varphi/\pi$	a/t		
		0,2	0,5	0,8			0,2	0,5	0,8
0,2	0	0,555	0,761	1,288	1,0	0	1,162	1,275	1,487
	0,125	0,633	0,840	1,340		0,125	1,111	1,207	1,378
	0,25	0,753	0,988	1,522		0,25	1,079	1,160	1,290
	0,375	0,871	1,141	1,705		0,375	1,064	1,134	1,219
	0,5	0,973	1,277	1,850		0,5	1,059	1,121	1,180
	0,625	1,055	1,397	2,008		0,625	1,063	1,123	1,191
	0,75	1,115	1,495	2,118		0,75	1,078	1,140	1,231
	0,875	1,159	1,580	2,263		0,875	1,109	1,176	1,301
	1,0	1,156	1,610	2,450		1,0	1,159	1,233	1,416
0,4	0	0,791	0,990	1,397	2,0	0	0,800	0,826	0,862
	0,125	0,774	0,952	1,297		0,125	0,787	0,811	0,837
	0,25	0,824	0,997	1,310		0,25	0,756	0,776	0,793
	0,375	0,893	1,067	1,346		0,375	0,722	0,738	0,750
	0,5	0,964	1,140	1,384		0,5	0,683	0,697	0,704
	0,625	1,026	1,210	1,458		0,625	0,640	0,653	0,660
	0,75	1,075	1,273	1,528		0,75	0,600	0,612	0,624
	0,875	1,117	1,334	1,627		0,875	0,579	0,590	0,611
	1,0	1,132	1,365	1,788		1,0	0,586	0,597	0,625

с помощью МКЭ [175], приведены в табл. 6.10. Здесь

$$\left.\begin{aligned} Q_0 &= 1 + 1{,}464\,(a/c)^{1{,}65} \quad \text{при } a/c \leqslant 1, \\ Q_0 &= 1 + 1{,}464\,(c/a)^{1{,}65} \quad \text{при } a/c > 1. \end{aligned}\right\} \tag{6.30}$$

По этим данным построена аппроксимационная формула [175]

$$K_I(B) = \sigma\sqrt{\pi a/Q_0}\,F_I(a/c,\ a/t,\ \varphi)$$

$$(0 \leqslant a/c \leqslant 2,\quad a/t < 1,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2),$$

где

$$F_I(a/c,\ a/t,\ \varphi) = [M_1 + M_2\,(a/t)^2 + M_3\,(a/t)^4]\,g_1 g_2 f.$$

При $a/c \leqslant 1$

$$\left.\begin{aligned} &M_1 = 1{,}08 - 0{,}03\,(a/c),\quad M_2 = -0{,}44 + 1{,}06/(0{,}3 + a/c), \\ &M_3 = -0{,}5 + 0{,}25\,(a/c) + 14{,}8\,(1 - a/c)^{15}, \\ &g_1 = 1 + [0{,}08 + 0{,}4\,(a/t)^2]\,(1 - \sin\varphi)^3, \\ &g_2 = 1 + [0{,}08 + 0{,}15\,(a/t)^2]\,(1 - \cos\varphi)^3, \\ &f = [(a/c)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]^{1/4}. \end{aligned}\right\} \tag{6.31}$$

При $a/c > 1$

$$\left.\begin{aligned} &M_1 = \sqrt{c/a}\,(1{,}08 - 0{,}03c/a),\quad M_2 = 0{,}375\,(c/a)^2, \\ &M_3 = -0{,}25\,(c/a)^2,\quad g_1 = 1 + [0{,}08 + 0{,}4\,(c/t)^2]\,(1 - \sin\varphi)^3, \\ &g_2 = 1 + [0{,}08 + 0{,}15\,(c/t)^2]\,(1 - \cos\varphi)^3, \\ &f = [(c/a)^2\sin^2\varphi + \cos^2\varphi]^{1/4}. \end{aligned}\right\} \tag{6.32}$$

Таблица 6.11. **Значения КИН $K_I/(\sigma_0\sqrt{\pi a/Q_0})$ в точках A (над чертой) и C (под чертой) для угловой трещины в полубесконечном слое при действии на ее берегах шести видов нагрузки ($\mu = 0{,}3$) [191]**

Нагрузка	$\frac{a}{c}$	a/t			
		0,2	0,4	0,6	0,8
$\sigma(\xi, \eta) = \sigma_0$	0,2	1,102	1,318	1,712	2,117
		0,584	0,694	0,912	1,272
	0,4	1,104	1,220	1,428	1,723
		0,819	0,927	1,100	1,422
	0,6	1,123	1,195	1,349	1,579
		0,964	1,047	1,244	1,483
	1,0	1,149	1,216	1,303	1,473
		1,149	1,240	1,374	1,561
	2,0	1,231	1,214	1,311	1,385
		1,542	1,552	1,680	1,777
$\sigma(\xi, \eta) = \sigma_0\xi$	0,2	0,458	0,583	0,831	1,081
		0,504	0,582	0,745	0,992
	0,4	0,422	0,486	0,623	0,797
		0,685	0,761	0,877	1,106
	0,6	0,391	0,436	0,534	0,662
		0,803	0,856	0,996	1,167
	1,0	0,346	0,392	0,445	0,536
		0,967	1,028	1,119	1,253
	2,0	0,288	0,288	0,334	0,374
		1,333	1,330	1,426	1,492
$\sigma(\xi, \eta) = \sigma_0\xi^2$	0,2	0,285	0,379	0,562	0,743
		0,448	0,512	0,644	0,831
	0,4	0,249	0,301	0,407	0,533
		0,598	0,659	0,746	0,924
	0,6	0,222	0,262	0,336	0,426
		0,700	0,740	0,849	0,983
	1,0	0,190	0,224	0,266	0,327
		0,850	0,894	0,965	1,069
	2,0	0,146	0,153	0,181	0,207
		1,191	1,184	1,261	1,311
$\sigma(\xi, \eta) = \sigma_0\xi^3$	0,2	0,205	0,282	0,426	0,570
		0,406	0,461	0,574	0,723
	0,4	0,172	0,218	0,304	0,403
		0,535	0,586	0,656	0,802
	0,6	0,151	0,187	0,246	0,316
		0,625	0,657	0,748	0,859
	1,0	0,126	0,157	0,191	0,237
		0,763	0,799	0,856	0,943

Продолжение табл. 6.11

Нагрузка	$\frac{a}{c}$	a/t			
		0,2	0,4	0,6	0,8
	2,0	0,097	0,105	0,125	0,144
		1,084	1,075	1,140	1,180
$\sigma(\xi, \eta) = \sigma_0\eta$	0,2	0,998	1,143	1,424	1,734
		0,074	0,139	0,238	0,468
	0,4	0,972	1,039	1,176	1,395
		0,174	0,239	0,356	0,549
	0,6	0,967	1,006	1,108	1,276
		0,249	0,305	0,425	0,573
	1,0	0,967	1,010	1,068	1,190
		0,346	0,406	0,489	0,608
	2,0	1,032	1,018	1,086	1,137
		0,552	0,555	0,634	0,694
$\sigma(\xi, \eta) = \sigma_0\xi\eta$	0,2	0,398	0,474	0,645	0,831
		0,054	0,096	0,162	0,319
	0,4	0,350	0,381	0,468	0,593
		0,125	0,163	0,244	0,377
	0,6	0,310	0,333	0,395	0,483
		0,182	0,217	0,296	0,398
	1,0	0,259	0,289	0,321	0,384
		0,259	0,299	0,352	0,435
	2,0	0,210	0,206	0,239	0,264
		0,441	0,433	0,492	0,531
$\sigma(\xi, \eta) = \sigma_0\xi^2\eta$	0,2	0,241	0,298	0,423	0,557
		0,044	0,074	0,123	0,243
	0,4	0,200	0,225	0,294	0,384
		0,100	0,131	0,188	0,289
	0,6	0,169	0,190	0,237	0,300
		0,145	0,171	0,230	0,308
	1,0	0,133	0,156	0,182	0,224
		0,210	0,241	0,280	0,343
	2,0	0,099	0,101	0,120	0,137
		0,375	0,362	0,410	0,438
$\sigma(\xi, \eta) = \sigma_0\xi^3\eta$	0,2	0,171	0,218	0,315	0,422
		0,037	0,061	0,100	0,196
	0,4	0,136	0,160	0,216	0,286
		0,083	0,108	0,153	0,234
	0,6	0,111	0,133	0,170	0,219
		0,122	0,142	0,189	0,252
	1,0	0,084	0,107	0,128	0,159
		0,178	0,203	0,234	0,284

Продолжение табл. 6.11

Нагрузка	$\frac{a}{c}$	a/t			
		0,2	0,4	0,6	0,8
	2,0	0,064	0,067	0,081	0,094
		0,328	0,314	0,355	0,376
$\sigma(\xi, \eta) = \sigma_0\eta^2$	0,2	0,920	1,029	1,249	1,506
		0,031	0,078	0,148	0,304
	0,4	0,880	0,922	1,024	1,200
		0,083	0,134	0,221	0,358
	0,6	0,862	0,885	0,962	1,096
		0,128	0,173	0,261	0,370
	1,0	0,850	0,881	0,925	1,021
		0,190	0,234	0,297	0,385
	2,0	0,904	0,894	0,945	0,984
		0,321	0,329	0,382	0,429
$\sigma(\xi, \eta) = \sigma_0\xi\eta^2$	0,2	0,358	0,409	0,541	0,689
		0,020	0,050	0,096	0,204
	0,4	0,305	0,320	0,383	0,481
		0,055	0,088	0,145	0,239
	0,6	0,262	0,274	0,320	0,387
		0,087	0,116	0,173	0,249
	1,0	0,210	0,233	0,255	0,303
		0,133	0,163	0,204	0,265
	2,0	0,168	0,163	0,188	0,206
		0,245	0,245	0,283	0,314
$\sigma(\xi, \eta) = \sigma_0\xi^2\eta^2$	0,2	0,212	0,252	0,346	0,454
		0,015	0,037	0,070	0,152
	0,4	0,170	0,184	0,233	0,304
		0,041	0,066	0,108	0,179
	0,6	0,138	0,151	0,186	0,234
		0,066	0,087	0,130	0,187
	1,0	0,102	0,121	0,139	0,171
		0,102	0,126	0,156	0,202
	2,0	0,075	0,075	0,090	0,103
		0,201	0,197	0,229	0,251
$\sigma(\xi, \eta) = \sigma_0\xi^3\eta^2$	0,2	0,147	0,181	0,254	0,340
		0,012	0,029	0,055	0,122
	0,4	0,114	0,128	0,169	0,224
		0,032	0,052	0,086	0,143
	0,6	0,089	0,104	0,131	0,169
		0,053	0,070	0,104	0,150
	1,0	0,061	0,081	0,096	0,120
		0,082	0,103	0,127	0,164

Продолжение табл. 6.11

Нагрузка	$\frac{a}{c}$	a/t			
		0,2	0,4	0,6	0,8
	2,0	0,048	0,049	0,060	0,069
		0,171	0,166	0,193	0,210
$\sigma(\xi, \eta) = \sigma_0\eta^3$	0,2	0,857	0,943	0,127	1,348
		0,020	0,056	0,112	0,231
	0,4	0,809	0,836	0,916	1,064
		0,053	0,095	0,163	0,268
	0,6	0,783	0,797	0,860	0,972
		0,085	0,122	0,190	0,276
	1,0	0,763	0,788	0,824	0,903
		0,126	0,164	0,215	0,284
	2,0	0,811	0,803	0,844	0,876
		0,223	0,231	0,273	0,311
$\sigma(\xi, \eta) = \sigma_0\xi\eta^3$	0,2	0,327	0,365	0,473	0,596
		0,013	0,035	0,071	0,152
	0,4	0,272	0,278	0,327	0,409
		0,034	0,061	0,105	0,177
	0,6	0,229	0,235	0,271	0,326
		0,056	0,080	0,124	0,183
	1,0	0,178	0,197	0,214	0,252
		0,084	0,112	0,145	0,192
	2,0	0,141	0,136	0,157	0,171
		0,166	0,168	0,198	0,224
$\sigma(\xi, \eta) = \sigma_0\xi^2\eta^3$	0,2	0,191	0,220	0,297	0,386
		0,009	0,026	0,051	0,113
	0,4	0,149	0,156	0,195	0,253
		0,024	0,045	0,078	0,132
	0,6	0,117	0,126	0,153	0,192
		0,041	0,059	0,092	0,137
	1,0	0,082	0,099	0,113	0,139
		0,061	0,085	0,109	0,145
	2,0	0,060	0,060	0,073	0,082
		0,133	0,132	0,157	0,176
$\sigma(\xi, \eta) = \sigma_0\xi^3\eta^3$	0,2	0,130	0,157	0,215	0,287
		0,007	0,020	0,040	0,090
	0,4	0,098	0,107	0,139	0,185
		0,019	0,035	0,061	0,105
	0,6	0,075	0,085	0,107	0,137
		0,032	0,047	0,073	0,109
	1,0	0,047	0,065	0,077	0,096
		0,047	0,068	0,088	0,117

Продолжение табл. 6.11

Нагрузка	$\frac{a}{c}$	a/t			
		0,2	0,4	0,6	0,8
	2,0	$\frac{0,038}{0,111}$	$\frac{0,039}{0,109}$	$\frac{0,047}{0,131}$	$\frac{0,055}{0,145}$

В работе [191] с помощью МКЭ получены значения КИН для угловой трещины в полубесконечном слое (см. рис. 6.49) при действии на ее берегах различной полиномиальной нагрузки $\sigma_z^{\pm} = -\sigma(\xi, \eta) = -\sigma_0 \xi^m \eta^n$ ($m, n = 0, 1, 2, \ldots$), где $\xi = 1 - y/a$, $\eta = 1 - x/c$. Значения КИН $K_I/(\sigma_0 \sqrt{\pi a/Q_0})$ приведены в табл. 6.11, где величина Q_0 определяется формулами (6.30).

6.10. Толстая пластина с отверстием и трещинами

Поверхностные полуэллиптические трещины в отверстии. Пусть в толстой пластине имеется круговое отверстие, на поверхность которого симметрично выходят две полуэллиптические трещины (рис. 6.50). Берега трещин, поверхность отверстия и грани пластины свободны от нагрузки, а на бесконечности пластина растягивается усилиями σ в направлении, перпендикулярном плоскости трещин. Значения КИН вдоль фронта трещины, полу-

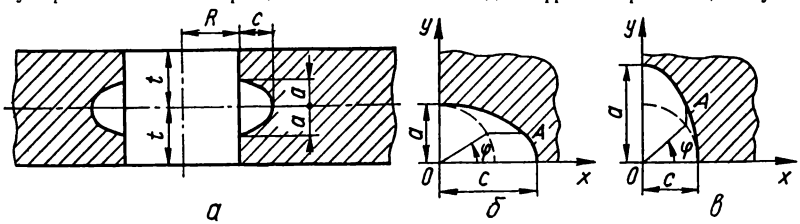


Рис. 6.50. Одна или две симметричные полуэллиптические трещины, выходящие на поверхность кругового отверстия в толстой пластине (*а*) и определение угла φ при $a/c \leqslant 1$ (*б*) и $a/c > 1$ (*в*).

ченные с помощью МКЭ [175], приведены в табл. 6.12. На основе этих данных построена аппроксимационная формула [175]

$$K_I(A) = \sigma \sqrt{\pi a/Q_0} F_I(a/c,\ a/t,\ R/t,\ \varphi)$$

$$(0,2 \leqslant a/c \leqslant 2,\quad a/t < 1,\quad 0,5 \leqslant R/t \leqslant 2,\quad -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2), \quad (6.33)$$

где

$$F_I = [M_1 + M_2 (a/t)^2 + M_3 (a/t)^4]\, g_1 g_2 g_3 f,$$

$$M_1 = 1 \text{ при } a/c \leqslant 1,\quad M_1 = \sqrt{c/a} \text{ при } a/c > 1,$$

$$M_2 = 0,05/[0,11 + (a/c)^{3/2}],\quad M_3 = 0,29/[0,23 + (a/c)^{3/2}],$$

$$g_1 = 1 - (a/t)^4 \cos\varphi/(1 + 4a/c),$$

$$g_2 = (1 + 0,358\lambda + 1,425\lambda^2 - 1.578\lambda^3 + 2,156\lambda^4)/(1 + 0,08\lambda^2),$$

$$\lambda = 1/[1 + (c/R)\cos(0,9\varphi)],\quad g_3 = 1 + 0,1\,(1 - \cos\varphi)^2\,(1 - a/t)^{10},$$

Таблица 6.12. **Значения КИН K_I $(A)/(\sigma\sqrt{\pi a/Q_0})$ (Q_0 — функция (6.30)) при растяжении пластины с круговым отверстием и двумя симметричными полуэллиптическими трещинами, выходящими на его поверхность ($\mu = 0{,}3$) [175]**

$\frac{c}{a}$	$\frac{2\varphi}{\pi}$	$R/t = 1$			$R/t = 2$		
		a/t			a/t		
		0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,8
0,2	0	0,641	0,607	0,593	0,800	0,680	0,634
	0,125	0,692	0,662	0,643	0,864	0,743	0,690
	0,25	0,836	0,775	0,771	1,046	0,877	0,832
	0,375	1,011	0,905	0,919	1,272	1,037	1,002
	0,5	1,196	1,032	1,094	1,508	1,206	1,213
	0,625	1,405	1,178	1,293	1,766	1,410	1,469
	0,75	1,651	1,362	1,528	2,041	1,662	1,787
	0,833	1,0905	1,583	1,765	2,279	1,932	2,109
	0,917	2,179	1,885	2,050	2,474	2,238	2,463
	0,958	2,288	2,121	2,336	2,439	2,375	2,699
	1,0	1,834	1,958	2,329	1,791	1,947	2,380
0,4	0	1,030	0,872	0,840	1,290	1,058	0,972
	0,125	1,076	0,912	0,872	1,346	1,107	1,010
	0,25	1,202	1,007	0,959	1,498	1,227	1,118
	0,375	1,376	1,131	1,074	1,704	1,384	1,263
	0,5	1,578	1,275	1,234	1,932	1,568	1,470
	0,625	1,804	1,452	1,426	2,165	1,785	1,722
	0,75	2,040	1,667	1,668	2,378	2,026	2,031
	0,833	2,238	1,891	1,914	2,516	2,237	2,319
	0,917	2,396	2,141	2,201	2,564	2,418	2,595
	0,958	2,376	2,255	2,411	2,417	2,416	2,705
	1,0	1,844	1,923	2,224	1,776	1,894	2,258
1,0	0	2,267	1,806	1,615	2,620	2,188	1,990
	0,125	2,276	1,818	1,619	2,626	2,199	1,996
	0,25	2,301	1,851	1,630	2,642	2,232	2,009
	0,375	2,343	1,905	1,646	2,667	2,280	2,026
	0,5	2,404	1,980	1,730	2,700	2,341	2,121
	0,625	2,841	2,079	1,852	2,732	2,410	2,246
	0,75	2,566	2,206	2,049	2,753	2,483	2,437
	0,833	2,620	2,321	2,250	2,733	2,527	2,599
	0,917	2,622	2,415	2,452	2,643	2,521	2,716
	0,958	2,468	2,370	2,512	2,409	2,381	2,662
	1,0	1,950	1,957	2,203	1,862	1,888	2,192
2,0	0	1,944	1,606	1,394	2,136	1,922	1,712
	0,125	1,931	1,600	1,389	2,121	1,911	1,704
	0,25	1,897	1,582	1,377	2,075	1,879	1,681
	0,375	1,840	1,553	1,357	2,000	1,826	1,643
	0,5	1,763	1,514	1,333	1,899	1,756	1,594
	0,625	1,669	1,468	1,313	1,777	1,671	1,541
	0,75	1,580	1,434	1,310	1,659	1,593	1,499
	0,833	1,498	1,404	1,313	1,552	1,522	1,461
	0,917	1,426	1,387	1,332	1,456	1,463	1,434
	0,958	1,313	1,321	1,294	1,325	1,360	1,351
	1,0	1,042	1,082	1,077	1,041	1,088	1,089

$$f = [(a/c)^2 \cos^2\varphi + \sin^2\varphi]^{1/4} \text{ при } a/c \leqslant 1,$$

$$f = [(c/a)^2 \sin^2\varphi + \cos^2\varphi]^{1/4} \text{ при } a/c > 1.$$

КИН $K_I^*(A)$ в случае одной полуэллиптической трещины (см. рис. 6.50), выходящей на поверхность кругового отверстия в растягиваемой на бесконечности пластине, можно определить через КИН $K_I(A)$ (6.33) для двух трещин, если воспользоваться приближенной зависимостью [175]

$$K_I^*(A) = \sqrt{[4/\pi + a/c/(2tR)]/[4/\pi + ac/(tR)]}\, K_I(A). \qquad (6.34)$$

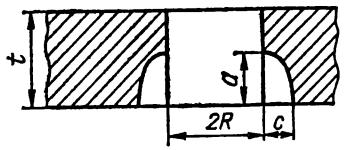


Рис. 6.51. Одна или две симметричные угловые трещины в форме четверти эллипса возле кругового отверстия в толстой пластине.

Данные по КИН для поверхностных полуэллиптических трещин, выходящих на границу отверстия, имеются также в работах [194—196].

Угловые трещины возле отверстия. Пусть в толстой пластине имеется круговое отверстие, на поверхность которого и на боковые грани пластины выходят две симметричные угловые трещины в форме четверти эллипса (рис. 6.51). Берега трещин, поверхность отверстия и грани пластины свободны от напряжения, а на бесконечности действует растягивающая (рис. 6.52, *а*) или изгибающая (рис. 6.52, *б*) нагрузка, либо на бесконечности напряжения отсутствуют, а поверхность отверстия находится под давлением, распределенным вдоль контура по закону $\sigma_n = (3P/(4Rt)) \times \sin^2\theta$, где P — главный вектор усилий, действующих в направлении оси Oy на дуге граничной окружности от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$ (рис. 6.52, *в*). Значения

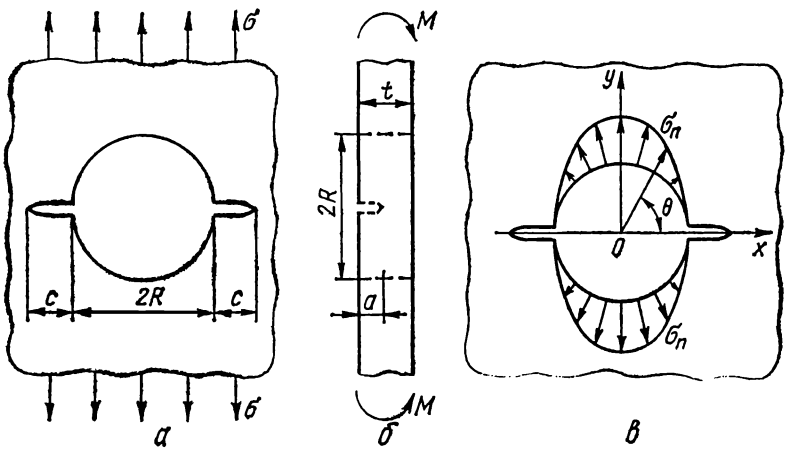


Рис. 6.52. Схемы нагружения пластины с двумя симметричными угловыми трещинами возле кругового отверстия при растяжении (*а*), изгибе (*б*) и расклинивании (*в*).

КИН $K_I/(\sigma_0\sqrt{\pi a/Q_0})$ (Q_0 — функция (6.28)) при различных углах φ (определение угла φ дано на рис. 6.50), полученные с помощью МКЭ [197], приведены в табл. 6.13 и 6.14.

На основе этих результатов в случае растяжения в работе [175] построена аппроксимационная формула

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a/Q_0}F_I\,(a/c,\ a/t,\ R/t,\ \varphi) \qquad (6.35)$$
$$(0{,}2 \leqslant a/c \leqslant 2,\quad a/t < 1,\quad 0{,}5 \leqslant R/t \leqslant 1,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2),$$

где $F_I = [M_1 + M_2\,(a/t)^2 + M_3\,(a/t)^4]\,g_1 g_2 g_3 f$.

При $a/c \leqslant 1$

$$M_1 = 1{,}13 - 0{,}09\,(a/c),\quad M_2 = -0{,}54 + 0{,}89/(0{,}2 + a/c),$$
$$M_3 = 0{,}5 - 1/(0{,}65 + a/c) + 14\,(1 - a/c)^{24},$$
$$g_1 = 1 + [0{,}1 + 0{,}35\,(a/t)^2]\,(1 - \sin\varphi)^2,$$
$$g_2 = (1 + 0{,}358\lambda + 1{,}425\lambda^2 - 1{,}578\lambda^3 + 2{,}156\lambda^4)/(1 + 0{,}13\lambda^2),$$
$$\lambda = 1/[1 + (c/R)\cos(0{,}85\varphi)],$$
$$g_3 = (1 + 0{,}04a/c)\,[1 + 0{,}1\,(1 - \cos\varphi)^2]\,[0{,}85 + 0{,}15\,(a/t)^{1/4}],$$
$$f = [(a/c)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]^{1/4}.$$

При $a/c > 1$

$$M_1 = \sqrt{c/a}\,(1 + 0{,}04c/a),\quad M_2 = 0{,}2\,(c/a)^4,\quad M_3 = -0{,}11\,(c/a)^4,$$
$$g_1 = 1 + [0{,}1 + 0{,}35\,(c/a)\,(a/t)^2]\,(1 - \sin\varphi)^2,$$
$$g_3 = (1{,}13 - 0{,}09c/a)\,[1 + 0{,}1\,(1 - \cos\varphi)^2]\,[0{,}85 + 0{,}15\,(a/t)^{1/4}],$$
$$f = [(c/a)^2\sin^2\varphi + \cos^2\varphi]^{1/4},$$

функция $g_2 = g_2\,(\lambda)$ и параметр λ такие же, как и при $a/c \leqslant 1$.

При растяжении пластины с круговым отверстием и одной угловой трещиной (см. рис. 6.51) КИН K_I^* можно приближенно выразить через K_I (6.35) для двух угловых трещин по формуле (6.34).

Данные по КИН для угловых трещин возле отверстий в толстых пластинах имеются также в работах [145, 155, 194, 196, 198—203].

6.11. Бесконечное тело с полостями и трещинами

Эллипсоидальная полость и краевая трещина. Пусть бесконечное пространство содержит эллипсоидальную полость, на поверхность которой выходит плоская кольцевая трещина (граничная поверхность представляет собой эллипсоид вращения). Берега трещины и поверхность полости свободны от нагрузки, а на бесконечности тело растягивается в направлении, ортогональном плоскости трещины (рис. 6.53). Значения КИН, полученные методом объемных сил [204], приведены в табл. 6.15.

Данные по КИН в случае сферической полости с краевой трещиной имеются также в работах [205—207].

Сферическая полость и внешняя кольцевая трещина. Пусть тело ослаблено сферической полостью и плоской кольцевой трещиной с бесконечным внешним радиусом (рис. 6.54). Поверхность полости свободна от нагрузки, на берегах трещины заданы напряжения $\sigma_z^{\pm} = -p_0/(r^2/c^2)$, $\tau_{rz}^{\pm} = \tau_{\theta z}^{\pm} = 0$. Считается, что на бесконечности отсутствуют перемещения. Асимптотическая формула для КИН имеет вид [208]

$$K_I = p_0\sqrt{\pi c}\,(1 + 0{,}1384\lambda^3 + 0{,}0623\lambda^5 + 0{,}0128\lambda^6 + 0{,}4080\lambda^7 +$$
$$+ 0{,}2377\lambda^8 - 0{,}7943\lambda^9 + 0{,}5698\lambda^{10}) + O\,(\lambda^{11}),\quad \lambda = a/c.$$

Таблица 6.13. Значения КИН $K_I/(\sigma_0\sqrt{\pi a/Q_0})$ для двух симметричных ($\sigma_0 = \sigma$), изгибе ($\sigma_0 = 6M/t^2$) и расклинивании ($\sigma_0 = P/(2Rt)$) при $R/t = 0,5$

Нагрузка	$\frac{2\varphi}{\pi}$	$a/c = 0,2$		
		a/t		
		0,2	0,5	0,8
Растяжение	0	0,673	0,878	1,256
	0,125	0,711	0,934	1,255
	0,25	0,833	1,061	1,385
	0,375	0,989	1,215	1,547
	0,5	1,141	1,360	1,707
	0,625	1,298	1,500	1,832
	0,75	1,477	1,643	1,930
	0,833	1,682	1,796	2,020
	0,917	1,949	2,018	2,148
	0,958	2,128	2,257	2,366
	1,0	1,885	2,276	2,554
Изгиб	0	0,635	0,713	0,729
	0,125	0,649	0,699	0,661
	0,25	0,729	0,722	0,632
	0,375	0,832	0,759	0,605
	0,5	0,922	0,779	0,556
	0,625	1,005	0,785	0,489
	0,75	1,090	0,791	0,411
	0,833	1,177	0,806	0,351
	0,917	1,276	0,830	0,302
	0,958	1,310	0,846	0,262
	1,0	1,084	0,770	0,219
Расклинивание	0	0,071	0,071	0,086
	0,125	0,076	0,065	0,083
	0,25	0,096	0,075	0,092
	0,375	0,129	0,093	0,105
	0,5	0,176	0,122	0,126
	0,625	0,251	0,167	0,156
	0,75	0,369	0,247	0,204
	0,833	0,516	0,353	0,278
	0,917	0,714	0,533	0,408
	0,958	0,854	0,722	0,587
	1,0	0,797	0,818	0,759

Таблица 6.14. Значения КИН $K_I/(\sigma_0\sqrt{\pi a/Q_0})$ для двух симметричных уг

Нагрузка	$\frac{2\varphi}{\pi}$	$a/c = 0,2$		
		a/t		
		0,2	0,5	0,8
Растяжение	0	0,772	0,838	1,325
	0,125	0,819	0,998	1,323
	0,25	0,966	1,138	1,460
	0,375	1,163	1,312	1,635

угловых трещин возле отверстия в толстой пластине при растяжении ($\mu = 0{,}3$) [197]

$a/c = 1$			$a/c = 2$		
a/t			a/t		
0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,8
1,832	1,699	1,808	1,603	1,353	1,259
1,870	1,699	1,763	1,607	1,350	1,235
1,886	1,675	1,673	1,588	1,322	1,187
1,936	1,687	1,608	1,566	1,297	1,144
2,015	1,733	1,608	1,532	1,272	1,109
2,119	1,817	1,640	1,486	1,252	1,088
2,247	1,951	1,750	1,446	1,253	1,095
2,359	2,107	1,907	1,406	1,263	1,123
2,447	2,287	2,122	1,375	1,295	1,184
2,398	2,347	2,274	1,296	1,276	1,198
1,985	2,072	2,164	1,053	1,088	1,054
1,562	1,279	1,113	1,291	0,977	0,824
1,520	1,172	0,969	1,226	0,871	0,672
1,432	1,005	0,722	1,121	0,710	0,453
1,371	0,864	0,497	1,025	0,563	0,253
1,332	0,744	0,293	0,935	0,436	0,081
1,311	0,647	0,118	0,852	0,333	—0,059
1,310	0,580	—0,028	0,787	0,263	—0,162
1,315	0,548	—0,130	0,739	0,226	—0,221
1,311	0,536	—0,205	0,704	0,209	—0,260
1,247	0,518	—0,239	0,651	0,197	—0,267
0,984	0,417	—0,246	0,515	0,160	—0,236
0,638	0,462	0,419	0,471	0,531	0,412
0,669	0,480	0,420	0,465	0,522	0,415
0,698	0,498	0,413	0,449	0,499	0,413
0,743	0,530	0,417	0,433	0,476	0,413
0,803	0,581	0,446	0,416	0,459	0,419
0,879	0,657	0,501	0,398	0,447	0,434
0,966	0,762	0,594	0,384	0,447	0,462
1,041	0,872	0,707	0,371	0,453	0,495
1,101	0,972	0,848	0,364	0,470	0,541
1,091	1,019	0,947	0,342	0,467	0,558
0,917	0,978	0,927	0,277	0,401	0,497

ловых трещин возле отверстия в толстой пластине при $R/t = 1$ ($\mu = 0{,}3$) [197]

$a/c = 1$			$a/c = 2$		
a/t			a/t		
0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,8
2,323	2,129	2,179	1,962	1,733	1,619
2,343	2,125	2,129	1,942	1,716	1,587
2,329	2,092	2,026	1,894	1,670	1,526
2,355	2,105	1,958	1,840	1,626	1,473

Нагрузка	$\frac{2\varphi}{\pi}$	$a/c = 0{,}2$		
		a/t		
		0,2	0,5	0,8
Растяжение	0,5	1,368	1,486	1,812
	0,625	1,588	1,673	1,964
	0,75	1,834	1,882	2,106
	0,833	2,071	2,111	2,257
	0,917	2,314	2,409	2,478
	0,958	2,380	2,619	2,734
	1,0	1,889	2,334	2,660
Изгиб	0	0,708	0,763	0,768
	0,125	0,725	0,749	0,697
	0,25	0,816	0,776	0,669
	0,375	0,937	0,820	0,644
	0,5	1,046	0,847	0,595
	0,625	1,146	0,862	0,527
	0,75	1,250	0,878	0,445
	0,833	1,336	0,902	0,378
	0,917	1,400	0,930	0,320
	0,958	1,360	0,927	0,282
	1,0	1,003	0,753	0,226
Расклинивание	0	0,170	0,126	0,162
	0,125	0,183	0,134	0,159
	0,25	0,227	0,158	0,176
	0,375	0,296	0,197	0,204
	0,5	0,384	0,254	0,246
	0,625	0,503	0,341	0,305
	0,75	0,657	0,470	0,393
	0,833	0,813	0,632	0,518
	0,917	0,977	0,848	0,708
	0,958	1,044	1,010	0,905
	1,0	0,849	0,948	0,962

Таблица 6.15. Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi c})$ при растяжении бесконечного тела с эллипсоидальной полостью и краевой трещиной [204]

$\frac{c}{b^2/a}$	$b = 0{,}5a$		$b = a$		$b = 2a$	
	$\mu = 0$	$\mu = 0{,}3$	$\mu = 0$	$\mu = 0{,}3$	$\mu = 0$	$\mu = 0{,}3$
0,05	...	...	1,98	2,08	1,32	1,36
0,1	...	...	1,81	1,88	1,19	1,21
0,2	2,61	2,73	1,57	1,61	1,04	1,05
0,4	2,13	2,18	1,29	1,30	0,913	0,913
0,6	1,84	1,87	1,14	1,14	0,847	0,846
0,8	1,65	1,66	1,05	1,05	0,806	0,805
1,0	1,51	1,51	0,982	0,980	0,779	0,778

Продолжение табл. 6.14

$a/c = 1$			$a/c = 2$		
a/t			a/t		
0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,8
2,406	2,159	1,972	1,771	1,580	1,426
2,468	2,249	2,026	1,683	1,530	1,387
2,534	2,375	2,162	1,599	1,493	1,373
2,569	2,494	2,324	1,519	1,460	1,371
2,553	2,592	2,498	1,449	1,442	1,391
2,409	2,539	2,551	1,335	1,372	1,352
1,925	2,089	2,219	1,061	1,122	1,125
1,821	1,485	1,304	1,478	1,147	0,971
1,757	1,359	1,115	1,477	1,014	0,791
1,633	1,163	0,833	1,228	0,817	0,531
1,540	0,977	0,575	1,096	0,641	0,297
1,467	0,854	0,340	0,976	0,490	0,097
1,406	0,736	0,140	0,867	0,370	—0,061
1,357	0,651	—0,024	0,779	0,286	—0,172
1,312	0,604	—0,129	0,711	0,240	—0,228
1,248	0,574	—0,191	0,657	0,215	—0,254
1,137	0,537	—0,200	0,592	0,198	—0,245
0,850	0,392	—0,202	0,450	0,152	—0,204
0,983	0,795	0,725	0,561	0,777	0,680
1,001	0,806	0,719	0,542	0,747	0,672
1,005	0,810	0,699	0,509	0,696	0,657
1,031	0,837	0,695	0,479	0,650	0,647
1,068	0,887	0,728	0,447	0,608	0,638
1,115	0,956	0,788	0,416	0,572	0,638
1,161	1,044	0,885	0,389	0,548	0,647
1,191	1,124	0,990	0,365	0,533	0,659
1,197	1,193	1,100	0,347	0,525	0,678
1,137	1,181	1,143	0,317	0,501	0,665
0,921	0,986	1,011	0,248	0,411	0,558

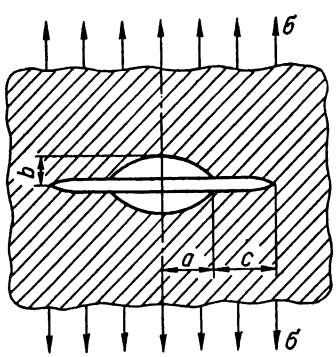


Рис. 6.54. Сечение бесконечного тела со сферической полостью и внешней круговой трещиной меридианной плоскостью.

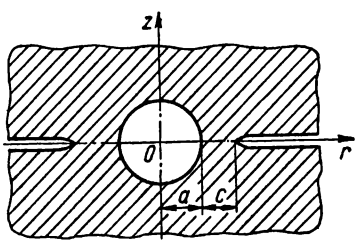


Рис. 6.53. Растяжение бесконечного пространства с эллипсоидальной полостью и краевой кольцевой трещиной.

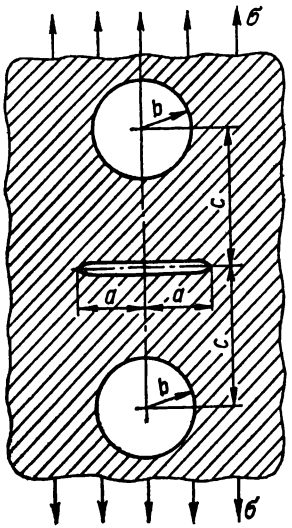
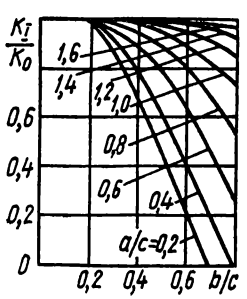


Рис. 6.55. Растяжение бесконечного пространства, ослабленного двумя сферическими полостями и дискообразной трещиной.

В работе [208] приведено также аналогичное решение для случая, когда на поверхностях трещины действуют растягивающие силы, распределенные вдоль концентрической окружности. Взаимодействие сферической полости и плоской кольцевой трещины с конечным внешним радиусом рассмотрено в работе [209].

Две сфероидальные полости и дискообразная трещина. Пусть в бесконечном пространстве имеются две равные сферические полости и дискообразная трещина. Центры полостей и трещины расположены на одной прямой (оси вращения). Берега трещины и поверхности полостей свободны от нагрузки, а на бесконечности тело растягивается в направлении, перпендикулярном плоскости трещины (рис. 6.55). Зависимость КИН от геометрических параметров, полученная методом дуальных интегральных уравнений [210], приведена на рис. 6.56. В работе [211] рассмотрена аналогичная задача для случая сфероидальных полостей.

Цилиндрическая полость и плоские трещины. Пусть в бесконечном пространстве имеется круговая цилиндрическая полость, на поверхность кото-



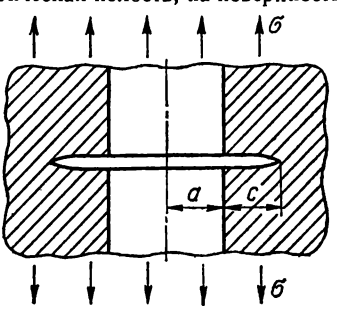


Рис. 6.56. Зависимость КИН K_I/K_0 ($K_0 = 2\sigma\sqrt{a/\pi}$) от геометрических параметров при растяжении бесконечного тела, ослабленного двумя сферическими полостями и дискообразной трещиной [210].

Рис. 6.57. Растяжение бесконечного пространства с цилиндрической полостью и краевой кольцевой трещиной.

рой выходит плоская кольцевая трещина. Берега трещины и поверхность полости свободны от нагрузки, а на бесконечности тело растягивается усилиями σ, направленными параллельно оси полости (рис. 6.57). Ниже приведены значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi c}) = F_I$, полученные методом СИУ [212]:

c/a	0,01	0,1	0,5	1,0	3,0	5,0
F_I	1,1144	1,0484	0,8737	0,7808	0,6755	0,6456

Данные по КИН для бесконечного тела с цилиндрической полостью и краевой кольцевой трещиной имеются также в работах [207, 213]. Исследовалась периодическая система краевых кольцевых трещин [214], а также изучалось взаимодействие цилиндрической полости и внешней круговой трещины [215]. В работах [216, 217] рассмотрен случай краевой полуэллиптической трещины, которая расположена в плоскости, параллельной оси цилиндрической полости.

6.12. Бесконечный круговой цилиндр с трещинами

Центральная дискообразная трещина. Пусть в бесконечном круговом цилиндре имеется внутренняя дискообразная трещина, центр которой находится на оси цилиндра. Берега трещины и боковая поверхность цилиндра свободны от внешних усилий, а на бесконечности действует растягивающая сила P (рис. 6.58; $M = 0$). Ниже приведены значения КИН $K_I/(2p_0\sqrt{a/\pi}) = F_I$ ($p_0 = P/\pi b^2$) при $\mu = 0{,}25$, полученные методом дуальных интегральных уравнений в работе [218]:

a/b	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9
F_I	1,005	1,015	1,077	1,270	1,504	2,083

Эти результаты полностью подтверждаются данными работы [219].

В работе [8] с помощью метода асимптотической аппроксимации построена аналитическая формула для КИН

$$K_I = \{(2/\pi)\,[1 + (1/2)\,(a/b) - (5/8)\,(a/b)^2] + 0{,}268\,(a/b)^3\}\,\sqrt{ac}/(\pi b)/(b^2 - a^2) \quad (0 \leqslant a/b < 1),$$

основанная на асимптотических решениях задачи при малых значениях параметров a/b и c/b.

Аналогичное решение при действии на бесконечности крутящего момента M (см. рис. 6.58; $P = 0$) имеет вид [8]

$$K_{III} = \{1 + (1/2)\,(a/b) + (3/8)\,(a/b)^2 + (5/16)\,(a/b)^3 - (93/128)\,(a/b)^4 + 0{,}038\,(a/b)^5\}\,8Ma\sqrt{ca/(\pi b)}/[3\pi\,(b^4 - a^4)] \quad (0 \leqslant a/b < 1).$$

Данные по КИН для дискообразной трещины в изотропном цилиндре имеются также в работах [174, 220, 221]. Рассматривался также трансверсально-изотропный цилиндр с внутренней круговой трещиной [171, 222].

Периодическая система дискообразных трещин. Пусть в цилиндре имеется бесконечный ряд внутренних дискообразных трещин, центры которых равномерно расположены на оси цилиндра. Берега трещин и боковая поверхность свободны от внешних усилий, а на бесконечности цилиндр растягивается силами P (рис. 6.59). Значения КИН, полученные методом дуальных интегральных уравнений [218], приведены в табл. 6.16. Данные по КИН для рассматриваемой системы трещин имеются также в работах [223, 224].

Краевая кольцевая трещина. Пусть бесконечный цилиндр ослаблен концентрической кольцевой трещиной, выходящей на его боковую поверхность (рис. 6.60). Берега трещины и боковая поверхность свободны от нагрузки, а на бесконечности цилиндр растягивается силами P. Ниже приведены значения КИН $K_I/(p_0\sqrt{\pi c}) = F_I$ ($p_0 = P/\pi b^2$) при $\mu = 0{,}3$, полученные методом интегральных уравнений в работе [225]:

c/b	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
F_I	1,1513	1,1807	1,2608	1,3904	1,597	1,932	2,502	3,598	6,201	16,46

Таблица 6.16. **Значения КИН $K_I/(2p_0\sqrt{a/\pi})$ ($p_0 = P/\pi b^2$) при растяжении кругового цилиндра с периодической системой дискообразных трещин при $\mu = 0{,}25$ [218]**

$\frac{a}{b}$	h/b				
	1/4	1/2	3/4	1	2
0,2	0,887	0,986	1,001	1,004	1,005
0,3	0,801	0,967	1,005	1,014	1,015
0,5	0,755	0,969	1,054	1,076	1,077
0,7	0,901	1,147	1,249	1,271	1,270
0,8	1,139	1,403	1,492	1,508	1,504
0,9	1,789	2,080	2,079	2,087	2,083

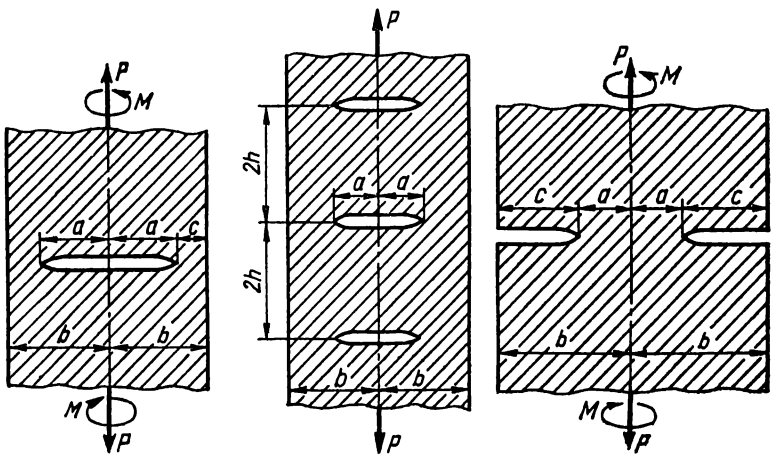


Рис. 6.58. Осевое сечение бесконечного кругового цилиндра с центральной дискообразной трещиной.

Рис. 6.59. Осевое сечение бесконечного кругового цилиндра с периодической системой дискообразных трещин.

Рис. 6.60. Осевое сечение бесконечного кругового цилиндра с краевой кольцевой концентрической трещиной.

В работе [8] с помощью асимптотической аппроксимации получена формула для КИН

$$K_I = (1/2)\, p_0\, (b/a)\, \sqrt{\pi c b/a}\, [1 + (1/2)\, (a/b) + (3/8)\, (a/b)^2 - $$
$$- 0{,}363\, (a/b)^3 + 0{,}731\, (a/b)^4] \quad (0 \leqslant a/b < 1),$$

основанная на асимптотических решениях задачи при малых значениях параметров a/b и c/b.

Приведем также аппроксимационную формулу для КИН [226]

$$K_I = (P/2a)\, \sqrt{(1-\varepsilon)/(\pi a)}\, [1 - 0{,}5\varepsilon - 0{,}125\varepsilon^2 + 0{,}2757\varepsilon^3 -$$
$$- 0{,}2082\varepsilon^4 + 0{,}0663\varepsilon^5 + 0{,}0048\varepsilon^6 - 0{,}0130\varepsilon^7]^{-1} \quad (0 \leqslant \varepsilon = a/b < 1).$$

Ряд приближенных формул для КИН имеются также в работах [19 227—229].

Данные по КИН при растяжении изотропного цилиндра с краевой кольцевой трещиной имеются также в работах [85, 128, 230—237].

Изучалось растяжение трансверсально-изотропного цилиндра с краевой кольцевой трещиной [238]. Рассматривались эксцентрические краевые кольцевые трещины [19, 239—241], а также случай внешней кольцевой трещины, выходящей на поверхность кольцевой выточки [242, 243].

Пусть круговой цилиндр скручивается на бесконечности моментами M, а боковая поверхность и берега трещины (см. рис. 6.60) свободны от нагрузки. Ниже приведены значения КИН $K_{III}/K_0 = F_{III}$ ($K_0 = 3M/(4a^2\sqrt{\pi a})$), полученные методом дуальных уравнений — рядов в работе [244]:

a/b	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
F_{III}	1,000	1,000	0,9993	0,9972	0,9909	0,9754	0,9417	0,8700	0,7095

Эти результаты полностью подтверждаются данными работ [237, 245].

В работе [8] с помощью асимптотической аппроксимации построена формула для КИН

$$K_{III} = (3M/(4a^2\sqrt{\pi a}))\sqrt{1-\varepsilon}\,[1 + (1/2)\,\varepsilon + (3/8)\,\varepsilon^2 + (5/16)\,\varepsilon^3 + (35/128)\,\varepsilon^4 + 0{,}208\varepsilon^5] \quad (0 \leqslant \varepsilon = a/b < 1),$$

основанная на асимптотических решениях задачи при малых значениях параметров a/b и c/b.

Данные по КИН при кручении цилиндра с внешней кольцевой трещиной имеются также в работах [19, 176, 233, 246—251]. Рассматривался также случай, когда на бесконечности цилиндр с трещиной находится под действием изгибающих моментов [8, 19, 240, 242].

Краевые сегментовидные трещины. Пусть в бесконечном цилиндре имеется плоская краевая трещина, форма которой представляет собой часть полуэллипса. Берега трещины и боковая поверхность свободны от нагруз-

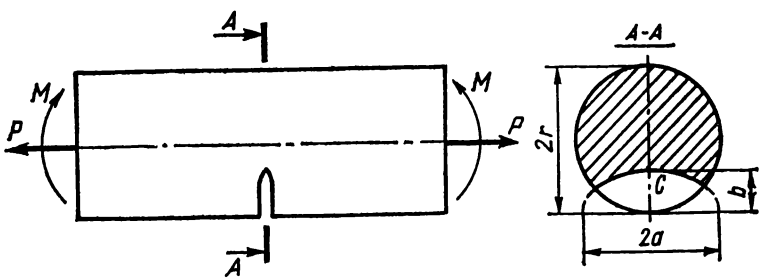


Рис. 6.61. Схема растяжения и изгиба кругового цилиндра с краевой сегментовидной трещиной.

ки, а на бесконечности цилиндр растягивается силами P (рис. 6.61; $M = 0$). Значения КИН в точке C фронта трещины, полученные методом объемных сил [252], приведены в табл. 6.17.

Для случая чистого изгиба кругового цилиндра с краевой сегментной трещиной (см. рис. 6.61; $P = 0$, $b/a = 0$) в работе [19] методом граничной интерполяции построена приближенная формула для КИН

$$K_I(C) = M/(D^2\sqrt{D})\,F_I(\varepsilon),$$

где

$$F_I(\varepsilon) = 1{,}9887\sqrt{1-\varepsilon}\,[\varphi(\varepsilon)+\varepsilon-0{,}5]/\{g(\varepsilon)\times$$

$$\times\sqrt{0{,}6295\,(1/\varepsilon-1)\,[\varphi(\varepsilon)+\varepsilon-0{,}5]^2/[0{,}2142\varphi(\varepsilon)+}\cdots\rightarrow$$

$$\rightarrow\cdots\overline{+0{,}2510\varepsilon-0{,}1071]^2+1}\},$$

$$\varphi(\varepsilon) = 2{,}6667\,(\varepsilon-\varepsilon^2)^{3/2}\,[\arccos(1-2\varepsilon)-2(1-2\varepsilon)\sqrt{\varepsilon-\varepsilon^2}]^{-1},$$

$$g(\varepsilon) = 0{,}0625\,\{0{,}25\arccos(1-2\varepsilon)-0{,}5(1-2\varepsilon)\times$$

$$\times\sqrt{\varepsilon-\varepsilon^2}\,(1-8\varepsilon+8\varepsilon^2)-56{,}8889\,(\varepsilon-\varepsilon^2)^3\times$$

$$\times[2\arccos(1-2\varepsilon)-4(1-2\varepsilon)\sqrt{\varepsilon-\varepsilon^2}]^{-1}\}\quad(D=2r,\quad\varepsilon=(D-b)/D).$$

Данные по КИН для краевых сегментовидных трещин в круговом цилиндре имеются также в работах [253—257].

Периодическая система краевых кольцевых трещин. Пусть бесконечный цилиндр ослаблен бесконечным рядом внешних краевых трещин. Бере-

Таблица 6.17. **Значения КИН $K_I\,(C)/(\sigma_0\sqrt{\pi b})$ $(\sigma_0 = P/\pi r^2)$ при растяжении кругового цилиндра с краевой полуэллиптической трещиной [252]**

b/a	μ	b/r				
		0	0,125	0,250	0,375	0,500
1	0	0,636	0,641	0,656	0,683	0,723
	0,3	0,660	0,665	0,683	0,714	0,758
0,5	0,3	0,884	0,890	0,920	0,976	1,064

Таблица 6.18. **Значения КИН $K_I/(p_0\sqrt{\pi c})$ $(p_0 = P/(\pi b^2))$ при растяжении кругового цилиндра с периодической системой краевых кольцевых трещин для $\mu = 0{,}3$ [258]**

$\frac{c}{h}$	c/b				
	0	0,2	1/3	0,5	2/3
0	1,122	1,261	1,452	1,940	3,158
0,2	0,872	1,176	1,439	1,942	...
0,3	0,726	1,027	1,335	1,917	...
0,4	0,625	0,906	1,212	1,839	...
0,5	0,558	0,821	1,113	1,746	3,092

га трещин и боковая поверхность свободны от нагрузки, а на бесконечности цилиндр растягивается силами P (рис. 6.62). Значения КИН, полученные методом объемных сил [258], приведены в табл. 6.18.

Полубесконечная цилиндрическая трещина. Пусть в бесконечном цилиндре имеется полубесконечная цилиндрическая трещина, ось которой совпадает с осью цилиндра (рис. 6.63). Для ряда случаев нагрузки в работе [259] получены точные замкнутые выражения для КИН.

При вращении цилиндра вокруг своей оси с угловой скоростью ω КИН равен

$$K_I = (1/8)\,(3 - 2\mu)\,(1 - \mu)^{-1}\,\rho\omega^2 b\,\sqrt{c\,(b^2 - c^2)},$$

где ρ — плотность материала.

Для случая, когда боковая поверхность цилиндра находится под действием постоянных растягивающих радиальных напряжений σ, а берега трещины свободны от нагрузки,

$$K_I = \sigma\,\sqrt{b^2 c/(b^2 - c^2)}.$$

Если торец цилиндра, на который выходит трещина, загружен осевыми усилиями, причем главные векторы усилий, действующих на внутрен-

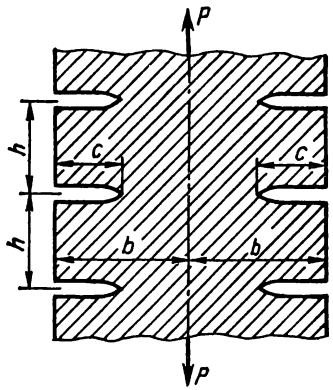


Рис. 6.62. Осевое сечение бесконечного кругового цилиндра с периодической системой краевых кольцевых трещин.

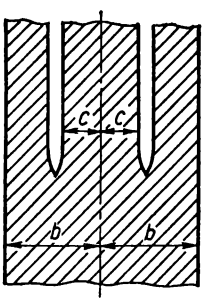


Рис. 6.63. Осевое сечение бесконечного кругового цилиндра с полубесконечной цилиндрической трещиной.

нем и внешнем цилиндрах, равны по величине (F) и противоположны по направлению, то

$$K_{II} = (F/(2\pi))\,\sqrt{b^2/[(1 - \mu^2)\,c^3\,(b^2 - c^2)]}.$$

Пусть цилиндр растягивается силами F, действующими на верхнем и нижнем торцах. Когда усилия на верхнем торце приложены к внешнему цилиндру, то

$$K_{II} = (F/(2\pi))\,\sqrt{c^2/[(1 - \mu^2)\,b^2 c\,(b^2 - c^2)]}.$$

Если же сила F действует на внутреннем цилиндре, то

$$K_{II} = (F/(2\pi))\,\sqrt{(b^2 - c^2)/[(1 - \mu^2)\,b^2 c^3]}.$$

При аналогичном приложении крутящей нагрузки с главным моментом M КИН равны

$$K_{III} = M\,\sqrt{b^4/[\pi c^5\,(b^4 - c^4)]},$$

$$K_{III} = M\,\sqrt{c^3/[\pi b^4\,(b^4 - c^4)]},$$

$$K_{III} = M\,\sqrt{(b^4 - c^4)/(\pi b^4 c^5)}.$$

Первый случай соответствует схеме нагружения, когда самоуравновешенная нагрузка приложена только к верхнему торцу цилиндра, причем внутренний цилиндр скручивается моментом M. Второй и третий случаи относятся к нагружению нижнего и верхнего торцов цилиндра скручивающими моментами M, причем в верхнем торце скручивается только внешний или внутренний цилиндр.

6.13. Бесконечный полый круговой цилиндр с трещинами

Внутренние краевые поперечные трещины. Пусть на внутреннюю поверхность полого кругового цилиндра выходит плоская кольцевая трещина. Берега трещины и боковые поверхности цилиндра свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы растягивающие напряжения σ (рис. 6.64). Значения КИН, полученные методом СИУ [213], приведены в табл. 6.19.

Таблица 6.19. **Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi c})$ при растяжении полого кругового цилиндра с внутренней краевой кольцевой трещиной для $\mu = 0{,}3$ [213]**

$\frac{a}{b}$	c/h					
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,637	0,644	0,651	0,665	0,691	0,736
0,1	0,842	0,775	0,753	0,754	0,775	0,820
0,2	0,940	0,869	0,840	0,838	0,859	0,908
0,3	1,000	0,942	0,918	0,920	0,945	1,000
0,4	1,042	1,003	0,991	1,001	1,035	1,099
0,5	1,073	1,055	1,060	1,085	1,131	1,208
0,6	1,097	1,104	1,130	1,174	1,239	1,333
0,7	1,119	1,150	1,203	1,275	1,366	1,484
0,8	1,138	1,198	1,286	1,397	1,529	1,688
0,9	1,158	1,253	1,392	1,568	1,779	2,025
1,0	1,189	1,367	1,660	2,112	2,826	4,035

Таблица 6.20. **Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi c})$ при растяжении полого кругового цилиндра с внешней краевой кольцевой трещиной для $\mu = 0{,}3$ [213]**

$\frac{a}{b}$	c/h					
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	1,181	1,260	1,388	1,593	1,922	2,478
0,1	1,176	1,244	1,350	1,513	1,762	2,159
0,2	1,172	1,235	1,328	1,465	1,667	1,977
0,3	1,170	1,231	1,316	1,437	1,610	1,866
0,4	1,168	1,230	1,313	1,425	1,580	1,802
0,5	1,167	1,232	1,317	1,427	1,572	1,773
0,6	1,167	1,238	1,329	1,443	1,586	1,776
0,7	1,168	1,247	1,350	1,475	1,627	1,818
0,8	1,169	1,261	1,384	1,533	1,709	1,918
0,9	1,173	1,285	1,442	1,641	1,878	2,153
1,0	1,189	1,367	1,660	2,112	2,826	4,035

Данные по КИН для внутренней краевой кольцевой трещины при растяжении цилиндра приведены также в работах [260—266]. Изучались чистый изгиб [213], а также кручение в случае одной [267], двух [268] или периодической системы [268] внутренних краевых кольцевых трещин. Рассматривалась также краевая поперечная полуэллиптическая трещина [269].

Внешние краевые поперечные трещины. Пусть на внешнюю поверхность полого кругового цилиндра выходит плоская кольцевая трещина.

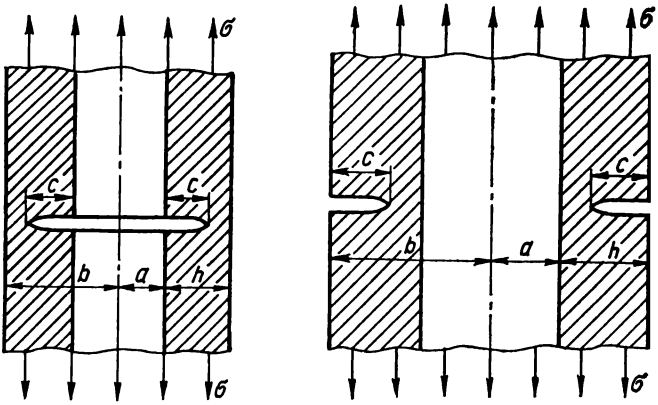


Рис. 6.64. Осевое сечение полого кругового цилиндра с внутренней краевой кольцевой трещиной.

Рис. 6.65. Осевое сечение полого кругового цилиндра с внешней краевой кольцевой трещиной.

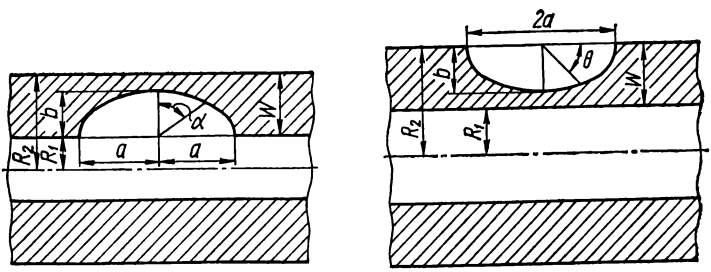


Рис. 6.66. Круговой цилиндр с внутренней продольной краевой полуэллиптической трещиной.

Рис. 6.67. Круговой полый цилиндр с внешней продольной краевой полуэллиптической трещиной.

Берега трещины и боковые поверхности цилиндра свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы растягивающие напряжения σ (рис. 6.65). Значения КИН, полученные методом СИУ [213], приведены в табл. 6.20.

Данные по КИН при растяжении полого цилиндра с внешней краевой кольцевой трещиной приведены также в работах [227, 261, 262, 270—272]. Изучались чистый изгиб [213], а также кручение в случае одной [273], двух [274] или периодической системы [274] внешних кольцевых трещин.

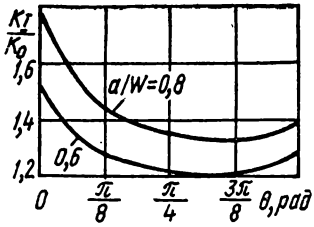


Рис. 6.68. Изменение КИН K_I/K_0 ($K_0 = 2\sigma_0\sqrt{a/\pi}$, $\sigma_0 = 2pR_1^2/(R_2^2 - R_1^2)$) вдоль фронта полукруговой ($b = a$) трещины, выходящей на наружную поверхность полого кругового цилиндра под давлением при $R_2/R_1 = 1{,}5$, $\mu = 0{,}3$ [284].

Внутренние продольные краевые трещины. Пусть в полом круговом цилиндре в плоскости, проходящей через его ось, находится краевая полуэллиптическая трещина (рис. 6.66). Берега трещины и наружная поверхность цилиндра свободны от нагрузки, а на внутренней поверхности действует постоянное давление p. Значения КИН вдоль фронта трещины, полученные методом ГИУ [157, 275], приведены в табл. 6.21.

Данные по КИН для внутренних полуэллиптических трещин в полом цилиндре имеются также в работах [158, 190, 216, 262, 264, 276—283].

Внешние продольные краевые трещины. Пусть в полом круговом цилиндре в плоскости, проходящей через его ось, расположена полуэллипти-

Таблица 6.21. **Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi b})$ для внутренней краевой полуэллиптической трещины в полом круговом цилиндре под давлением при $b/a = 0{,}8$ и $\mu = 0{,}3$ [157, 275]**

$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{b}{W}$	α						
		0	π/12	π/6	π/4	π/3	5π/12	π/2
2	0,2	1,617	1,604	1,588	1,565	1,565	1,604	1,782
	0,3	1,550	1,546	1,532	1,515	1,528	1,613	1,707
	0,4	1,492	1,473	1,469	1,455	1,481	1,573	1,684
	0,5	1,477	1,450	1,447	1,432	1,468	1,551	1,677
	0,6	1,490	1,480	1,460	1,463	1,473	1,582	1,703
	0,7	1,523	1,511	1,480	1,457	1,470	1,576	1,727
	0,8	1,623	1,607	1,582	1,526	1,520	1,536	1,669
3	0,2	1,208	1,197	1,189	1,183	1,187	1,245	1,374
	0,3	1,123	1,112	1,110	1,101	1,124	1,188	1,271
	0,4	1,067	1,055	1,055	1,038	1,074	1,147	1,246
	0,5	1,062	1,051	1,048	1,034	1,058	1,126	1,227
	0,6	1,087	1,075	1,070	1,052	1,072	1,107	1,213
	0,7	1,118	1,094	1,091	1,050	1,062	1,132	1,209
	0,8	1,216	1,187	1,168	1,115	1,090	1,139	1,238

ческая трещина, выходящая на наружную поверхность (рис. 6.67). Берега трещины и внешняя боковая поверхность свободны от нагрузки, а на внутренней поверхности действует постоянное давление p. Задача решена с помощью МКЭ в работе [284]. Изменение КИН вдоль фронта полукруговой трещины показано на рис.6.68.

Данные по КИН для внешних продольных полуэллиптических трещин в полом цилиндре имеются также в работах [139, 262, 264].

6.14. Призматические брусья с трещинами

Внутренние трещины. Пусть в призматическом брусе имеется свободная от нагрузки соосная круговая трещина. Брус растягивается равномерно распределенными по его сечению усилиями σ, которые приложены на большом расстоянии от области расположения трещины. Поперечное сечение бруса имеет форму квадрата или правильного треугольника (рис. 6.69). Если на боковых поверхностях брусьев отсутствуют касательные напряжения и нормальные смещения, то КИН в таких брусьях такие же, как и в

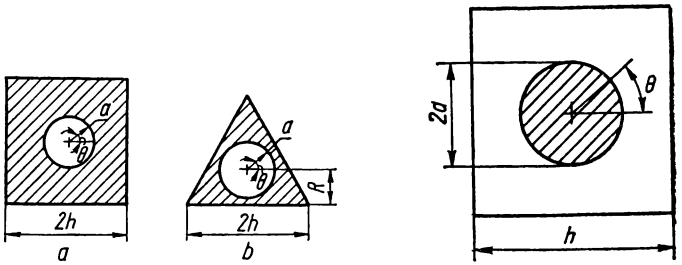


Рис. 6.69. Поперечные сечения квадратного (*а*) и треугольного (*б*) брусьев с соосной круговой трещиной вдоль плоскости трещины.

Рис. 6.70. Поперечное сечение квадратного бруса с внешней круговой трещиной вдоль плоскости трещины.

случае бесконечного пространства с двоякопериодической системой компланарных круговых трещин, центры которых расположены в узлах квадратной или шестиугольной сетки. В этом случае для квадратного бруса построено в работах [19, 110] асимптотическое решение

$$K_I = 2\sigma\sqrt{a/\pi}\,\{1 + 0{,}2393\varepsilon^3 + 0{,}0810\varepsilon^5 + 0{,}0574\varepsilon^6 + \\ + \varepsilon^7[0{,}0035 + 0{,}0557(\cos^4\theta + \sin^4\theta) + \\ + 0{,}0142\cos^2\theta\sin^2\theta]\} + O(\varepsilon^8) \quad (\varepsilon = a/h). \tag{6.36}$$

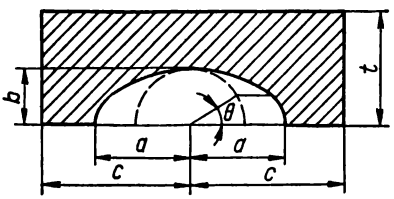
Аналогичный результат для бруса с треугольным поперечным сечением имеет вид [19, 110]

$$K_I = 2\sigma\sqrt{a/\pi}\,[1 + 0{,}1938\varepsilon^3 - 0{,}0154\varepsilon^4\sin\theta + \\ + \varepsilon^5(0{,}0122 - 0{,}0071\cos^2\theta - 0{,}0173\sin^2\theta)] + O(\varepsilon^6), \\ \varepsilon = a/R, \quad R = h/\sqrt{3}. \tag{6.37}$$

Решения (6.36) и (6.37) могут быть использованы также в случае, когда на боковых поверхностях бруса отсутствует внешняя нагрузка. Допускаемая при этом ошибка незначительна. Это утверждение вытекает из сравнения точного и приближенного решений для кругового цилиндра радиуса R с соосной трещиной радиуса a, которые отличаются не более чем на 5 % при $\varepsilon = a/R \leqslant 0{,}9$ [19].

В работах [9, 19, 125, 129, 136, 138, 285, 286] приведены также данные по КИН при изгибе прямоугольного бруса с внутренней круговой трещиной, находящейся в поле растягивающих напряжений.

Внешние круговые трещины. Пусть призматический квадратный брус ослаблен в поперечном сечении свободной от нагрузки внешней трещиной, расположенной вне кругового перешейка радиуса a, соосного с брусом (рис. 6.70). Брус растягивается силами P, приложенными на значительном расстоянии от места расположения трещины и направленными вдоль оси бруса. Если на боковой поверхности бруса отсутствуют касательные напряжения и нормальные смещения, то КИН в таком брусе такой же, как и в случае бесконечного пространства с плоской трещиной, находящейся вне двоякопериодической системы круговых перешейков, центры которых образуют квадратную решетку. В этом случае для КИН известна асимптотическая формула [13, 19]



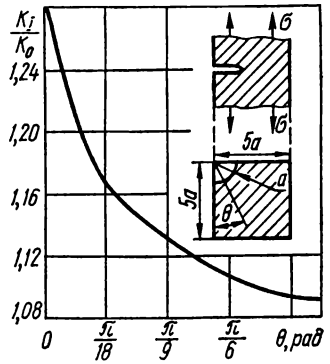


Рис. 6.71. Поперечное сечение прямоугольного бруса с краевой полуэллиптической трещиной.

Рис. 6.72. Схема нагружения квадратного бруса с угловой трещиной ($а$) и изменение КИН K_I/K_0 ($K_0 = 2\sigma\sqrt{a/\pi}$) ($б$) вдоль фронта трещины [135].

$$K_I = [P/(2a\sqrt{\pi a})]\,[1 - 0{,}240\lambda^3 - (0{,}323 + 0{,}101\cos^4\theta - $$
$$- 0{,}606\cos^2\theta\sin^2\theta)\,\lambda^5] + O(\lambda^6), \quad \lambda = 2a/h.$$

Краевые полуэллиптические трещины. Пусть прямоугольный брус ослаблен краевой полуэллиптической трещиной (рис. 6.71). Берега трещины и боковые поверхности бруса свободны от нагрузки, а на бесконечности действуют растягивающие усилия σ в направлении оси бруса. Для КИН в работе [175] построена аппроксимационная формула

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi b/Q_0}F_I\,(b/a,\ b/t,\ a/c,\ \theta) \quad (0 \leqslant b/a \leqslant 2,$$
$$a/c < 0{,}5, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad b/t < 1{,}25\,(b/a + 0{,}6) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant b/a \leqslant 0{,}2,$$
$$b/t \leqslant 1 \quad \text{при} \quad 0{,}2 \leqslant b/a \leqslant 2),$$

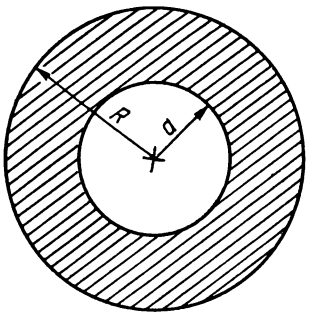
где $F_I = [M_1 + M_2(b/t)^2 + M_3(b/t)^4]\ gfq_0$, $q_0 = \sqrt{\sec[\pi a\sqrt{b/t}/(2c)]}$, остальные величины определяются по формулам (6.28) и (6.29).

Угловые трещины. Пусть квадратный брус ослаблен краевой угловой трещиной в форме четверти круга. Берега трещины и боковые поверхности бруса свободны от нагрузки, а на бесконечности действуют растягивающие усилия σ в направлении оси бруса (рис. 6.72, $а$). Изменение КИН вдоль фронта трещины показано на рис. 6.72, $б$. Эти результаты заимствованы из работы [135].

Данные по КИН для угловых трещин в прямоугольных брусьях имеются также в работах [157, 191, 192, 287].

6.15. Ограниченные тела с трещинами

Шар с трещиной. Пусть в шаре радиуса R в диаметральной плоскости расположена дискообразная трещина с центром в центре шара (рис. 6.73). На берегах трещины действует постоянное давление p, а на внешней поверхности шара заданы условия: касательные напряжения и нормальные смещения равны нулю (задача I); отсутствует внешняя нагрузка (задача II); касательные и нормальные смещения равны нулю (задача III). Задача решена методом интегральных уравнений в работе [288]. Для КИН получены



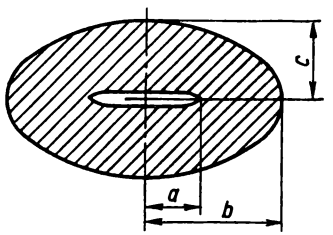


Рис. 6.73. Диаметральное сечение шара с центральной дискообразной трещиной вдоль плоскости трещины.

Рис. 6.74. Меридианное сечение сфероида с центральной дискообразной трещиной.

асимптотические формулы при малых значениях параметра $\lambda = a/R$ для $\mu = 0{,}25$:

$$K_I = 2p\sqrt{a/\pi}\,(1 - 1{,}06103\lambda^3 + 0{,}41649\lambda^5 + 1{,}12578\lambda^6 + \\ + 0{,}01667\lambda^7 - 0{,}76178\lambda^8 - 0{,}88713\lambda^9) + O(\lambda^{10})$$

для задачи I;

$$K_I = 2p\sqrt{a/\pi}\,(1 + 1{,}5433\lambda^3 - 2{,}3870\lambda^5 + 2{,}3818\lambda^6 + \\ + 3{,}2711\lambda^7 - 6{,}4470\lambda^8 - 0{,}2107\lambda^9) + O(\lambda^{10})$$

для задачи II;

$$K_I = 2p\sqrt{a/\pi}\,(1 - 1{,}50525\lambda^3 + 1{,}0940\lambda^5 + 2{,}2658\lambda^6 - \\ - 1{,}6487\lambda^7 - 2{,}8778\lambda^8 - 1{,}6387\lambda^9) + O(\lambda^{10})$$

для задачи III.

Эти формулы при $\lambda \leqslant 0{,}6$ хорошо согласуются с результатами, полученными при численном решении интегральных уравнений [288]. Ниже приведены последние результаты для K_I^*/K_0 (задача I) и K_I^{**}/K_0 (задача II) при $\mu = 0{,}25$ ($K_0 = 2p\sqrt{a/\pi}$):

a/R	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
K_I^*/K_0	0,99172	0,94027	0,89308	0,83687	0,78315	0,75930	0,79164
K_I^{**}/K_0	1,01176	1,08516	1,15549	1,27016	1,32240	1,47210	1,81071

Данные по КИН для шара с внутренней дискообразной трещиной имеются также в работах [135, 289, 290]. Изучались также внутренняя [291] и внешняя краевая [292] кольцевые трещины.

Сфероид с трещиной. Пусть в сфероиде в диаметральном сечении радиуса b имеется центральная дискообразная трещина радиуса a (рис. 6.74).

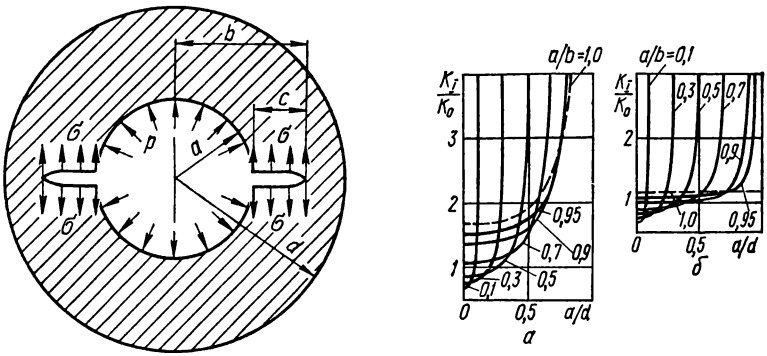
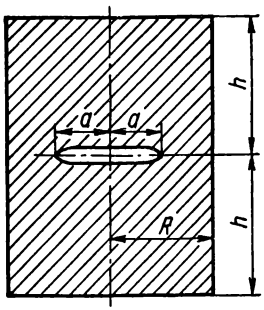


Рис. 6.75. Меридианное сечение полого шара с краевой кольцевой трещиной.

Рис. 6.76. Зависимость КИН K_I/K_0 ($K_0 = \sigma\sqrt{\pi c}$) от параметра a/d для краевой кольцевой трещины в полом шаре при $\sigma = p$ ($а$) и $p = 0$ ($б$) для $\mu = 0{,}3$ [294].



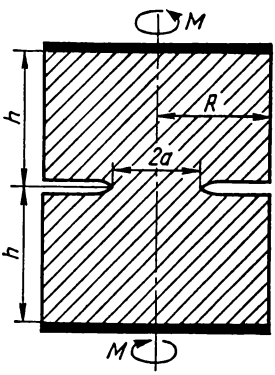


Рис. 6.77. Меридианное сечение конечного кругового цилиндра с соосной круговой трещиной.

Рис. 6.78. Меридианное сечение конечного кругового цилиндра с внешней соосной круговой трещиной.

Берега трещины находятся под действием постоянного давления p, а внешняя поверхность сфероида свободна от нагрузки. Значения КИН, полученные методом рядов по функциям Лежандра [293], приведены в табл. 6.22.

Полый шар с краевыми кольцевыми трещинами. Пусть на внутреннюю поверхность полого шара выходит плоская концентрическая кольцевая трещина (рис. 6.75). Берега трещины загружены постоянным давлением σ,

Таблица 6.22. Значения КИН $K_I/(2p\sqrt{a/\pi})$ для сфероида с центральной дискообразной трещиной под давлением при $\mu = 0{,}3$ [293]

$\frac{a}{b}$	c/b				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	1,74475	1,14115	1,04805	1,02154	1,01138
0,4	4,31242	1,74475	1,28927	1,14111	1,07868
0,6	8,64467	2,80706	1,74475	1,38360	1,22346
0,8	15,14375	4,31253	2,40335	1,74477	1,44652

Таблица 6.23. Значения КИН $K_I/(2\sigma\sqrt{a/\pi})$ при растяжении конечного кругового цилиндра с соосной круговой трещиной при $\mu = 0{,}3$ [296]

$\frac{a}{R}$	h/R					
	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
0,3	1,0191	1,0176	1,0164	1,0154	1,0145	1,0137
0,4	1,0450	1,0416	1,0386	1,0361	1,0339	1,0321
0,5	1,0872	1,0804	1,0745	1,0694	1,0652	1,0620
0,6	1,1493	1,1376	1,1276	1,1194	1,1132	1,1094
0,7	1,2379	1,2224	1,2099	1,2014	1,1978	1,1998
0,8	1,3834	1,3785	1,3797	1,3895	1,4097	1,4406
0,9	1,7403	1,8070	1,8813	0,9642	2,1156	1,1154

Таблица 6.24. Значения КИН $K_{III}/(\tau\sqrt{\pi a}/2)$ при кручении конечного кругового цилиндра с соосной круговой трещиной [297]

$\frac{R}{h}$	$a:R:h$				
	$1:R:h$	$3:R:h$	$4:R:h$	$5:R:h$	$6:R:h$
1,2	1,0000	1,0001	1,0004	1,0011	1,0025
1,0	1,0000	1,0001	1,0005	1,0016	1,0037
0,8	1,0000	1,0002	1,0008	1,0024	1,0060

Таблица 6.25. Значения КИН K_{III}/K_0 ($K_0 = 3M/(4a^2\sqrt{\pi a})$) при кручении конечного кругового цилиндра с внешней соосной круговой трещиной [298]

$\frac{a}{R}$	h/R						
	1/50	1/20	1/10	1/4	1/2	1	∞
0,1	0,77256	0,94493	0,99227	0,99983	0,99999	1,00000	1,00000
0,3	0,51107	0,72879	0,88233	0,98583	0,99864	0,99933	0,99934
0,5	0,40738	0,60426	0,77260	0,94442	0,98718	0,99073	0,99076
0,7	0,34859	0,52629	0,69103	0,88505	0,93732	0,94166	0,94169
0,9	0,30956	0,47128	0,60758	0,69789	0,70880	0,70947	0,70948

Таблица 6.26. **Значения КИН $K_I/[T\,(2W + C)\,t^{-1}\,(W - C)^{-3/2}]$ вдоль**

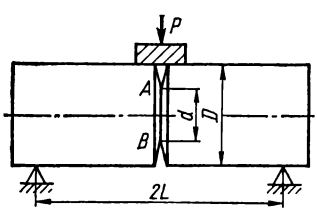
$2z/t$	$C/W = 1/8$			$C/W = 2/8$			
	$\mu = 0$	$\mu = 0{,}3$	$\mu = 0{,}45$	$\mu = 0$	$\mu = 0{,}3$	$\mu = 0{,}45$	$\mu = 0$
0/32	1,505	1,640	1,729	1,499	1,619	1,753	1,425
8/32	1,505	1,590	1,710	1,498	1,592	1,728	1,423
16/32	1,505	1,574	1,665	1,498	1,575	1,674	1,423
24/32	1,505	1,537	1,587	1,498	1,531	1,583	1,423
26/32	1,505	1,522	1,557	1,498	1,510	1,545	1,423
28/32	1,505	1,504	1,523	1,498	1,486	1,497	1,423
30/32	1,505	1,479	1,465	1,498	1,448	1,409	1,423
31/32	1,505	1,464	1,434	1,498	1,423	1,360	1,423
32/32	1,505	1,447	1,383	1,498	1,395	1,280	1,423

внутренняя поверхность находится под давлением p, а наружная поверхность свободна от нагрузки. Зависимости КИН от геометрических параметров задачи, полученные методом СИУ [294], приведены на рис. 6.76. Штриховые линии при $a/b = 1{,}0$ соответствуют решению задачи при плоской деформации: $K_I = 1{,}122\sigma\sqrt{\pi c}\,[1 - (a^3 + d^3/2)/(a^3 - d^3)]$ при $p = \sigma$ ($а$) и $K_I = 1{,}122\sigma\sqrt{\pi c}$ при $p = 0$ ($б$).

В работе [295] имеются также данные по КИН при кручении полого шара с внутренней и внешней краевыми кольцевыми трещинами.

Конечный круговой цилиндр с трещиной. Пусть в круговом цилиндре конечной длины имеется круговая трещина с центром на оси цилиндра (рис. 6.77). Берега трещины и боковая поверхность свободны от нагрузки, а на торцах цилиндра действуют постоянные растягивающие усилия σ. Значения КИН, полученные альтернирующим методом в работе [296], приведены в табл. 6.23.

Для случая, когда торцы цилиндра находятся под действием постоянной осесимметричной крутящей нагрузки τ, значения КИН, полученные методом интегральных уравнений [297], приведены в табл. 6.24.



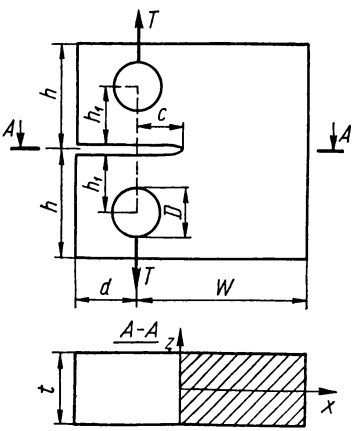


Рис. 6.79. Силовая схема нагружения цилиндрического образца с кольцевой трещиной при поперечном трехточечном изгибе.

Рис. 6.80. Стандартный компактный образец на растяжение:
$h = 0{,}6W$, $h_1 = 0{,}275W$, $D = 0{,}25W$, $d = 0{,}25W$, $t = 0{,}5W$.

фронта трещины в компактном образце на растяжение [176]

$C/W = 3/8$		$C/W = 4/8$			$C/W = 5/8$		
$\mu = 0{,}3$	$\mu = 0{,}45$	$\mu = 0$	$\mu = 0{,}3$	$\mu = 0{,}45$	$\mu = 0$	$\mu = 0{,}3$	$\mu = 0{,}45$
1,544	1,669	1,357	1,464	1,577	1,322	1,403	1,495
1,516	1,645	1,356	1,441	1,556	1,322	1,394	1,482
1,497	1,589	1,356	1,423	1,505	1,322	1,377	1,446
1,449	1,492	1,356	1,375	1,407	1,322	1,333	1,353
1,427	1,449	1,356	1,353	1,364	1,322	1,311	1,309
1,400	1,397	1,356	1,327	1,314	1,322	1,285	1,258
1,361	1,307	1,356	1,287	1,226	1,322	1,247	1,172
1,334	1,253	1,356	1,262	1,180	1,322	1,221	1,117
1,303	1,176	1,356	1,230	1,090	1,322	1,190	1,046

Пусть конечный круговой цилиндр ослаблен соосной кольцевой трещиной, выходящей на боковую поверхность. Берега трещины и боковая поверхность свободны от нагрузки, а торцы скреплены с жесткими пластинами, к которым приложены крутящие моменты M (рис. 6.78). Значения КИН, полученные методом интегральных уравнений [298], приведены в табл. 6.25.

Пусть круговой цилиндр длиной $2L$ ослаблен в центральном сечении внешней кольцевой трещиной, диаметры внешнего и внутреннего контуров которой соответственно равны D и d. Цилиндр нагружается силой P по схеме, указанной на рис. 6.79. Максимальное значение КИН, достигаемое в точке B, определяется по формуле [19, 226]

$$K_{I\max} = 0{,}7976PL\sqrt{1-\varepsilon}\,(1+1/\varepsilon)^2/[D^2\sqrt{D\,(1/\varepsilon - 0{,}8012)}],\quad \varepsilon = d/D,$$

построенной с помощью граничной интерполяции.

В работах [19, 226, 240] исследуется трехточечный изгиб цилиндрического образца с внешней кольцевой трещиной, выходящей на поверхность кольцевой выточки.

Имеются данные по КИН для конечного кругового цилиндра с поперечной краевой трещиной в форме части круга [296], а также с плоской клиновидной краевой трещиной в осевом сечении цилиндра [299].

Призматические образцы с трещинами. Рассмотрим компактный образец с краевой трещиной на растяжение (рис. 6.80). В п. 4.13 такой образец исследовался на основе плоской теории упругости. В табл. 6.26 приведены значения КИН вдоль фронта трещины, полученные на основе трехмерного анализа с помощью МКЭ [176].

Исследовался также случай компактного образца с краевой трещиной, имеющей криволинейный фронт [300]. Трехмерный анализ призматических образцов с краевой трещиной на изгиб проведен в работе [301]. Изучались также призматические образцы, имеющие в среднем сечении плоскую краевую клиновидную трещину [302].

7.1. Две спаянные полубесконечные пластины с трещинами на линии раздела сред

Трещина конечной длины. Пусть в кусочно-однородной плоскости на линии раздела сред имеется трещина конечной длины $2l$. На бесконечности заданы сдвигающие усилия τ и нормальные напряжения σ, σ_1 и σ_2, причем напряжения σ_1 и σ_2 различаются между собой и связаны зависимостью

$$\sigma_2 = (E_2/E_1)\,\sigma_1 + [\mu_2 - (E_2/E_1)\,\mu_1]\,\sigma \tag{7.1}$$

в случае обобщенного плоского напряженного состояния и

$$\sigma_2 = (E_2/E_1)\,[(1-\mu_1^2)/(1-\mu_2^2)]\,\sigma_1 + \{[\mu_2/(1-\mu_2)] - (E_2/E_1)\,[\mu_1\,(1+\mu_1)/(1-\mu_2^2)]\}\,\sigma \tag{7.2}$$

в случае плоской деформации (рис. 7.1; $P = P_1 = Q = Q_1 = 0$). Зависимости (7.1) и (7.2) следуют из условий непрерывности смещений и напряжений вдоль линии спая полуплоскостей. КИН даются выражениями [1]

$$K_{\mathrm{I}} = (\sqrt{\pi l}/\operatorname{ch}\pi\varepsilon)\,\{\sigma[\cos(\varepsilon\ln 2l) + 2\varepsilon\sin(\varepsilon\ln 2l)] + \tau[\sin(\varepsilon\ln 2l) - 2\varepsilon\cos(\varepsilon\ln 2l)]\},$$

$$K_{\mathrm{II}} = (\sqrt{\pi l}/\operatorname{ch}\pi\varepsilon)\,\{\tau[\cos(\varepsilon\ln 2l) + 2\varepsilon\sin(\varepsilon\ln 2l)] - \sigma[\sin(\varepsilon\ln 2l) - 2\varepsilon\cos(\varepsilon\ln 2l)]\},$$

где

$$\varepsilon = (1/(2\pi))\ln[(G_2\varkappa_1 + G_1)/(G_1\varkappa_2 + G_2)]. \tag{7.3}$$

Когда на бесконечности напряжения отсутствуют, а на берегах трещины действуют сосредоточенные силы P и Q (см. рис. 7.1; $\tau = \sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $Q_1 = P_1 = 0$), то [1]

$$K_{\mathrm{I}}(l) = (P/\sqrt{\pi})\sqrt{(l+b)/(l-b)}\cos\{\varepsilon\ln[2l\,(l-b)/(l+b)]\} + (Q/\sqrt{\pi})\sqrt{(l+b)/(l-b)}\sin\{\varepsilon\ln[2l\,(l-b)/(l+b)]\},$$

$$K_{\mathrm{II}}(l) = (Q/\sqrt{\pi})\sqrt{(l+b)/(l-b)}\cos\{\varepsilon\ln[2l\,(l-b)/(l+b)]\} - (P/\sqrt{\pi})\sqrt{(l+b)/(l-b)}\sin\{\varepsilon\ln[2l\,(l-b)/(l+b)]\}.$$

Пусть в произвольной точке (x_0, y_0) верхней полуплоскости действуют сосредоточенные силы P_1 и Q_1, а внешняя нагрузка на бесконечности и на берегах трещины отсутствует (см. рис. 7.1; $\tau = \sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $P = Q = 0$). КИН определяются по формуле [2]

$$K_{\mathrm{I}}(l) - iK_{\mathrm{II}}(l) = [(2l)^{i\varepsilon}/(2\sqrt{\pi l})]\,\{G_2/[(G_1\varkappa_2 + G_2)\operatorname{ch}\pi\varepsilon]\}\times$$

$$\times \{(Q_1 + iP_1)\,[\varkappa_1 F(l,\ \bar{z}_0) - e^{2\pi\varepsilon} F(l,\ z_0)] + (Q_1 - iP_1)\ (1 - 2i\varepsilon)\, l \times$$

$$\times [(z_0 - \bar{z}_0)/(\bar{z}_0^2 - l^2)]\,[F(l,\ \bar{z}_0) - 1]\},$$

где $F(l,\ z_0) = [\sqrt{z_0^2 - l^2}/(l - z_0)]\,[(z_0 - l)/(z_0 + l)]^{i\varepsilon} + 1, \quad z_0 = x_0 + iy_0.$

Отсюда при $z_0 = 0$ следуют выражения КИН, когда силы P_1 и Q_1 приложены в центре трещины к верхнему берегу [2]

$$K_I(l) = \{G_2/[2\sqrt{\pi l}\,(G_1\varkappa_2 + G_2)\,\mathrm{ch}\,\pi\varepsilon]\}\,\{Q_1\,[(\varkappa_1 e^{-2\pi\varepsilon} - 1)\cos(\varepsilon \ln 2l) +$$

$$+ e^{-\pi\varepsilon}(\varkappa_1 + 1)\sin(\varepsilon \ln 2l)] + P_1\,[e^{-\pi\varepsilon}(\varkappa_1 + 1)\cos(\varepsilon \ln 2l) -$$

$$- (\varkappa_1 e^{-2\pi\varepsilon} - 1)\sin(\varepsilon \ln 2l)]\},$$

$$K_{II}(l) = \{G_2/[2\sqrt{\pi l}\,(G_1\varkappa_2 + G_2)\,\mathrm{ch}\,\pi\varepsilon]\}\,\{Q_1\,[e^{-\pi\varepsilon}(\varkappa_1 + 1) \times$$

$$\times \cos(\varepsilon \ln 2l) - (\varkappa_1 e^{-2\pi\varepsilon} - 1)\sin(\varepsilon \ln 2l)] + P_1\,[-(\varkappa_1 e^{-2\pi\varepsilon} - 1) \times$$

$$\times \cos(\varepsilon \ln 2l) - e^{-\pi\varepsilon}(\varkappa_1 + 1)\sin(\varepsilon \ln 2l)]\}.$$

Упругое равновесие двух спаянных изотропных полуплоскостей с трещиной на линии раздела сред изучалось также в работах [3—8]. Рассмат-

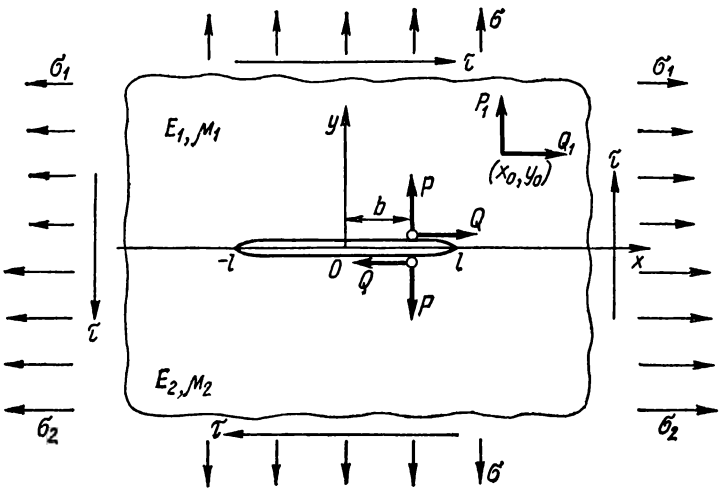


Рис. 7.1. Трещина конечной длины на линии раздела сред в составной бесконечной плоскости.

ривался также случай трещины на линии спая двух анизотропных полуплоскостей [9, 10].

В указанных выше работах анализ трещины на линии раздела сред приводит к противоречию: при постановке задачи берега трещины предполагаются не контактирующими и свободными от нагрузки, однако построенное решение вследствие возникающих осциллирующих особенностей приводит к перекрыванию берегов трещины в некоторой окрестности ее вершин. Отметим работы [11—14], в которых рассматриваются различные модели межфазной трещины, свободные от данного противоречия.

Полубесконечная трещина. Пусть на берегах полубесконечной трещины на линии спая двух разнородных полуплоскостей действуют сосредоточенные силы P и Q (рис. 7.2). КИН даются выражениями [1]

$$K_{\mathrm{I}} = \sqrt{2/(\pi b)}\,[P\cos(\varepsilon \ln b) + Q\sin(\varepsilon \ln b)],$$

$$K_{\mathrm{II}} = \sqrt{2/(\pi b)}\,[Q\cos(\varepsilon \ln b) - P\sin(\varepsilon \ln b)],$$

где ε определяется формулой (7.3).

Система коллинеарных трещин. Пусть две разнородных полубесконечных пластины спаяны вдоль отрезка длиной $2a$. На бесконечности действу-

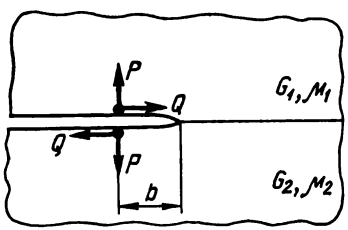


Рис. 7.2. Полубесконечная трещина на линии раздела сред в составной бесконечной плоскости.

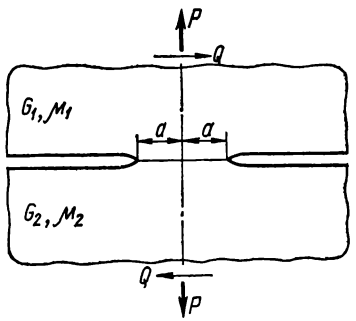


Рис. 7.3. Две полубесконечные трещины на линии раздела сред в составной бесконечной плоскости.

ют растягивающие и сдвигающие усилия с главными векторами P и Q, а вращение отсутствует (рис. 7.3). КИН равны [15]

$$K_{\mathrm{I}} = e^{\pi\varepsilon}\,[P\cos(\varepsilon \ln 2a) + Q\sin(\varepsilon \ln 2a)]/\sqrt{\pi a},$$

$$K_{\mathrm{II}} = e^{\pi\varepsilon}\,[Q\cos(\varepsilon \ln 2a) - P\sin(\varepsilon \ln 2a)]/\sqrt{\pi a},$$

где ε дается соотношением (7.3).

Рассматривалось упругое равновесие составной плоскости с двумя [16, 17] и тремя [17] коллинеарными межфазными трещинами конечной длины, а также с двумя полубесконечными и одной конечной трещинами [5, 15].

Периодическая система коллинеарных трещин. Пусть на линии раздела сред расположен бесконечный ряд одинаковых трещин длиной $2l$, расстояние между центрами соседних трещин равно $2b$ (рис. 7.4). На бесконечности заданы нормальная и сдвигающая нагрузки, причем имеет место соотношение (7.1) или (7.2). КИН определяются по формулам [1]

$$K_{\mathrm{I}} = \{2\sqrt{b}/[\mathrm{ch}\,\pi\varepsilon\sqrt{\sin(\pi l/b)}]\}\,\{\sigma\{\sin(\pi l/2b)\,\mathrm{ch}(\pi l\varepsilon/b)\times$$

$$\times\cos\{\varepsilon\ln[(2b/\pi)\sin(\pi l/b)]\} +$$

$$+\cos(\pi l/2b)\,\mathrm{sh}(\pi l\varepsilon/b)\sin\{\varepsilon\ln[(2b/\pi)\sin(\pi l/b)]\}\} +$$

$$+\tau\{\sin(\pi l/2b)\,\mathrm{ch}(\pi l\varepsilon/b)\sin\{\varepsilon\ln[(2b/\pi)\sin(\pi l/b)]\} -$$

$$-\cos(\pi l/2b)\,\mathrm{sh}(\pi l\varepsilon/b)\cos\{\varepsilon\ln[(2b/\pi)\sin(\pi l/b)]\}\},$$

$$K_{II} = \{2\sqrt{\tilde{b}}/[\operatorname{ch} \pi\varepsilon \sqrt{\sin(\pi l/\tilde{b})}]\} \{\tau \{\sin(\pi l/2b) \operatorname{ch}(\pi l\varepsilon/b) \times$$
$$\times \cos\{\varepsilon \ln[(2b/\pi)\sin(\pi l/b)]\} +$$
$$+ \cos(\pi l/2b) \operatorname{sh}(\pi l\varepsilon/b) \sin\{\varepsilon \ln[(2b/\pi)\sin(\pi l/b)]\}\} -$$
$$- \sigma\{\sin(\pi l/2b) \operatorname{ch}(\pi l\varepsilon/b) \sin\{\varepsilon \ln[(2b/\pi)\sin(\pi l/b)]\} -$$
$$- \cos(\pi l/2b) \operatorname{sh}(\pi l\varepsilon/b) \cos\{\varepsilon \ln[(2b/\pi)\sin(\pi l/b)]\}\}\},$$

где ε дается соотношением (7.3).

Периодическая система трещин на линии раздела сред в составной бесконечной плоскости изучалась также в работах [18, 19].

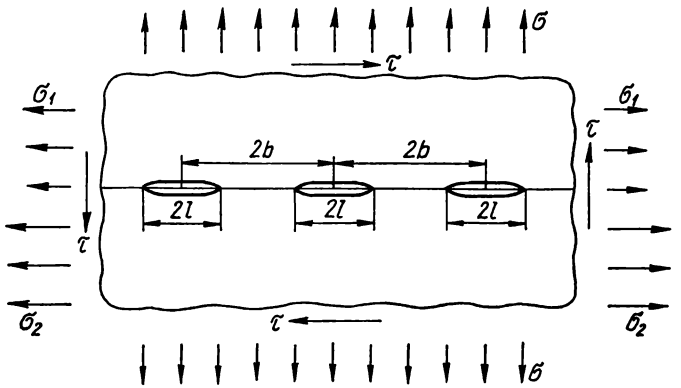


Рис. 7.4. Периодическая система коллинеарных трещин на линии раздела сред в составной бесконечной плоскости.

7.2. Две спаянные полубесконечные пластины с трещинами, перпендикулярными линии раздела сред

Внутренние трещины. Пусть в верхней полуплоскости имеется трещина длиной $2l$, перпендикулярная линии спая полубесконечных пластин (рис. 7.5). На бесконечности заданы растягивающие напряжения σ_1 и σ_2, причем они связаны между собой зависимостью (7.1) или (7.2) (при $\sigma = 0$). Значения КИН, полученные методом массовых сил [20], приведены в табл. 7.1 для случая плоского напряженного состояния при $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$ (для случая плоской деформации это соответствует $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}23$).

В работах [21—23] исследуется поведение КИН при приближении трещины (см. рис. 7.5) к линии раздела сред. Показано, что [22]

$$K_I(B) = \sqrt{\delta}\left\{\sum_{k=1}^{N} A_k \delta^{s_k - 2} + O(\delta^{3s_1 - 4})\right\},$$

$$K_I(A) = \tilde{K}_I(A)\{1 + O(\delta^{2s_1 - 2})\}, \qquad \delta = (d - l)/(d + l),$$

где $\tilde{K}_I(A)$ — КИН $K_I(A)$, когда вершина A находится на линии раздела сред; A_k — постоянные, не зависящие от δ; s_k — действительные корни

Таблица 7.1. Значения КИН $K_I(A)/(\sigma_1\sqrt{\pi l}) = F_I(A)$ и $K_I(B)/(\sigma_1\sqrt{\pi l})$ трещиной, перпендикулярной линии раздела сред (плоское напряженное сос

$\frac{d}{l}$	$\Gamma = G_2/G_1 = 0$		$\Gamma = 0{,}25$		$\Gamma = 0{,}5$	
	$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_I(A)$	$F_I(B)$
1,0	1,586	—	1,144	—	1,065	—
1,04	1,266	2,313	1,115	1,533	1,056	1,250
1,10	1,211	1,759	1,097	1,341	1,048	1,170
1,16	1,179	1,549	1,085	1,258	1,043	1,129
1,2	1,163	1,464	1,079	1,222	1,040	1,112
1,4	1,112	1,254	1,057	1,128	1,029	1,066
1,6	1,084	1,168	1,043	1,086	1,022	1,045
1,8	1,066	1,120	1,035	1,063	1,018	1,033
2,0	1,054	1,091	1,028	1,048	1,015	1,025
2,4	1,038	1,058	1,020	1,031	1,011	1,016
3,0	1,025	1,035	1,013	1,018	1,007	1,010
4,0	1,014	1,018	1,008	1,010	1,004	1,005
10,0	1,002	1,003	1,001	1,001	1,001	1,001

уравнения

$$\cos \pi s + \alpha_1 - \beta (s-1)^2 = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

$$\alpha_1 = (1/2)\,[(G_1 - G_2)/(G_1 + \varkappa_1 G_2) + (G_1\varkappa_2 - G_2\varkappa_1)/(G_1\varkappa_2 + G_2)],$$

$$\beta = 2\,(G_1 - G_2)/(G_1 + \varkappa_1 G_2),$$

N — число действительных корней при $\operatorname{Re} s > 1$. В частности, когда $G_2/G_1 = 1/3$, $\varkappa_1 = 2$, $\varkappa_2 = 3/2$, имеем $N = 2$, $s_1 = 1{,}404135$, $s_2 = 2{,}221791$; при $G_2/G_1 = 3$, $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = 3/2$ будет $N = 1$, $s_1 = 1{,}635275$. Вообще, при $G_2/G_1 > 1$ $K_I(B) \to 0$, а при $G_2/G_1 < 1$ $K_I(B) \to \infty$

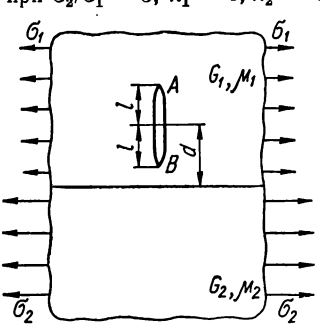


Рис. 7.5. Составная бесконечная пластина с внутренней трещиной, перпендикулярной линии раздела сред.

Данные по КИН для составной пластины с внутренней трещиной, перпендикулярной линии раздела сред, имеются также в работах [24—30]. Рассматривался также случай двух коллинеарных трещин, перпендикулярных линии раздела сред и находящихся в разных полуплоскостях [25, 27, 30].

Трещины, выходящие на линию раздела сред. В случае, когда трещина выходит на линию раздела (см. рис. 7.5; $d = l$), решение задачи может быть получено в квадратурах [31, 32]. В табл. 7.2 приведены значения КИН при растяжении составной плоскости для соединений алюминий — эпоксид ($G_1/G_2 = 23{,}08$) и бор — эпоксид ($G_1/G_2 = 138{,}46$), полученные в результате численного решения СИУ [26]. Здесь λ_1 — первый корень характеристического уравнения (1.29), определяющий порядок сингулярности напряжений в вершине трещины, лежащей на линии раздела. Данные по КИН для конечной трещины, выходящей под прямым углом на линию раздела сред в составной плоскости, имеются также в работах [20, 29, 33, 34].

$= F_I(B)$ при растяжении составной бесконечной пластины с внутренней тояние, $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$) [20]

Γ 0,2		$\Gamma = 0{,}4$		$\Gamma = \infty$	
$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_I(A)$	$F_I(B)$
0,950	—	0,916	—	0,867	—
0,955	0,806	0,922	0,670	0,874	0,482
0,960	0,861	0,929	0,759	0,885	0,609
0,963	0,890	0,936	0,807	0,894	0,681
0,966	0,903	0,939	0,829	0,899	0,716
0,974	0,941	0,954	0,894	0,921	0,821
0,979	0,959	0,963	0,927	0,937	0,874
0,983	0,970	0,970	0,945	0,948	0,906
0,986	0,977	0,975	0,958	0,957	0,927
0,990	0,985	0,982	0,972	0,969	0,952
0,994	0,991	0,988	0,983	0,979	0,971
0,996	0,995	0,993	0,991	0,988	0,984
0,999	0,999	0,999	0,999	0,998	0,998

Пусть на берегах полубесконечной трещины, выходящей под прямым углом на линию раздела сред кусочно-однородной плоскости, действуют растягивающие силы P (рис. 7.6). Точное решение задачи имеет вид [26]

$$K_I = \sqrt{2\pi} P b^{\lambda_1 - 1} m (1 + \varkappa_1) [(2\lambda_1 - 1)(m + \varkappa_2) +$$

$$+ (3 - 2\lambda_1)(1 + m\varkappa_1)]/[2\pi\alpha \sin \pi\lambda_1 + 2\beta(1 - \lambda_1)],$$

где λ_1 $(0 < \lambda_1 < 1)$ — первый корень характеристического уравнения (1.29), $m = G_2/G_1$, $\alpha = (m + \varkappa_2)(1 + m\varkappa_1)$, $\beta = -4(m + \varkappa_2)(1 - m)$.

Таблица 7.2. **Значения КИН $K_I(A)/(\sigma_1\sqrt{\pi l}) = F_I(A)$ и $K_I(B)/(\sigma_1\sqrt{\pi l^{\lambda_1}}) = F_I(B)$ и показателя сингулярности напряжений λ_1 при растяжении составной бесконечной плоскости с трещиной, выходящей на линию раздела [26]**

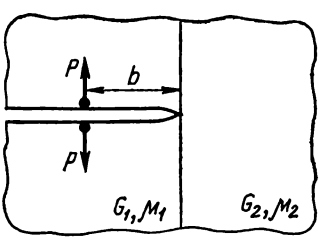
G_2/G_1	Плоское напряженное состояние			Плоская деформация		
	λ_1	$F_I(A)$	$F_I(B)$	λ_1	$F_I(A)$	$F_I(B)$
23,08	0,2890	0,8789	4,1760	0,3381	0,8827	2,7845
0,043	0,8272	1,3525	0,0744	0,8248	1,3552	0,0700
138,46	0,2666	0,8706	4,9218	0,3234	0,8751	3,0723
0,0072	0,9251	1,5087	0,0079	0,9258	1,5102	0,0078

Трещины, пересекающие линию раздела сред. Пусть трещина конечной длины пересекает линию раздела сред под прямым углом (рис. 7.7). На бесконечности заданы растягивающие напряжения σ_1 и σ_2, причем они связаны между собой зависимостью (7.1) или (7.2) (при $\sigma = 0$). Значения КИН, полученные методом массовых ил [20], приведены в табл. 7.3.

Данные по КИН для трещины, пересекающей линию спая двух разнородных полуплоскостей, имеются также в работах [25, 27, 29, 35].

Таблица 7.3. Значения $K_I(A)/(\sigma_1\sqrt{\pi l}) = F_I(A)$ и $K_I(B)/(\sigma_2\sqrt{\pi l})$ — линию раздела сред (плоское напряженное состояние, $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$) [20]

$\frac{G_2}{G_1}$	0	0,25		0,5	
	$F_I(A)$	$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_I(A)$	$F_I(B)$
0	1,587	1,419	2,547	1,296	1,754
0,1	1,260	1,249	1,861	1,178	1,447
0,2	1,173	1,168	1,556	1,118	1,295
0,3	1,123	1,119	1,382	1,082	1,204
0,4	1,090	1,086	1,271	1,058	1,144
0,5	1,065	1,062	1,192	1,041	1,102
0,6	1,047	1,044	1,134	1,028	1,071
0,8	1,019	1,018	1,054	1,011	1,028
1,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000



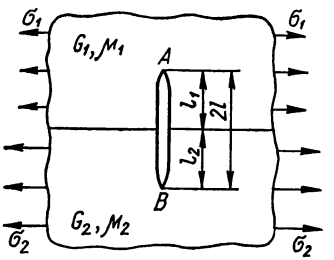
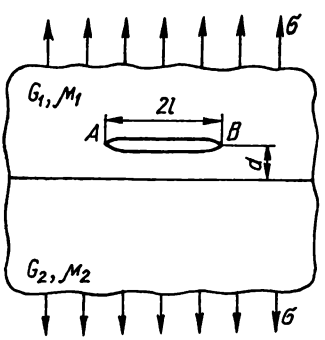


Рис. 7.6. Составная бесконечная пластина с полубесконечной трещиной, выходящей на линию раздела сред.

Рис. 7.7. Составная бесконечная пластина с трещиной конечной длины, пересекающей линию раздела сред.



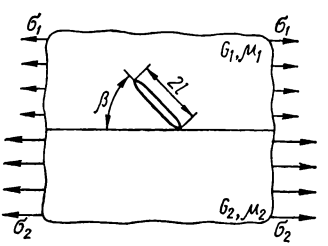


Рис. 7.8. Составная бесконечная пластина с трещиной, параллельной линии раздела сред.

Рис. 7.9. Составная бесконечная пластина с трещиной, выходящей под произвольным углом на линию раздела сред.

$F_I(B)$ при растяжении составной пластины с трещиной, пересекающей

l_2/l_1						
1,0		2,0		4,0		∞
$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_I(A)$	$F_I(B)$	$F_I(B)$
1,122	1,257	0,916	0,995	0,710	0,887	0,867
1,062	1,153	0,911	0,981	0,750	0,905	0,889
1,032	1,097	0,915	0,977	0,786	0,920	0,907
1,015	1,064	0,922	0,976	0,818	0,933	0,923
1,006	1,043	0,932	0,977	0,849	0,945	0,938
1,000	1,028	0,943	0,980	0,877	0,956	0,950
0,998	1,019	0,954	0,983	0,904	0,966	0,962
0,997	1,006	0,977	0,991	0,954	0,984	0,982
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

7.3. Две спаянные полубесконечные пластины с трещинами различной ориентации

Внутренние трещины произвольной ориентации. Пусть в составной пластине имеется свободная от нагрузки трещина, параллельная линии раздела сред. На бесконечности заданы растягивающие напряжения σ, действующие в направлении, перпендикулярном линии трещины (рис. 7.8). Значения КИН, полученные методом массовых сил [20], приведены в табл. 7.4.

Данные по КИН для трещины, параллельной линии раздела сред, имеются также в работе [36]. Рассматривались случаи произвольно ориентированных прямолинейных трещин [29, 30, 37, 38], а также изучалась криволинейная трещина вдоль дуги окружности [39].

Трещины, выходящие на линию раздела сред под произвольным углом. Пусть прямолинейная трещина длиной $2l$ выходит под произвольным углом β на линию раздела сред (рис. 7.9). Берега трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы растягивающие напряжения σ_1 и σ_2, связанные между собой равенством (7.1) или (7.2) (при $\sigma = 0$). Значения КИН в вершине A, полученные методом массовых сил [20], приведены в табл. 7.5.

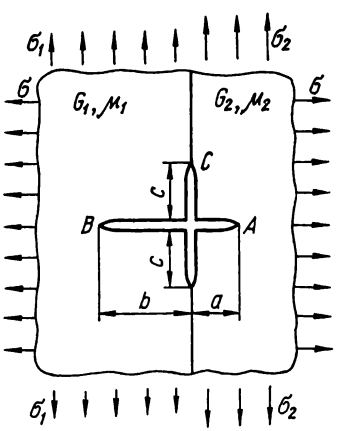


Рис. 7.10. Составная бесконечная пластина с трещиной на линии раздела сред с ответвлениями.

Известны также данные по КИН, когда из точки на линии спая исходят две трещины, находящиеся в одной [40] или разных [20] полуплоскостях, составляющих пластину. Рассматривался также случай трехзвенной трещины ветвления, когда точка ветвления лежит на линии раздела [20].

Таблица 7.4. Значения КИН $K_I(B)/(\sigma\sqrt{\pi l}) = F_I$ и $K_{II}(B)/(\sigma\sqrt{\pi l})$ параллельной линии раздела сред (плоское напряженное состояние, $\mu_1 = \mu_2$

$\frac{d}{l}$	0		0,25		0,5	
	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
0,02	...	...	1,479	0,385	1,196	0,162
0,05	13,99	8,85	1,468	0,286	1,190	0,121
0,1	5,949	3,031	1,437	0,231	1,176	0,095
0,2	2,905	0,994	1,372	0,178	1,152	0,072
0,3	2,081	0,494	1,305	0,133	1,130	0,056
0,4	1,714	0,289	1,245	0,097	1,108	0,043
0,5	1,511	0,185	1,197	0,071	1,090	0,032
0,6	1,385	0,125	1,160	0,052	1,075	0,024
0,8	1,240	0,064	1,108	0,029	1,052	0,014
1,0	1,163	0,037	1,077	0,017	1,038	0,008
1,5	1,078	0,012	1,038	0,006	1,019	0,003
2,0	1,045	0,005	1,022	0,003	1,011	0,001

Таблица 7.5. Значения КИН $K_I(A)/(\sigma_1 \sin^2\beta\sqrt{\pi l}) = F_I$ и $K_{II}(A)/(\sigma_1 \sin\beta\cos\beta\sqrt{\pi l}) = F_{II}$ при растяжении составной бесконечной пластины с трещиной, выходящей на линию раздела сред под углом β (плоское напряженное состояние, $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$) [20]

$\frac{G_2}{G_1}$	β						
	$\pi/2$	$\pi/3$		$\pi/4$		$\pi/6$	
	F_I	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
0	1,586	1,735	0,998	1,994	1,032	2,608	1,106
0,05	1,349	1,436	1,062	1,576	1,090	1,896	1,148
0,1	1,260	1,325	1,053	1,428	1,078	1,660	1,125
0,25	1,144	1,179	1,037	1,234	1,052	1,360	1,083
0,5	1,065	1,080	1,021	1,104	1,028	1,160	1,042
0,75	1,025	1,031	1,009	1,040	1,012	1,060	1,018
1,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,5	0,969	0,963	0,988	0,952	0,984	0,924	0,977
2,0	0,950	0,940	0,979	0,922	0,972	0,880	0,961
3,0	0,928	0,913	0,968	0,888	0,958	0,832	0,942
4,0	0,916	0,897	0,961	0,868	0,948	0,804	0,931
5,0	0,907	0,888	0,956	0,856	0,942	0,784	0,921
10,0	0,889	0,865	0,945	0,828	0,930	0,744	0,903
∞	0,867	0,840	0,928	0,794	0,912	0,692	0,882

$= F_{II}$ при растяжении составной бесконечной пластины с трещиной, $= 0{,}3$) [20]

G_2/G_1					
2,0		4,0		∞	
F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
0,852	—0,116	0,767	—0,192	0,633	—0,285
0,872	—0,087	0,789	—0,145	0,676	—0,219
0,883	—0,067	0,808	—0,112	0,710	—0,172
0,899	—0,049	0,836	—0,081	0,752	—0,125
0,913	—0,038	0,857	—0,063	0,784	—0,078
0,924	—0,030	0,875	—0,050	0,810	—0,077
0,935	—0,024	0,892	—0,039	0,835	—0,061
0,944	—0,018	0,907	—0,030	0,857	—0,047
0,959	—0,011	0,932	—0,018	0,893	—0,029
0,970	—0,007	0,949	—0,012	0,920	—0,018
0,984	—0,003	0,973	—0,004	0,957	—0,007
0,991	—0,001	0,984	—0,002	0,974	—0,003

Трещины на линии раздела сред с ответвлениями в одну или обе полуплоскости. Пусть на линии спая двух разнородных полуплоскостей имеется трещина, из центра которой под прямым углом к линии раздела выходят два ответвления в разные полуплоскости (рис. 7.10). Берега трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы растягивающие напряжения σ, σ_1 и σ_2, связанные между собой зависимостями (7.1) или (7.2). Значения КИН, полученные методом СИУ [35], приведены в табл. 7.6 и 7.7.

Имеются также данные по КИН, когда из трещины на линии раздела отходит ответвление под произвольным углом [41, 42].

Таблица 7.6. **Значения КИН для трещины на линии раздела сред с ответвлением в одну из спаянных полуплоскостей ($a = 0$) при растяжении на бесконечности для соединений алюминий — эпоксид ($G_1/G_2 = 22{,}57$; $\mu_1 = 0{,}30$; $\mu_2 = 0{,}35$) и эпоксид — алюминий ($G_1/G_2 = 0{,}044$; $\mu_1 = 0{,}35$; $\mu_2 = 0{,}30$) (плоская деформация) [35]**

$\frac{c}{b}$	Алюминий — эпоксид			Эпоксид — алюминий		
	$\frac{K_I(B)}{\sigma_1\sqrt{\pi b}}$	$\frac{K_I(C)}{\sigma_1\sqrt{\pi b}}$	$\frac{K_{II}(C)}{\sigma_1\sqrt{\pi b}}$	$\frac{K_I(B)}{\sigma_1\sqrt{\pi b}}$	$\frac{K_I(C)}{\sigma_2\sqrt{\pi b}}$	$\frac{K_{II}(C)}{\sigma_2\sqrt{\pi b}}$
0,005	0,9746	0,0430	0,1916	0,6245	0,1192	0,3747
0,010	0,9814	0,0483	0,1979	0,6251	0,1262	0,2801
0,015	0,9861	0,0541	0,1820	0,6258	0,1338	0,2035
0,050	1,0025	0,0873	0,1181	0,6328	0,1571	0,0561
0,075	1,0090	0,1060	0,0971	0,6387	0,1656	0,0559
0,100	1,0136	0,1224	0,0829	0,6448	0,1725	0,0658
0,150	1,0197	0,1510	0,0640	0,6577	0,1842	0,0804
4,0	0,7073	0,8575	—0,1111	0,3101	0,7023	0,1000

Таблица 7.7. Значения КИН $K_I/(\sigma_1\sqrt{\pi b}) = F_I$ и $K_{II}/(\sigma_1\sqrt{\pi b}) = F_{II}$ для трещины на линии раздела сред с ответвлениями в обе спаянные полуплоскости при растяжении на бесконечности для соединения алюминий — эпоксид ($G_1/G_2 = 22,57$; $\mu_1 = 0,30$; $\mu_2 = 0,35$) при $c = 0,1b$ (плоская деформация) [35]

$\frac{a}{b}$	F_I (A)	F_I (B)	F_I (C)	F_{II} (C)	$\frac{a}{b}$	F_I (A)	F_I (B)	F_I (C)	F_{II} (C)
0	—	1,014	0,122	0,083	0,80	0,187	1,157	0,109	—0,036
0,05	0,133	1,023	0,109	0,048	1,00	0,198	1,182	0,121	—0,031
0,10	0,148	1,038	0,086	0,009	1,50	0,229	1,238	0,147	—0,027
0,20	0,151	1,062	0,069	—0,020	2,00	0,257	1,287	0,168	—0,016
0,40	0,161	1,099	0,078	—0,032	4,00	0,347	1,447	0,227	0,092
0,60	0,174	1,129	0,094	—0,035					

7.4. Бесконечная пластина с эллиптическими (круговыми) включениями и трещинами

Трещина внутри включения. Пусть бесконечная пластина содержит круговое включение радиуса R, ослабленное диаметральной трещиной длины $2l = b - a$. Между пластиной и включением имеют место условия идеального контакта. Берега трещины свободны от нагрузки, на бесконечности заданы растягивающие напряжения σ (рис. 7.11). Значения КИН, полученные методом СИУ [43], приведены в табл. 7.8. При приближении

Таблица 7.8. Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi l}) = F_I$ при растяжении бесконечной пластины с круговым включением, ослабленным трещиной ($\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1,8$) [43]

$\frac{a}{R}$	$\frac{b}{R}$	$G_2/G_1 = 3$		$G_2/G_1 = 1/3$	
		F_I (a)	F_I (b)	F_I (a)	F_I (b)
—0,9	—0,75	1,324	1,309	0,5886	0,5950
—0,9	—0,5	1,451	1,376	0,5416	0,5684
—0,9	—0,25	1,572	1,438	0,5032	0,5452
—0,9	0	1,684	1,501	0,4719	0,5219
—0,9	0,25	1,790	1,572	0,4450	0,4969
—0,9	0,50	1,890	1,664	0,4220	0,4682
—0,9	0,75	1,990	1,822	0,4020	0,4300
—0,9	1,00	2,140	$\to\infty$	0,3830	$\to 0$
—0,75	—0,5	1,314	1,306	0,5917	0,5950
—0,75	—0,25	1,389	1,359	0,5596	0,5710
—0,75	0	1,475	1,419	0,5266	0,5448
—0,75	0,25	1,564	1,492	0,4958	0,5166
—0,75	0,5	1,655	1,588	0,4681	0,4847
—0,75	0,75	1,752	1,752	0,4437	0,4437
—0,75	1,0	1,907	$\to\infty$	0,4212	$\to 0$
—0,1	0,1	1,283	1,283	0,6046	0,6046
—0,25	0,25	1,332	1,332	0,5796	0,5796
—0,50	0,50	1,491	1,491	0,5144	0,5144
—0,90	0,90	2,062	2,062	0,3900	0,3900

трещины к линии раздела сред КИН стремится к бесконечности (при $G_2/G_1 > > 1$) или к нулю (при $G_2/G_1 < 1$). При выходе трещины на линию раздела сред напряжения получают особенность, характеризующуюся показателем λ_1, отличным от $+1/2$. Для последнего случая значения КИН приведены в табл. 7.9 и 7.10.

Данные по КИН для трещины в круговом включении имеются также в работах [29, 44]. Рассматривался также случай эллиптического включения с симметричной трещиной [45].

Трещина, пересекающая линии раздела сред. Пусть бесконечная пластина с круговым включением ослаблена радиальной трещиной, пересекающей

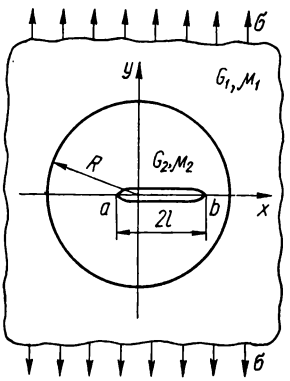


Рис. 7.11. Растяжение бесконечной пластины с круговым включением, ослабленным диаметральной трещиной.

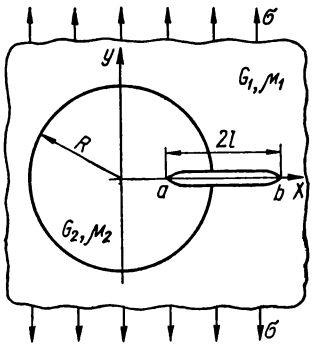


Рис. 7.12. Растяжение бесконечной пластины с круговым включением и радиальной трещиной, пересекающей линию раздела сред.

линию раздела (рис. 7.12). Берега трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы растягивающие напряжения σ. Значения КИН, полученные методом СИУ [43], приведены в табл. 7.11. В случае, когда трещина выходит на линию раздела со стороны пластины, однако включение остается сплошным ($a = R$), значения КИН даны отдельно в табл. 7.12.

Таблица 7.9. **Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi}l^{\lambda_1}) = F_1$ и показателя сингулярности напряжений λ_1 при растяжении бесконечной пластины с круговым включением, ослабленным трещиной с вершиной на линии раздела сред ($b/R = 1$) при $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1{,}8$ [43]**

$\frac{G_2}{G_1}$	$\frac{a}{R}$	$\lambda_1\,(a)$	$\lambda_1\,(b)$	$F_I\,(a)$	$F_I\,(b)$
3	—0,75	0,5	0,62049	1,907	0,6175
	—0,90	0,5	0,62049	2,140	0,6300
	—1,0	0,62049	0,62049	0,7920	0,7920
$1/3$	—0,75	0,5	0,40074	0,4212	0,9550
	—0,90	0,5	0,40074	0,3830	0,9400
	—1,0	0,40074	0,40074	0,9330	0,9330

Таблица 7.10. Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi R^{\lambda_1}}) = F_I$ и показателя сингулярности напряжений λ_1 при растяжении бесконечной пластины с круговым включением, которое полностью пересекается диаметральной трещиной ($a/R = -1$, $b/R = 1$) [43]

$\frac{G_2}{G_1}$	$\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1.8$		$\varkappa_1 = 2,2$; $\varkappa_2 = 1,8$		$\varkappa_1 = 1,8$; $\varkappa_2 = 2,2$		$\varkappa_1 = \varkappa_2 = 2,2$	
	λ_1	F_I	λ_1	F_I	λ_1	F_I	λ_1	F_I
0,2	0,36621	0,7890	0,38087	0,7848	0,32027	1,046	0,33845	1,010
0,6	0,45025	1,014	0,47028	0,9456	0,42123	1,174	0,44466	1,068
1,0	0,5	1,0	0,51991	0,9209	0,47724	1,107	0,5	1,0
2,0	0,57451	0,8843	0,59188	0,8165	0,55687	0,9465	0,57624	0,8613
5,0	0,67885	0,6555	0,69124	0,6194	0,66380	0,6940	0,67733	0,6500

Таблица 7.11. Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi l}) = F_I$ при растяжении бесконечной пластины с круговым включением и радиальной трещиной, пересекающей линию раздела сред ($\varkappa_1 = 1,6$; $\varkappa_2 = 1,8$; $G_2/G_1 = 23,077$) [43]

$\frac{a}{R}$	$\frac{b}{R}$	$F_I(b)$	$F_I(a)$	$\frac{a}{R}$	$\frac{b}{R}$	$F_I(b)$	$F_I(a)$
0	1,1	0,548	3,564	—0,3	1,5	0,670	4,570
0	1,3	0,513	3,701	—0,1	1,5	0,598	4,034
0	1,5	0,570	3,756	0,1	1,5	0,547	3,481
0	1,7	0,626	3,799	0,3	1,5	0,518	2,956
0	1,9	0,672	3,838	0,5	1,5	0,510	2,465
0	2,1	0,710	3,874	0,7	1,5	0,525	1,981
0	2,5	0,765	3,935	0,9	1,5	0,572	1,383
0	3,0	0,811	3,996	0,1	1,1	0,487	3,377
—0,9	1,5	0,920	5,600	0,3	1,3	0,425	2,978
—0,7	1,5	0,954	5,242	0,7	1,7	0,619	1,961
—0,5	1,5	0,757	5,003	0,9	1,9	0,731	1,401

Таблица 7.12. Значения КИН $K_I(b)/(\sigma\sqrt{\pi l}) = F_I(b)$, $K_I(a)/(\sigma\sqrt{\pi l^{\lambda_1}}) = F_I(a)$ и показателя сингулярности напряжений λ_1 при растяжении бесконечной пластины с трещиной, выходящей на контур кругового включения ($a = R$, $b/R = 2$, $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1,8$) [29, 43]

G_2/G_1	λ_1	$F_I(b)$	$F_I(a)$	G_2/G_1	λ_1	$F_I(b)$	$F_I(a)$
0	—	1,940	—	10,0	0,33277	0,7969	1,389
0,05	0,81730	1,615	1,053	23,0	0,30959	0,7796	1,375
1/3	0,62049	1,229	0,5836	100	0,29387	0,7691	1,345
1,0	0,5	1,000	1,000	300	0,28883	0,7667	1,348
3,0	0,40074	0,8610	1,299				

Таблица 7.13. Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi l}) = F_I$ и $K_{II}/(\sigma\sqrt{\pi l}) = F_{II}$ при растяжении бесконечной пластины с круговым включением и прямолинейной трещиной ($R = 2l$, $\varkappa_1 = 1{,}6$, $\varkappa_2 = 1{,}8$) [48]

$\frac{b}{l}$	$\frac{a}{l}$	$G_2/G_1 = 0$				$G_2/G_1 = 23$			
		F_I (B)	F_I (A)	F_{II} (B)	F_{II} (A)	F_I (B)	F_I (A)	F_{II} (B)	F_{II} (A)
0,3	3	1,607	4,267	0,072	—0,391	0,784	0,225	—0,004	0,072
0,5	3	1,544	3,070	0,113	—0,412	0,792	0,341	—0,006	0,101
1,0	3	1,430	1,969	0,177	—0,316	0,817	0,613	—0,005	0,057
1,5	3	1,357	1,552	0,184	—0,241	0,832	0,763	0,008	—0,007
2	3	1,299	1,337	0,150	—0,243	0,860	0,845	0,034	—0,021
3	3	1,189	1,083	0,052	—0,282	0,905	0,953	0,089	—0,001
4	3	1,091	0,957	0,011	—0,261	0,951	1,014	0,117	0,002
8	3	0,955	0,911	—0,014	—0,114	1,020	1,043	0,088	—0,026
∞	3	1,0	1,0	0	0	1,0	1,0	0	0
1	2,8	1,562	2,700	0,206	—0,790	0,781	0,483	0,002	0,167
1	3,5	1,274	1,548	0,134	—0,047	0,878	0,752	—0,012	—0,047
1	4	1,193	1,364	0,107	0,023	0,914	0,833	—0,012	—0,068
1	6	1,070	1,109	0,048	0,032	0,970	0,952	—0,006	—0,041
1	8	1,036	1,049	0,025	0,015	0,985	0,980	—0,002	—0,021
1	10	1,022	1,028	0,014	0,007	0,991	0,989	—0,004	—0,012
1	∞	1,0	1,0	0	0	1,0	1,0	0	0

Данные по КИН для трещины, пересекающей или выходящей на круговую границу раздела включения и матрицы, имеются также в работах [44, 46, 47].

Трещина около включения. Пусть в растягиваемой на бесконечности пластине имеется круговое включение и прямолинейная трещина, ориентированная ортогонально к направлению растяжения (рис. 7.13). Значения КИН, полученные методом СИУ [48], приведены в табл. 7.13.

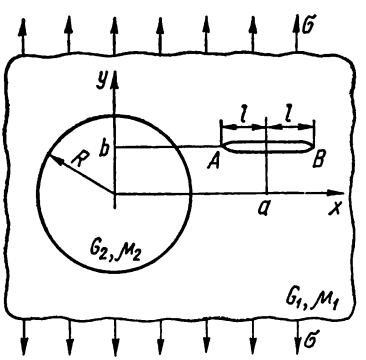


Рис. 7.13. Растяжение бесконечной пластины с круговым включением и прямолинейной трещиной.

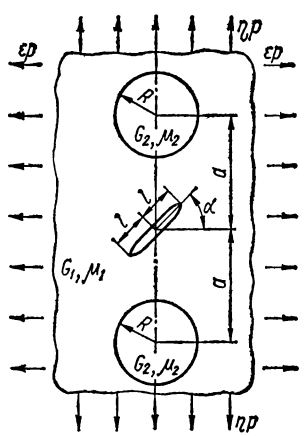


Рис. 7.14. Растяжение бесконечной пластины с двумя одинаковыми круговыми включениями и прямолинейной трещиной.

Таблица 7.14. **Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ при растяжении бесконечной пластины с двумя круговыми включениями и прямолинейной трещиной для $\alpha = 0$ (над чертой) и $\alpha = \pi/2$ (под чертой) и $l/R = 1$, $a/R = 3$ ($\varkappa_1 = \varkappa_2 = 2$) [59]**

G_2/G_1	$\eta = 0$, $\varepsilon = 1$	$\eta = 1$, $\varepsilon = 0$	$\eta = 1$, $\varepsilon = 1$	G_2/G_1	$\eta = 0$, $\varepsilon = 1$	$\eta = 1$, $\varepsilon = 0$	$\eta = 1$, $\varepsilon = 1$
0	0,2118	0,6799	0,8917	2,0	—0,0411	1,0634	1,0223
	1,2319	0,0656	1,2976		0,9556	—0,0136	0,9420
0,5	0,0519	0,9204	0,9723	2,5	—0,0513	1,0791	1,0279
	1,0562	0,0167	1,0729		0,9445	—0,0170	0,9275
1,0	0	1	1	3,0	—0,0585	1,0904	1,0319
	1	0	1		0,9366	—0,0195	0,9172
1,5	—0,0257	1,0396	1,0139				
	0,9722	—0,0085	0,9637				

Данные по КИН при взаимодействии прямолинейной трещины и кругового включения имеются также в работах [28, 29, 47, 49—54]. Рассматривался случай кругового включения и системы прямолинейных [47, 55, 56] или дугообразных [57, 58] трещин, а также изучалось взаимодействие прямолинейной трещины и эллиптического включения [59].

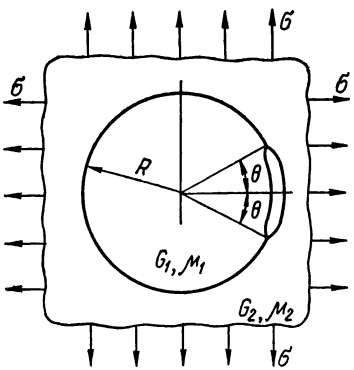


Рис. 7.15. Всестороннее растяжение бесконечной пластины с круговым включением и трещиной на линии раздела сред.

Система включений и трещин. Пусть в бесконечной пластине имеются два круговых включения радиуса R из одинакового материала. Между включениями расположена прямолинейная трещина, центр которой находится на середине отрезка, соединяющего центры включений. Берега трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности задано двухосное растяжение напряжениями εp и ηp (рис. 7.14). Значения КИН, полученные методом СИУ [59], приведены в табл. 7.14.

Данные по КИН о взаимодействии трещины с двумя круговыми включениями имеются также в работах [28, 60]. Рассматривалось взаимодействие прямолинейной трещины и двух эллиптических включений [61], а также изучалась периодическая система круговых включений и прямолинейных трещин [62].

Трещины на линии раздела сред. Пусть на контуре соединения кругового включения и бесконечной плоскости имеется трещина (рис. 7.15). КИН при действии на бесконечности растягивающих напряжений σ связаны зависимостью [63]

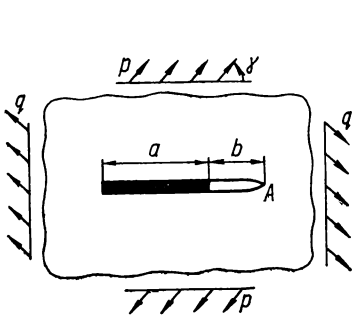
$$K_I - iK_{II} = 2i\sigma R^{i\beta}(1+\alpha)^{-1}\sqrt{\pi R\sin\theta}\,\{G_1(1+\varkappa_2)[G_1(1+\varkappa_2)+$$
$$+G_2(1+\varkappa_1)](i-2\beta)\,e^{\beta(\theta+\pi)}e^{-i\beta\ln 2\sin\theta}\}/\{(G_1+G_2\varkappa_1)[G_2(1+\varkappa_1)+$$
$$+2G_1(1+\varkappa_2)]-G_2(1+\varkappa_1)(G_2+G_1\varkappa_2)(\cos\theta-2\beta\sin\theta)\,e^{-2\beta\theta}\},$$

где $\beta = (1/(2\pi))\ln\alpha$, $\alpha = (G_1+G_2\varkappa_1)/(G_2+G_1\varkappa_2)$.

Задачи о дугообразных трещинах на контуре кругового включения в бесконечной пластине изучались также в работах [6, 7, 64—66]. Рассматривались также трещины на контуре жесткого эллиптического [67] или квадратного [68] включения.

7.5. Бесконечная пластина с тонкими упругими (жесткими) включениями и трещинами

Трещина на продолжении жесткого линейного включения. Бесконечная плоскость содержит жесткое линейное включение длиной a, на продолжении которого имеется трещина длиной b. На бесконечности плоскость находится под действием двухосного растяжения взаимно перпендикулярными усилиями p и q, причем усилия p направлены под углом γ к линии включения (рис. 7.16). Считается, что жесткое включение удерживается от поворота,



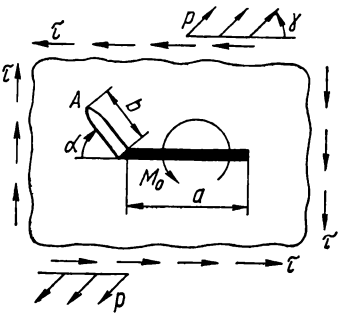


Рис. 7.16. Растяжение бесконечной плоскости с трещиной на продолжении жесткого линейного включения.

Рис. 7.17. Бесконечная плоскость с произвольно ориентированной трещиной у вершины жесткого линейного включения.

а берега трещины в процессе деформации не контактируют между собой. Точное решение этой задачи получено методом конформного отображения. КИН у вершины трещины A даются формулами [69]

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}} &= \sqrt{\pi/32}\,\{(p+q)\exp(-\beta\arccos((b-a)/(b+a)))\times \\ &\times(\sqrt{b}+2\beta\sqrt{a})+[p+q-2(p-q)\cos 2\gamma]\times \\ &\times\exp(\beta\arccos((b-a)/(b+a)))(\sqrt{b}-2\beta\sqrt{a})\}, \\ K_{\mathrm{II}} &= \sqrt{\pi/8}\,(p-q)\exp(\beta\arccos((b-a)/(b+a)))\times \\ &\times(\sqrt{b}-2\beta\sqrt{a})\sin 2\gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (7.4)$$

где $\beta = -\ln\varkappa/(2\pi)$.

В случае бесконечно малой длины трещины b из формул (7.4) следуют асимптотические разложения [70]

$$K_{\mathrm{I}} = Ak_{\mathrm{I}} + O(\sqrt{b/a}), \quad K_{\mathrm{II}} = Ak_{\mathrm{II}} + O(\sqrt{b/a}),$$

где $A = \ln\varkappa/(\pi\sqrt{\varkappa})$, k_{I}, k_{II} — коэффициенты интенсивности напряжений у вершин жесткого линейного включения длиной a при отсутствии трещины

[71]:

$$k_I = \sqrt{\pi a/32}\,[(p+q)(1-\varkappa) - 2(p-q)\cos 2\gamma],$$

$$k_{II} = \sqrt{\pi a/8}\,(p-q)\sin 2\gamma.$$

Произвольно ориентированная трещина у вершины жесткого линейного включения. Бесконечная плоскость содержит жесткое линейное включение длиной a, из вершины которого исходит произвольно ориентированная прямолинейная трещина длиной b. На бесконечности заданы растягивающие и сдвигающие напряжения, а берега трещины свободны от нагрузки.

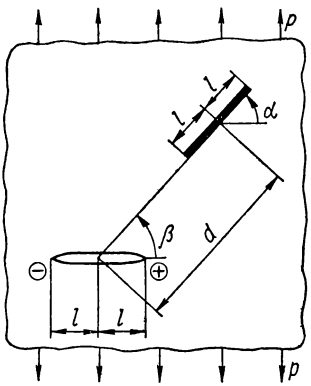


Рис. 7.18. Растяжение бесконечной плоскости с прямолинейной трещиной и линейным жестким включением одинаковой длины.

Кроме того, к включению может быть приложена внешняя нагрузка с результирующим моментом M_0 (рис. 7.17). Рассматриваются два варианта задачи, когда включение поворачивается или не поворачивается под действием внешней нагрузки. В работе [72] получено решение этой задачи методом конформного отображения при аппроксимации отображающей функции с достаточно высокой точностью рациональной функцией. На графиках для указанных видов нагрузки приведены зависимости КИН у вершины трещины A от отношения длины трещины к длине включения. При использовании этого решения в работе [73] путем экстраполяции определяются КИН у вершины трещины бесконечно малой длины ($b \to 0$). Эти результаты приводятся в табл. 7.15 (см. рис. 7.17; $p = \tau = 0$, $M_0 = M_e$), в табл. 7.16 (см. рис. 7.17; $\tau = 0$, $\alpha = \pi/4$) и в табл. 7.17 (см. рис. 7.17; $p = 0$).

Взаимодействие линейных упругих (жестких) включений и трещин. Пусть в бесконечной плоскости имеется прямолинейная трещина и линейное жесткое включение. На бесконечности пластина растягивается усилиями p ортогонально линии трещины. Берега трещины и включение свободны от внешней нагрузки (рис. 7.18). Асимптотические разложения КИН у вершин трещины при малой относительной длине включения и трещины $\lambda = 2l/d$ имеют вид [71, 74]

$$K_I^{\pm} = (p/4)\sqrt{\pi l}\,[4 + \lambda^2(1 \pm \lambda/2)(\varkappa - 1)(3 - \varkappa)/(16\varkappa) +$$

$$+ \lambda^4(1-\varkappa)(13\varkappa - 31)/(256\varkappa)] + O(\lambda^5)$$

для коллинеарных дефектов ($\beta = \alpha = 0$);

$$K_I^{\pm} = (p/4)\sqrt{\pi l}\,[4 + \lambda^2(1 \pm \lambda/2)(1 - \varkappa^2)/(16\varkappa) -$$

$$- \lambda^4(7\varkappa^2 + 4\varkappa + 19)/(256\varkappa)] + O(\lambda^5)$$

для взаимно перпендикулярных дефектов, когда центр включения расположен на линии трещины ($\beta = 0$, $\alpha = \pi/2$);

$$K_I^{\pm} = (p/4)\sqrt{\pi l}\,[4 + \lambda^2(3 - \varkappa)(5 - \varkappa)/(16\varkappa) -$$

$$- \lambda^4(13\varkappa^2 - 148\varkappa + 343)/(256\varkappa)] + O(\lambda^5),$$

$$K_{II}^{\pm} = \mp p\sqrt{\pi l}\lambda^3(3 - \varkappa)(5 - \varkappa)/(128\varkappa) + O(\lambda^5)$$

Таблица 7.15. **Значения КИН для трещины бесконечно малой длины ($b/a \to 0$) у вершины жесткого линейного включения при повороте его на угол ε ($\varkappa = 2$; $M_\varepsilon = 1{,}178G\varepsilon a^2$) [73]**

$18\alpha/\pi$	$\frac{K_I}{G\varepsilon\sqrt{\pi a/2}}$	$\frac{K_{II}}{G\varepsilon\sqrt{\pi a/2}}$	$18\alpha/\pi$	$\frac{K_I}{G\varepsilon\sqrt{\pi a/2}}$	$\frac{K_{II}}{G\varepsilon\sqrt{\pi a/2}}$	$18\alpha/\pi$	$\frac{K_I}{G\varepsilon\sqrt{\pi a/2}}$	$\frac{K_{II}}{G\varepsilon\sqrt{\pi a/2}}$
0	0,000	—0,309	6	—0,226	0,139	12	0,380	0,488
1	—0,081	—0,294	7	—0,171	0,249	13	0,523	0,443
2	—0,153	—0,247	8	—0,088	0,343	14	0,634	0,345
3	—0,208	—0,176	9	0,016	0,414	15	0,706	0,234
4	—0,242	—0,082	10	0,129	0,460	16	0,751	0,088
5	—0,249	0,025	11	0,247	0,486	17	0,730	—0,074

Таблица 7.16. **Значения КИН для трещины бесконечно малой длины ($b/a \to 0$) у вершины жесткого линейного включения при одноосном растяжении на бесконечности усилиями p под углом $\gamma = \pi/4$ к линии включения ($\varkappa = 2$) [73]**

$18\alpha/\pi$	$\varepsilon = 0$, $M_p/a^2p = -0{,}2945$		$\varepsilon \neq 0$, $M_0 = 0$	
	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi a/2}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi a/2}}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi a/2}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi a/2}}$
—17	0,186	0,125	0,004	0,107
—16	0,221	0,077	0,033	0,099
—15	0,244	0,033	0,067	0,092
—14	0,248	—0,013	0,090	0,073
—13	0,240	—0,058	0,109	0,053
—12	0,216	—0,097	0,121	0,025
—11	0,185	—0,125	0,123	—0,004
—10	0,151	—0,143	0,119	—0,028
—9	0,113	—0,153	0,109	—0,050
—8	0,072	—0,154	0,094	—0,068
—7	0,030	—0,143	0,073	—0,081
—6	—0,006	—0,121	0,051	—0,086
—5	—0,035	—0,091	0,027	—0,085
—4	—0,054	—0,055	0,007	—0,076
—3	—0,065	—0,017	—0,013	—0,061
—2	—0,063	0,020	—0,025	—0,042
—1	—0,053	0,054	—0,033	—0,020
0	—0,036	0,080	—0,036	0,003
1	—0,011	0,100	—0,031	0,027
2	0,018	0,110	—0,020	0,048
3	0,046	0,108	—0,006	0,064
4	0,073	0,098	0,013	0,078
5	0,097	0,077	0,035	0,083
6	0,113	0,047	0,056	0,082
7	0,120	0,013	0,077	0,075
8	0,118	—0,023	0,096	0,063

Продолжение табл. 7.16

$18\alpha/\pi$	$\varepsilon = 0,\ M_p/a^2p = -0{,}2945$		$\varepsilon \neq 0,\ M_0 = 0$	
	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi a/2}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi a/2}}$	$\frac{K_I}{p\sqrt{\pi a/2}}$	$\frac{K_{II}}{p\sqrt{\pi a/2}}$
9	0,105	—0,060	0,109	0,044
10	0,085	—0,093	0,117	0,022
11	0,058	—0,124	0,120	—0,003
12	0,020	—0,150	0,115	—0,028
13	—0,027	—0,164	0,104	—0,053
14	—0,074	—0,158	0,085	—0,072
15	—0,114	—0,147	0,063	—0,088
16	—0,157	—0,116	0,031	—0,094
17	—0,180	—0,083	0,003	—0,101

Таблица 7.17. **Значения КИН для трещины бесконечно малой длины ($b/a \to 0$) у вершины жесткого линейного включения при чистом сдвиге на бесконечности усилиями τ ($\varkappa = 2$) [73]**

$18\alpha/\pi$	$\varepsilon = 0,\ M_\tau/a^2\tau = 0{,}5890$		$\varepsilon \neq 0,\ M_0 = 0$	
	$\frac{K_I}{\tau\sqrt{\pi a/2}}$	$\frac{K_{II}}{\tau\sqrt{\pi a/2}}$	$\frac{K_I}{\tau\sqrt{\pi a/2}}$	$\frac{K_{II}}{\tau\sqrt{\pi a/2}}$
0	0,000	—0,161	0,000	—0,007
1	—0,042	—0,153	—0,002	—0,006
2	—0,081	—0,129	—0,004	—0,005
3	—0,110	—0,091	—0,006	—0,003
4	—0,128	—0,042	—0,007	—0,001
5	—0,131	0,014	—0,007	0,002
6	—0,119	0,073	—0,006	0,004
7	—0,090	0,130	—0,004	0,005
8	—0,046	0,178	—0,002	0,006
9	0,008	0,213	0,000	0,006
10	0,066	0,235	0,002	0,005
11	0,128	0,247	0,004	0,004
12	0,196	0,247	0,006	0,003
13	0,267	0,222	0,006	0,000
14	0,323	0,171	0,006	—0,002
15	0,358	0,114	0,005	—0,004
16	0,378	0,039	0,003	—0,005
17	0,366	—0,043	0,001	—0,006

для параллельных дефектов ($\beta = \pi/2$, $\alpha = 0$);

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} = (p/4)\sqrt{\pi l}\,[4 - \lambda^2(1+\varkappa)(3+\varkappa)/16 - \\ - \lambda^4(7\varkappa^2 + 68\varkappa - 51)/(256\varkappa)] + O(\lambda^5),$$

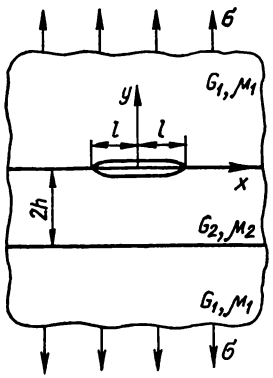
$$K_{\mathrm{II}}^{\pm} = \mp p\sqrt{\pi l}\lambda^3(1+\varkappa)(3+\varkappa)/(128\varkappa) + O(\lambda^5)$$

для взаимно перпендикулярных дефектов, когда центр трещины расположен на линии включения ($\beta = \pi/2$, $\alpha = \pi/2$).

В работах [71, 74] исследован также общий случай системы произвольно ориентированных прямолинейных трещин и жестких линейных включений. Взаимодействие тонкого упругого включения (стрингера) с трещиной рассмотрено в работах [75—79].

7.6. Слоистый композит с трещинами

Бесконечная полоса, скрепленная с двумя полуплоскостями. Пусть на линии спая полосы с полуплоскостью имеется трещина длиной $2l$. На бесконечности составная плоскость растягивается усилиями σ (рис. 7.19).



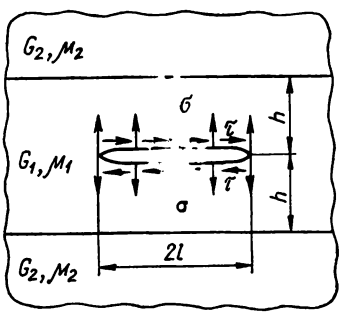


Рис. 7.19. Растяжение кусочно-однородной плоскости, составленной из бесконечной полосы и двух полуплоскостей, с трещиной на линии раздела сред.

Рис. 7.20. Трещина на средней линии бесконечной полосы, скрепленной с двумя полуплоскостями.

Задача рассмотрена методом СИУ в работах [80, 81]. Ниже приведены значения КИН $\tilde{K}_{\mathrm{I}}$ и $\tilde{K}_{\mathrm{II}}$, определяемые по формулам

$$\tilde{K}_{\mathrm{I}} - i\tilde{K}_{\mathrm{II}} = \lim_{x \to l} \sqrt{2(x-l)}\,[(x-l)/(x+l)]^{i\varepsilon}\,[\sigma_y(x, 0) - i\tau_{xy}(x, 0)],$$

$$\varepsilon = (1/(2\pi))\ln[(G_2\varkappa_1 + G_1)/(G_1\varkappa_2 + G_2)],$$

для соединения алюминий (полуплоскости) — эпоксид (полоса) ($G_2/G_1 = 0{,}045$, $\mu_1 = 0{,}3$, $\mu_2 = 0{,}35$) при плоской деформации:

h/l	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0	∞
$\tilde{K}_I/(\sigma\sqrt{l})$	0,4448	0,5525	0,6484	0,7300	0,7927	0,9302	1
$\tilde{K}_{II}/(\sigma\sqrt{l})$	—0,1621	—0,1598	—0,1476	—0,1378	—0,1326	—0,1297	—0,1342

Данные по КИН для трещин на линии раздела сред в слоистом композите имеются также в работе [25].

Пусть в составной плоскости трещина расположена на средней линии бесконечной полосы. Берега трещины находятся под действием постоянных нормальных (σ) и касательных (τ) усилий (рис. 7.20). Зависимости КИН от отношения модулей сдвига полуплоскостей и полосы G_2/G_1, полученные

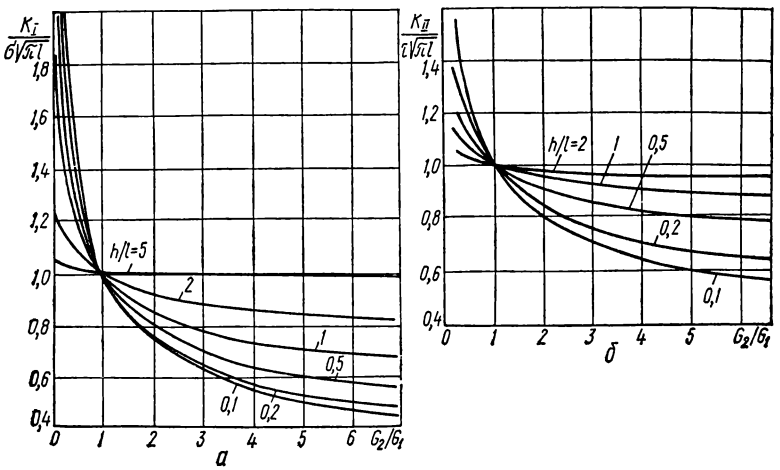


Рис. 7.21. Зависимости КИН от отношения G_2/G_1 при действии нормальной (*а*) и касательной (*б*) постоянной нагрузки на берегах трещины на средней линии полосы, скрепленной с двумя полуплоскостями (плоская деформация, $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$) [8, 82].

методом СИУ [8, 82], приведены на рис. 7.21. При малых значениях параметра h/l справедливы формулы [8]:

$$K_I - iK_{II} = (\sigma - i\tau)\sqrt{\pi l}G_1(1 + \varkappa_2)/[G_2(1 + \varkappa_1)].$$

Данные по КИН для продольных трещин в слоистом композите имеются также в работах [25, 83—89].

Пусть в полосе, скрепленной с двумя полуплоскостями, имеется центральная поперечная трещина, нагруженная постоянными нормальными (σ) и касательными (τ) усилиями (рис. 7.22). Зависимости КИН от относительной длины трещины l/h, полученные методом интегральных уравнений [8, 82], приведены на рис. 7.23.

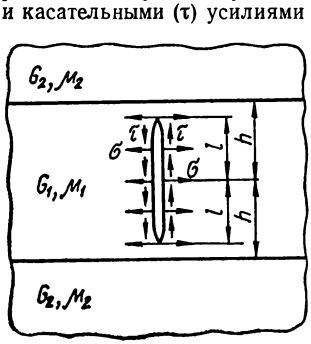


Рис. 7.22. Центральная поперечная трещина в полосе, скрепленной с двумя полуплоскостями.

Данные по КИН для поперечной трещины в полосе, скрепленной с полуплоскостями, имеются также в работах [90—92]. Рассматривался также случай периодической системы параллельных поперечных трещин в трехслойном композите [93].

Таблица 7.18. Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi h^{\lambda_1}})$ для трехслойного композита с трещиной, пересекающей полосу по всей ее ширине, при действии на берегах трещины постоянных нормальных усилий (плоская деформация) [94]

$\frac{G_2}{G_1}$	$\mu_1 = 0{,}2$		$\mu_1 = 0{,}35$		$\mu_1 = 1/3$
	$\mu_2 = 0{,}2$	$\mu_2 = 0{,}35$	$\mu_2 = 0{,}2$	$\mu_2 = 0{,}35$	$\mu_2 = 1/3$
0,1	0,249	0,289	0,228	0,258	0,28
0,5	0,644	0,836	0,542	0,683	0,70
1,0	1,000	1,343	0,789	1,000	1,00
2,0	1,611	2,128	1,122	1,408	1,44
5,0	2,881	3,587	1,657	1,945	1,96
10,0	4,084	4,769	2,042	2,266	...
30,0	5,757	6,183	2,460	2,572	...
∞	7,332	7,332	2,831	2,831	2,90

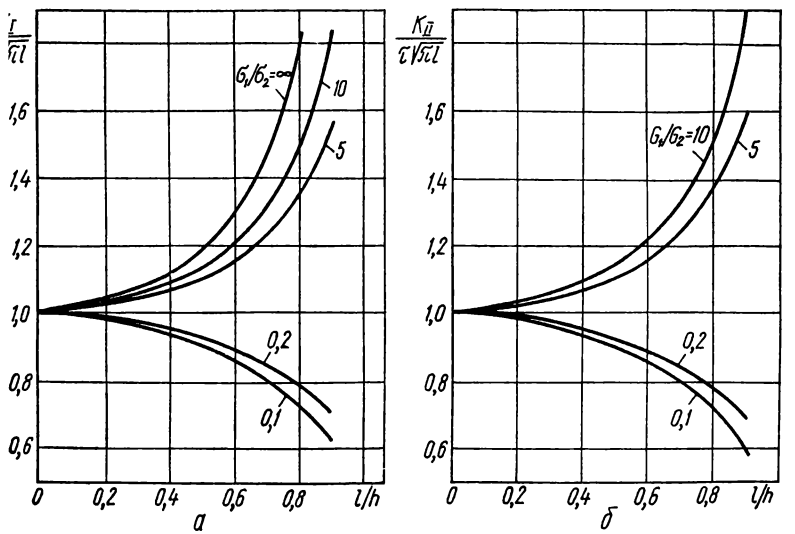


Рис. 7.23. Зависимости КИН от параметра l/h при действии нормальной (*а*) и касательной (*б*) постоянной нагрузки на берегах центральной поперечной трещины в полосе, скрепленной с двумя полуплоскостями (плоская деформация, $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$) [8, 82].

Пусть в трехслойном композите полоса пересекается поперечной трещиной по всей своей ширине (см. рис. 7.22, $l = h$). Берега трещины находятся под действием постоянного давления σ. Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi h^{\lambda_1}})$ (λ_1 — первый корень характеристического уравнения (1.29), определяющий порядок сингулярности напряжений в вершине трещины, лежащей на линии раздела сред), полученные методом СИУ [94], приведены в табл. 7.18.

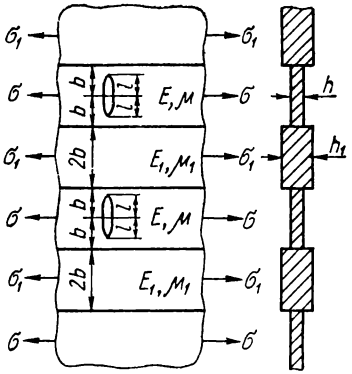
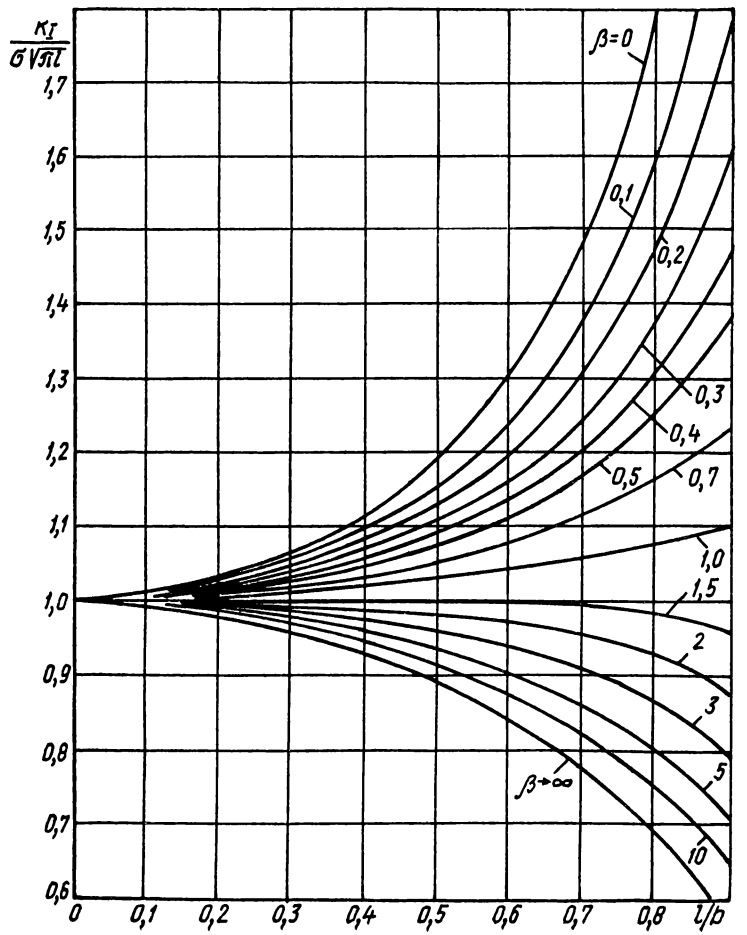


Рис. 7.24. Растяжение периодически скрепленной пластины с бесконечным рядом коллинеарных трещин.

Рис. 7.25. Зависимость КИН $K_I/\sigma\sqrt{\pi l}$ от отношения l/b при растяжении периодически подкрепленной пластины с бесконечным рядом коллинеарных трещин при различных значениях параметра $\beta = E_1 h_1/(Eh)$ ($\mu = \mu_1 = 0, 3$) [24, 28].



Данные по КИН для рассматриваемого случая расположения трещины имеются также в работе [95].

Бесконечный ряд скрепленных между собой полос. Пусть бесконечная пластина состоит из бесконечных полос одинаковой ширины $2b$, имеющих различную толщину и различные упругие свойства. Полосы периодически скреплены между собой. Составная пластина растягивается на бесконечности усилиями σ и σ_1 ($\sigma_1/E_1 = \sigma/E$), направленными ортогонально к линии трещин, которые расположены в полосах с характеристиками E, μ (рис. 7.24). Зависимости КИН от относительной длины трещины l/b, полученные методом рядов Лорана [24, 28], приведены на рис. 7.25.

Данные по КИН для слоистого композита периодической структуры с трещинами имеются также в работах [96—98].

7.7. Составная полубесконечная пластина с трещинами

Полуплоскость, составленная из двух разнородных клиньев. Пусть в растягиваемой на бесконечности полуплоскости, составленной из двух разнородных пластин в форме четверти плоскости, имеется краевая трещина на линии раздела материалов. Берега трещины и граница полуплоскости свободны от нагрузок (рис. 7.26). Замкнутое решение задачи методом Винера — Хопфа получено в работе [99] при условии, что $G_1/(1 - 2\mu_1) = G_2/(1 - 2\mu_2)$. Ниже приведены значения КИН при плоском напряженном состоянии для $\mu_1 = 1/3$:

G_1/G_2	0,34	0,5	1	2	4	8
$K_I/(p\sqrt{\pi l})$	1,1174	1,1193	1,1215	1,1185	1,1102	1,0994
$K_{II}/(p\sqrt{\pi l})$	0,6861	0,3383	0	0,4722	1,7693	3,2936

Данные по КИН для рассматриваемой области имеются также в работе [100].

Пусть полуплоскость, составленная из двух разнородных клиньев, находится под действием сжимающих напряжений σ на бесконечности.

Таблица 7.19. **Значения функции $F(\alpha, G_1/G_2)$ [101]**

$\frac{G_1}{G_2}$	α						
	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$17\pi/36$
0,01	0,681	0,678	0,671	0,654	0,613	0,509	0,333
0,1	0,663	0,668	0,668	0,658	0,622	0,522	0,347
1	0,630	0,638	0,654	0,664	0,655	0,589	0,429
10	0,663	0,660	0,665	0,677	0,689	0,684	0,611

На линии раздела сред имеется краевая трещина скольжения (нормальные перемещения непрерывны при переходе через контур трещины), выходящая на свободную границу полупространства (рис. 7.27). Считается, что на берегах трещины касательные напряжения равны нулю (гладкий контакт). Точное решение задачи получено методом Винера — Хопфа в работе [101]. КИН K_{II} определяется по формуле

$$K_{II} = -\sigma\sqrt{\pi l}\sin 2\alpha/[2\sqrt{2}F(\alpha, G_1/G_2)],$$

где функция $F(\alpha, G_1/G_2)$ протабулирована в табл. 7.19 (плоская деформация, $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$). Как видно, при любых значениях отношения G_1/G_2 величина $K_{II}/(\sigma\sqrt{l})$ достигает максимального значения при $\alpha = \pi/4$, причем с ростом G_1/G_2 значение максимума уменьшается.

Трещины в полосе, скрепленной с полуплоскостью. Пусть в бесконечной полосе, связанной с упругой полуплоскостью, имеется поперечная трещина, к берегам которой приложено равномерное давление p (рис. 7.28).

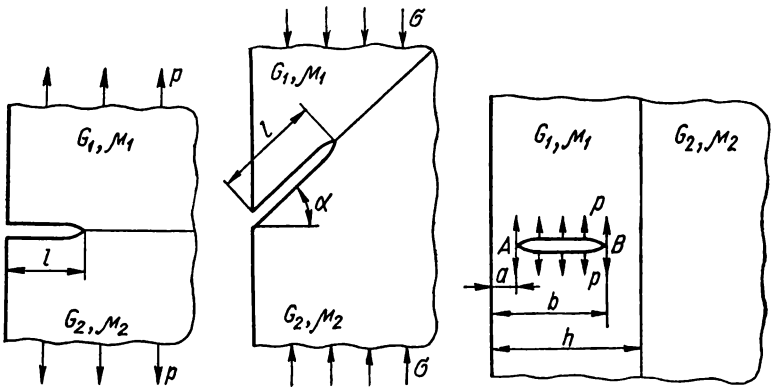


Рис. 7.26. Растяжение составной полуплоскости с краевой трещиной на линии соединения двух разнородных пластин в форме четверти плоскости.

Рис. 7.27. Сжатие составной полуплоскости с краевой трещиной скольжения на линии соединения двух разнородных клиньев.

Рис. 7.28. Поперечная трещина под давлением в полосе, скрепленной с полуплоскостью.

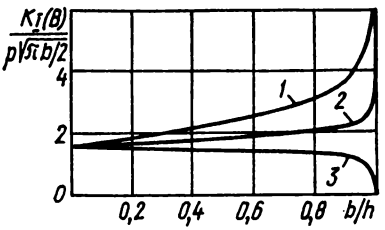
Таблица 7.20. **Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l}) = F_I$ для трещины фиксированной длины $2l = b - a = 0{,}2h$ в полосе, скрепленной с полуплоскостью (плоская деформация) [102]**

$\frac{a}{h}$	Алюминий — эпоксид ($G_1/G_2 = 23{,}08$; $\varkappa_1 = 1{,}8$; $\varkappa_2 = 1{,}6$)		Сталь — алюминий ($G_1/G_2 = 3$; $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1{,}8$)		Алюминий — сталь ($G_1/G_2 = 1/3$; $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1{,}8$)	
	F_I (A)	F_I (B)	F_I (A)	F_I (B)	F_I (A)	F_I (B)
0	$\to\infty$	1,7459	$\to\infty$	1,6325	$\to\infty$	1,5418
0,01	1,7083	1,2554	1,6459	1,2180	1,5929	1,1851
0,1	1,1224	1,0777	1,1025	1,0629	1,0831	1,0470
0,2	1,0520	1,0388	1,0416	1,0307	1,0287	1,0192
0,3	1,0302	1,0253	1,0237	1,0195	1,0131	1,0090
0,4	1,0228	1,0223	1,0169	1,0155	1,0058	1,0032
0,5	1,0239	1,0276	1,0152	1,0159	1,0060	0,9979
0,6	1,0348	1,0461	1,0181	1,0222	0,9945	0,9897
0,7	1,0683	1,1076	1,0306	1,0476	0,9822	0,9670
0,79	1,2222	1,6654	1,0872	1,2667	0,9431	0,8138
0,8	1,4506	$\to\infty$	1,1240	$\to\infty$	0,9307	$\to 0$

Задача решена методом СИУ в работе [102]. В табл. 7.20 даны значения КИН для внутренней трещины, а на рис. 7.29 приведены зависимости КИН от относительной длины трещины для трещины, выходящей на свободную от нагрузки грань полосы.

В работе [102] имеются также данные по КИН для трещины, выходящей одной вершиной на линию спая полосы с полуплоскостью. Рассматривался также случай продольной трещины в полосе, подкрепляющей полуплоскость [25, 84].

Трещины в полуплоскости, подкрепленной полосой или мембраной.



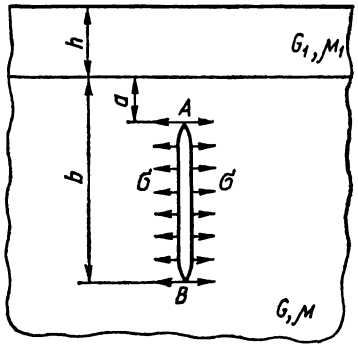


Рис. 7.29. Зависимость КИН $K_I(B)/(p\sqrt{\pi b/2})$ от относительной длины краевой трещины ($a = 0$) в полосе, скрепленной с полуплоскостью, в случае плоской деформации:

1 — алюминий — эпоксид ($G_1/G_2 = 23{,}08$; $\varkappa_1 = 1{,}8$; $\varkappa_2 = 1{,}6$), *2* — сталь — алюминий ($G_1/G_2 = 3$; $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1{,}8$), *3* — алюминий — сталь ($G_1/G_2 = 1/3$; $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1{,}8$) [102].

Рис. 7.30. Трещина под давлением в полуплоскости, подкрепленной полосой (мембраной).

Таблица 7.21. **Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi(b-a)/2}) = F_I$ для трещины под давлением в полуплоскости, подкрепленной мембраной ($\lambda = hk/b$, $k = E_1/E$ — для плоского напряженного состояния, $k = E_1(1-\mu^2)/(E(1-\mu_1^2))$ — для плоской деформации) [103]**

$\frac{a}{b}$	$\lambda = 0$		$\lambda = 0{,}0375$		$\lambda = 0{,}075$		$\lambda = 0{,}15$		$\lambda = 0{,}3$	
	F_I (A)	F_I (B)	F_I (A)	F_I (B)	F_I (A)	F_I (B)	F_I (A)	F_I (B)	F_I (A)	F_I (B)
0,1	1,4267	1,1550	1,4144	1,1523	1,4030	1,1498	1,3822	1,1451	1,3463	1,1366
0,2	1,2035	1,0967	1,1997	1,0954	1,1960	1,0942	1,1892	1,0919	1,1770	1,0876
0,3	1,1107	1,0624	1,1091	1,0617	1,1075	1,0610	1,4045	1,0597	1,0990	1,0573
0,4	1,0622	1,0399	1,0614	1,0395	1,0607	1,0391	1,0592	1,0383	1,0565	1,0369

Пусть в полуплоскости, подкрепленной упругой мембраной с нулевой жесткостью на изгиб, имеется трещина, нагруженная постоянным давлением σ (рис. 7.30). Значения КИН, полученные методом СИУ [103], приведены в табл. 7.21.

Данные по КИН для трещины в полуплоскости, подкрепленной мембраной, имеются также в работе [104]. Исследовалось подкрепление полуплоскости с трещиной упругой накладкой конечной длины [105, 106]. Рас-

Таблица 7.22. Значения $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ (над чертой) и $10K_{II}/(p\sqrt{\pi l})$ (под чертой) при растяжении полуплоскости с круговым включением и ортогональной к ее границе краевой трещиной для различных отношений $G_1/G = \Gamma$ и $\varkappa = \varkappa_1 = 2$ при $R/l = 0{,}5$ [108]

$\frac{b}{l}$	$a/l = 1{,}875$			$a/l = 2{,}125$		
	$\Gamma = 0$	$\Gamma = 0{,}5$	$\Gamma = 2$	$\Gamma = 0$	$\Gamma = 0{,}5$	$\Gamma = 2$
0	1,436	1,197	1,061	1,284	1,161	1,090
	0	0	0	0	0	0
0,25	1,429	1,195	1,063	1,290	1,163	1,089
	−0,576	−0,213	0,088	−0,478	−0,111	0,084
0,5	1,401	1,188	1,069	1,298	1,164	1,088
	−0,546	−0,118	0,084	−0,606	−0,141	0,107
0,75	1,351	1,176	1,078	1,292	1,163	1,089
	−0,140	0,027	0,016	−0,413	−0,096	0,072
1,0	1,296	1,163	1,089	1,272	1,158	1,093
	0,235	0,060	−0,049	0,021	−0,027	0,019
1,25	1,249	1,152	1,097	1,246	1,152	1,098
	0,453	0,111	−0,088	0,123	0,031	−0,026
1,5	1,214	1,144	1,104	1,222	1,146	1,102
	0,541	0,131	−0,104	0,280	0,069	−0,055
2,0	1,170	1,133	1,112	1,184	1,137	1,110
	0,513	0,124	−0,097	0,382	0,093	−0,074
2,5	1,145	1,127	1,117	1,158	1,130	1,115
	0,389	0,094	−0,074	0,342	0,083	−0,066
3,0	1,129	1,123	1,120	1,141	1,126	1,118
	0,266	0,064	−0,050	0,261	0,063	−0,050

Таблица 7.23. Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l}) = F_I$ и $K_{II}/(p\sqrt{\pi l}) = F_{II}$ при растяжении полуплоскости с круговым включением и краевой произвольно ориентированной трещиной для различных отношений $G_1/G = \Gamma$ и $\varkappa = \varkappa_1 = 2$ при $h/R = 6$ и $l/R = 3$ [109]

β	$\Gamma = 0$		$\Gamma = 0{,}5$		$\Gamma = 2$	
	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
$\pi/12$	0,252	0,243	0,239	0,233	0,232	0,228
$\pi/6$	0,498	0,353	0,471	0,340	0,454	0,333
$\pi/4$	0,764	0,379	0,720	0,368	0,694	0,361
$\pi/3$	1,002	0,308	0,990	0,307	0,904	0,305
$5\pi/12$	1,157	0,161	1,090	0,171	1,051	0,176
$\pi/2$	1,203	0	1,141	0	1,052	0

Таблица 7.24. Значения КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l}) = F_I$ и $K_{II}/(p\sqrt{\pi l}) = F_{II}$ при растяжении полуплоскости с периодической системой круговых включений и прямолинейных трещин для $G_1/G = 0{,}5$ (над чертой) и $G_1/G = 2$ (под чертой) при $\varkappa_1 = \varkappa = 2$ и $a/R = b/R = 2{,}25$, $l/R = 1$ [108]

α	$d/R = 3$				$d/R = 5$			
	F_I (A)	F_{II} (A)	F_I (B)	F_{II} (B)	F_I (A)	F_{II} (A)	F_I (B)	F_{II} (B)
0	0,008	0,010	0,008	−0,010	0,029	0,014	0,029	−0,014
	−0,009	−0,011	−0,009	0,011	−0,026	−0,012	−0,026	0,012
π/12	0,126	−0,266	0,132	−0,285	0,102	−0,251	0,121	−0,273
	0,108	−0,282	0,102	−0,260	0,055	−0,281	0,055	−0,254
π/6	0,314	−0,359	0,329	−0,372	0,294	−0,411	0,324	−0,419
	0,296	−0,378	0,281	−0,360	0,256	−0,444	0,248	−0,415
π/4	0,475	−0,343	0,495	−0,344	0,514	−0,433	0,550	−0,431
	0,462	−0,365	0,439	−0,358	0,487	−0,468	0,466	−0,442
π/3	0,599	−0,262	0,619	−0,254	0,699	−0,344	0,740	−0,341
	0,593	−0,284	0,568	−0,285	0,684	−0,376	0,648	−0,356
5π/12	0,677	−0,141	0,701	−0,137	0,817	−0,187	0,874	−0,191
	0,678	−0,155	0,645	−0,152	0,813	−0,207	0,754	−0,190
π/2	0,704	0	0,738	0	0,857	0	0,932	0
	0,708	0	0,663	0	0,857	0	0,780	0

сматривался также случай произвольно ориентированной трещины в полуплоскости, скрепленной с упругой полосой произвольной ширины [107].

Полуплоскость с упругим круговым включением. Пусть в растягиваемой на бесконечности полуплоскости имеется упругое круговое включение

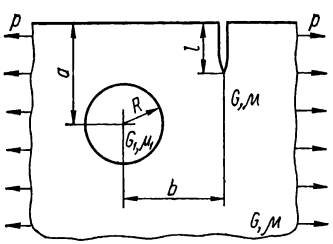


Рис. 7.31. Растяжение полуплоскости с круговым включением и краевой трещиной, ортогональной к ее границе.

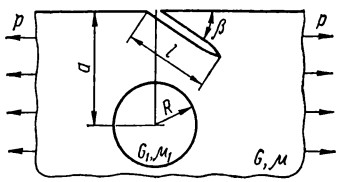


Рис. 7.32. Растяжение полуплоскости с круговым включением и краевой произвольно ориентированной трещиной.

и краевая трещина, выходящая под прямым углом на свободный от нагрузки край полуплоскости (рис. 7.31). Значения КИН, полученные методом СИУ [108], даны в табл. 7.22.

Для случая, когда трещина выходит на край полуплоскости под произвольным углом (рис. 7.32), значения КИН, полученные методом СИУ [109], приведены в табл. 7.23.

Пусть полуплоскость содержит периодическую систему круговых включений и внутренних прямолинейных трещин. Край полуплоскости и бе-

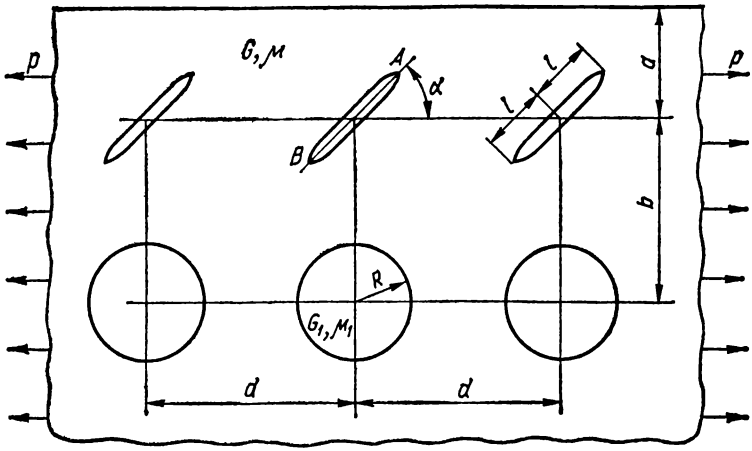


Рис. 7.33. Растяжение полуплоскости с периодической системой круговых включений и прямолинейных трещин.

рега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы растягивающие напряжения p (рис. 7.33). Значения КИН, полученные методом СИУ [108], даны в табл. 7.24.

7.8. Слоистая полоса с трещинами

Две скрепленные полосы. Пусть составная двухслойная полоса ослаблена двумя трещинами на линии раздела сред и двумя коллинеарными поперечными трещинами, расположенными в разных полосах. Берега трещин и грани полосы свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы растягивающие напряжения (рис. 7.34). Задача решена методом СИУ в работе [110]. Получены КИН для различных случаев расположения трещин. Расчеты проведены при условиях плоской деформации. Некоторые результаты приведены на рис. 7.35—7.38.

Имеются данные по КИН для двухслойной полосы с одной [25, 80, 81] или периодической системой [111] трещин на линии раздела сред, а так-

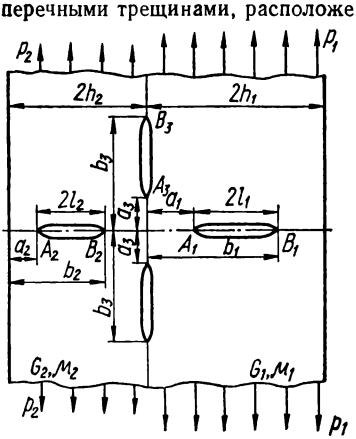


Рис. 7.34. Система четырех прямолинейных трещин в составной двухслойной полосе.

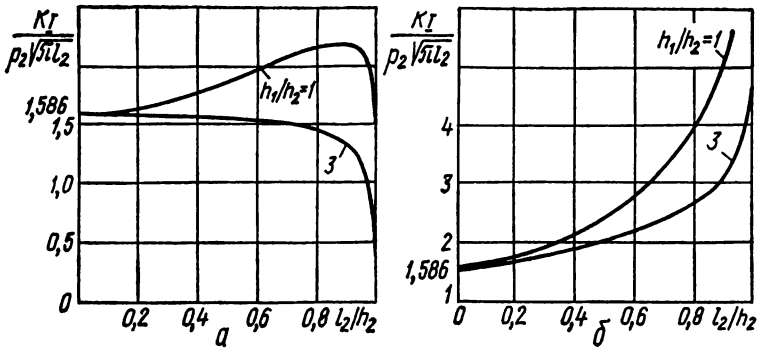


Рис. 7.35. Зависимость КИН $K_I/(p_2\sqrt{\pi l_2})$ от относительной длины трещины l_2/h_2 при растяжении двухслойной полосы с одной краевой трещиной ($a_1 = b_1$, $a_3 = b_3$, $a_2 = 0$) для $G_1/G_2 = 3$, $p_1/p_2 = 3$ (*а*) и $G_2/G_1 = 3$, $p_2/p_1 = 3$ (*б*) при $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$ [110].

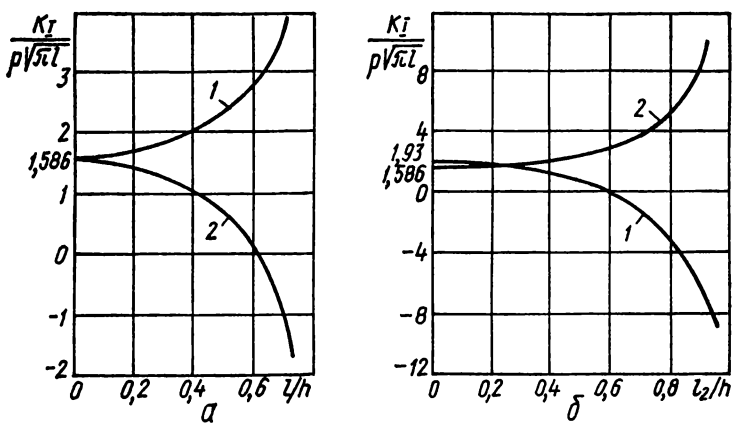


Рис. 7.36. КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ при растяжении двухслойной ($h_1 = h_2 = h$) полосы с двумя краевыми трещинами ($a_2 = 0$, $b_1 = 2h$, $a_3 = b_3$) для $G_1/G_2 = 3$, $p_1/p_2 = 3$, $l_1 = l_2 = l$ (*а*) и $G_2/G_1 = 3$, $p_2/p_1 = 3$, $2l_1 = h_1$ при $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$:

1 — $K_I\,(A_1)/(p_1\sqrt{\pi l_1})$, *2* — $K_I\,(B_3)/(p_2\sqrt{\pi l_2})$ [110].

же для случая, когда внутренняя трещина расположена в одной из скрепленных полос [110, 112].

Полоса с подкрепленными гранями. Пусть полоса, подкрепленная боковыми ребрами жесткости, растягивается на бесконечности усилиями σ. В полосе имеется свободная от нагрузки центральная поперечная трещина (рис. 7.39). Зависимости КИН от относительной длины трещины, полученные методом рядов Лорана [28], приведены на рис. 7.40 при $\gamma = E_1 I_1/(Ehb^3) = 0$ и $\gamma = 0{,}005$ для различных значений параметра $\beta =$

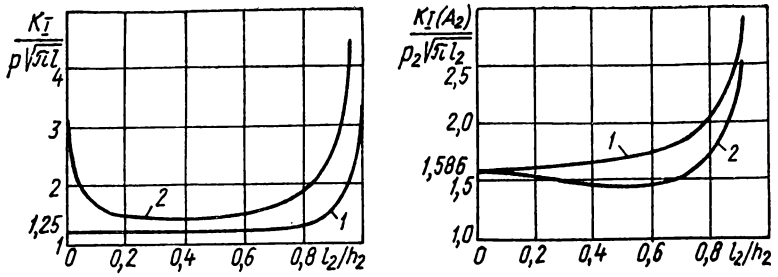


Рис. 7.37. КИН $K_I/(p\sqrt{\pi l})$ при растяжении двухслойной полосы с внутренней трещиной, пересекающей линию раздела сред ($a_3 = b_3$, $a_1 = 0$, $b_2 = 2h_2$), для $G_1 = 3G_2$, $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$, $p_1 = 3p_2$, $h_1 = h_2$, $b_1 = h_1$, $l_1 + l_2 = l$:

1 — $K_I\,(B_1)/(p_1\sqrt{\pi l})$; *2* — $K_I\,(A_2)/(p_2\sqrt{\pi l})$ [110].

Рис. 7.38. КИН $K_I\,(A_2)/(p_2\sqrt{\pi l_2})$ при растяжении двухслойной полосы с внутренней Т-образной трещиной ($a_1 = b_1$, $a_3 = 0$, $b_2 = 2h_2$) для $G_2/G_1 = 3$, $p_2/p_1 = 3$ (*1*) и $G_1/G_2 = 3$, $p_1/p_2 = 3$ (*2*) при $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$ [110].

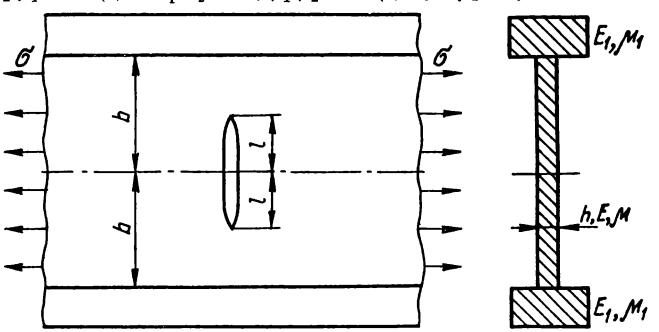


Рис. 7.39. Растяжение полосы с боковыми ребрами жесткости, ослабленной центральной поперечной трещиной.

Таблица 7.25. **Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi l}) = F_I$ при растяжении полосы с двумя симметричными поперечными трещинами при подкреплении ее граней мембранами для $a = 0{,}2h$ [114]**

$\frac{b}{h}$	$\varphi = 0$		$\varphi = 0{,}2$		$\varphi = 1{,}0$		$\varphi = 2{,}0$		$\varphi = 1000$	
	F_I (a)	F_I (b)	F_I (a)	F_I (b)	F_I (a)	F_I (b)	F_I (a)	F_I (b)	F_I (a)	F_I (b)
0,3	1,009	1,008	1,008	1,007	1,007	1,006	1,006	1,005	1,005	1,004
0,4	1,031	1,026	1,029	1,024	1,024	1,018	1,020	1,015	1,013	1,007
0,5	1,064	1,053	1,058	1,047	1,046	1,034	1,039	1,026	1,020	1,008
0,6	1,109	1,094	1,097	1,080	1,073	1,053	1,059	1,037	1,025	1,001
0,7	1,169	1,156	1,148	1,127	1,105	1,074	1,081	1,046	1,025	0,984
0,8	1,253	1,263	1,213	1,197	1,140	1,094	1,102	1,045	1,017	0,946
0,9	1,38	1,51	1,30	1,31	1,18	1,09	1,12	1,00	1,00	0,85

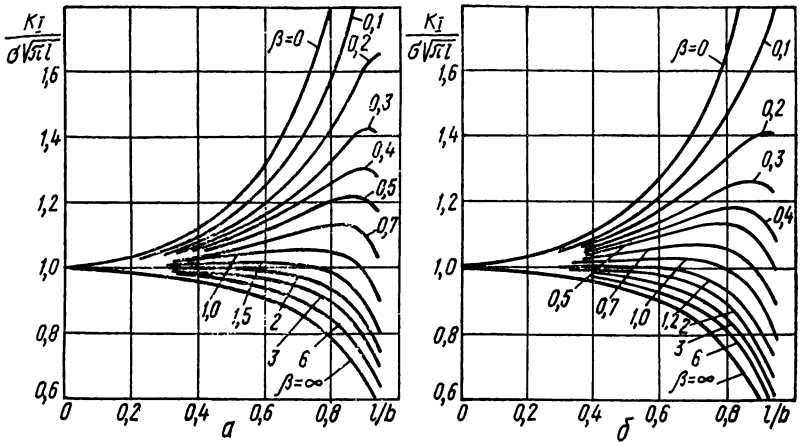


Рис. 7.40. Зависимость КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$ от параметра l/b при растяжении полосы с боковыми ребрами жесткости, ослабленной центральной поперечной трещиной, для $\gamma = 0$ (*а*) и $\gamma = 0{,}005$ (*б*) при $\mu = 0{,}3$ [28].

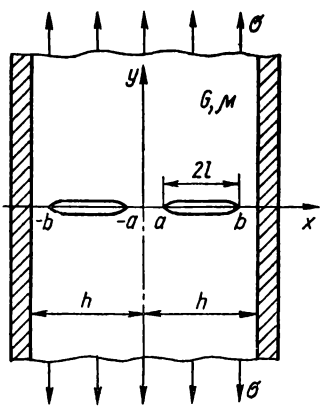


Рис. 7.41. Растяжение полосы с двумя симметричными поперечными трещинами при подкреплении ее граней упругими мембранами.

$= E_1A/(Ehb)$, где I_1 — момент инерции сечения ребра жесткости относительно нейтральной оси, перпендикулярной плоскости пластины; A — площадь поперечного сечения ребра жесткости. Отметим, что случай $\gamma = 0$ соответствует подкреплению граней полосы мембранами с нулевой изгибной жесткостью, а случаи $\beta = 0$ или $\beta = \infty$ относятся к полосе со свободными от нагрузки или жестко защемленными гранями.

Данные по КИН для трещины в полосе с боковыми ребрами жесткости имеются также в работах [82, 113].

Пусть грани полосы подкреплены мембранами с конечной жесткостью на растяжение D и нулевой жесткостью на изгиб. Полоса ослаблена двумя симметричными поперечными трещинами. Берега трещин свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы растягивающие напряжения σ (рис. 7.41). Значения КИН, полученные методом СИУ [114], приведены в табл. 7.25 и 7.26 при различных значениях параметра $\varphi = D(\varkappa + 1)/(4Gh)$. Случай $\varphi = 0$ соответствует полосе со свободными от нагрузки гранями.

Таблица 7.26. **Значения КИН $K_1/(\sigma\sqrt{\pi b})$ при растяжении полосы с центральной поперечной трещиной ($a = 0$) при подкреплении ее граней мембранами [114]**

b/h	$\varphi = 0$	$\varphi = 0{,}2$	$\varphi = 1{,}0$	$\varphi = 2{,}0$	$\varphi = 1000$
0,1	1,006	1,005	1,003	1,002	0,988
0,2	1,025	1,021	1,011	1,006	0,992
0,3	1,058	1,048	1,029	1,013	0,981
0,4	1,110	1,089	1,047	1,023	0,965
0,5	1,187	1,150	1,075	1,035	0,942
0,6	1,304	1,237	1,112	1,048	0,911
0,7	1,488	1,366	1,156	1,058	0,867
0,8	1,817	1,567	1,201	1,055	0,802
0,9	2,57	1,89	1,21	1,00	0,68

7.9. Ограниченные кусочно-однородные пластины с трещинами

Двухслойная прямоугольная пластина. Пусть прямоугольная пластина составлена из двух разнородных прямоугольных пластин, причем на линии спая имеется трещина. Берега трещины свободны от внешней нагрузки, а на границе пластины заданы растягивающие напряжения σ, σ_1 и σ_2 (рис. 7.42), связанные между собой соотношением

$$\sigma_2 = \eta\sigma_1 + \sigma\,[(3+\eta)\,e^{2\pi\varepsilon} - (3\eta+1)]/(1+e^{2\pi\varepsilon}),$$

где $\eta = G_2(\varkappa_1+1)/[G_1(\varkappa_2+1)]$, $\varepsilon = (1/(2\pi))\ln[(G_2\varkappa_1+G_1)/(G_2+G_1\varkappa_2)]$.

Задача решена методом граничной коллокации в работе [115]. Численные результаты получены для межфазного КИН K_l, который определяется по формуле

$$K_l = \lim_{x\to l+0}\sqrt{2\pi(x-l)}\,\sqrt{\sigma_y^2(x,\,0)+\tau_{xy}^2(x,\,0)}.$$

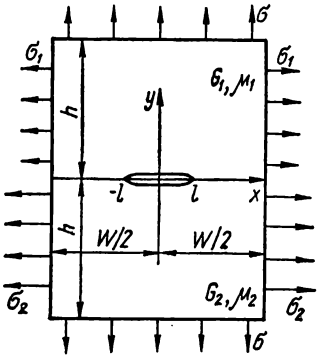
Значения K_l приведены в табл. 7.27 и 7.28.

Таблица 7.27. **Значения межфазного КИН $K_l/(\sigma\sqrt{\pi l})$ при двухосном растяжении прямоугольной пластины с центральной трещиной на линии раздела сред при $h/W = 1$ (плоское напряженное состояние, $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$) [115]**

$\frac{G_1}{G_2}$	$2l/W$				
	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
1,00	1,005	1,011	1,021	1,039	1,063
0,25	1,090	1,129	1,166	1,210	1,250
0,10	1,218	1,405	1,579	...	...

Данные по КИН для двухслойной прямоугольной пластины с трещиной на линии раздела сред имеются также в работе [116].

Трехслойная прямоугольная пластина. Пусть кусочно-однородная пластина состоит из прямоугольной панели с центральной трещиной, к боковым граням которой прикреплены прямоугольные панели из другого материала. Берега трещины и боковые грани составной пластины свободны от нагрузки, а на торцах заданы нормальные смещения и отсутствуют касательные напряжения (рис. 7.43). Считается также известным главный вектор нормальных напряжений P, действующих в торце пластины. Задача решена модифицированным методом отображений — коллокаций в работе [117]. Значения КИН приведены в табл. 7.29 для случая плоского напряженного состояния.



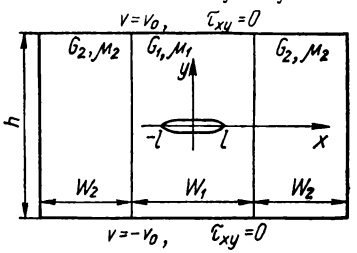
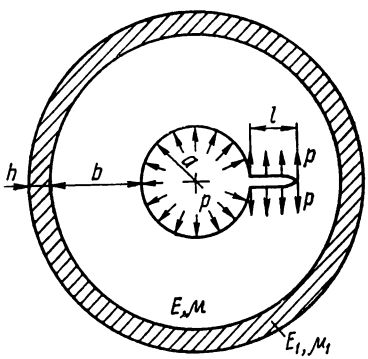


Рис. 7.42. Растяжение двухслойной прямоугольной пластины с центральной трещиной на линии раздела сред.

Рис. 7.43. Растяжение трехслойной прямоугольной пластины с центральной трещиной.

Рис. 7.44. Подкрепленное мембраной круговое кольцо с внутренней краевой радиальной трещиной при действии на ее берегах и на внутренней границе постоянного давления.



Слоистое круговое кольцо с трещинами. Пусть на внутренний контур кругового кольца выходит радиальная трещина. Берега трещины и внутренний контур загружены постоянным давлением p. Внешний контур кольца подкреплен упругой мембраной (рис. 7.44). Численное решение задачи получено с помощью МКЭ в работе [118] для двух конкретных случаев слоистого кольца. Для определения КИН предложена аппроксимационная формула (плоская деформация)

$$K_I = p\sqrt{\pi l}\,\{[1-\alpha(r)]\,f(l/a)\,b^2/(b^2-r^2)\}\,(1+g),$$

где $\alpha(r) = 2(1-\mu)\,r/\{r^2+(1-2\mu)\,b^2+(b^2-r^2)(1-\mu_1^2)\,bE/[(1+\mu)\times hE_1]\}$, $g = (1{,}7+14\alpha_0)\,l/(b-a)$, $r = l+a$, α_0 — относительная

Таблица 7.28. Значения межфазного КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi l})$ при одноосном ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) растяжении прямоугольной пластины с центральной трещиной на линии раздела сред при $h/W = 1$ (плоское напряженное состояние, $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$) [115]

$\frac{G_1}{G_2}$	$2a/W$					
	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
1,00	1,005	1,011	1,022	1,038	1,064	1,087
0,25	1,040	1,050	1,071	1,080	1,109	1,139
0,10	1,120	1,121	1,129	1,138	1,157	1,180
0	1,199	1,202	1,209	1,214	1,222	1,240

Таблица 7.29. Значения КИН $K_I/(\sigma_0\sqrt{\pi l})$ ($\sigma_0 = P/[W_1 + 2(E_2/E_1)W_2]$) при растяжении трехслойной прямоугольной пластины с центральной трещиной для $W_2/W_1 = 0{,}5$ и $h/W_1 = 2$ ($\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$) [117]

$\frac{E_1}{E_2}$	$2l/W_1$								
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
1/3	1,00	1,00	0,99	0,99	0,98	0,97	0,95	0,93	0,89
1	1,00	1,00	1,00	1,01	1,02	1,03	1,05	1,07	1,10
3	1,00	1,00	1,01	1,03	1,06	1,10	1,16	1,24	1,37

жесткость мембраны по сравнению с жесткостью сплошного кольца без трещины. Функция $f(l/a)$ определяет безразмерный КИН K_I в случае бесконечной плоскости с круговым отверстием и радиальной трещиной ($b \to \infty$); ниже приведены ее числовые значения [119]:

l/a	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8
$f(l/a)$	2,26	1,98	1,82	1,67	1,58	1,49	1,42	1,32

l/a	1,0	1,5	2,0	3,0	5,0	10,0	∞
$f(l/a)$	1,22	1,06	1,01	0,93	0,81	0,75	0,707

Данные по КИН для слоистого кругового кольца с краевыми радиальными трещинами имеются также в работе [120]. Рассматривались трещины и в круговом диске ($a = 0$), подкрепленном круговым кольцом [121]. В работе [103] получены КИН для радиальной трещины в круговом кольце, внутренний контур которого усилен упругой мембраной.

7.10. Два спаянных разнородных полупространства с туннельными трещинами при продольном сдвиге

Трещины на поверхности раздела сред. Пусть два упругих изотропных полупространства, характеризующихся упругими постоянными G_1, μ_1 и G_2, μ_2, жестко соединены между собой. На поверхности раздела сред име-

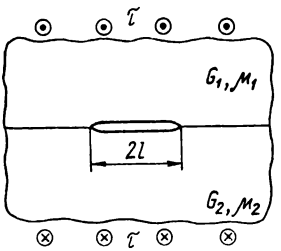
ется свободная от нагрузки туннельная трещина длиной $2l$. На бесконечности тело сдвигается напряжениями τ в плоскостях, параллельных поверхности раздела сред (рис. 7.45). КИН определяется по формуле [8]

$$K_{III} = \tau \sqrt{\pi l},$$

т. е. КИН не зависит от упругих постоянных и является таким же, как и для однородной среды.

В работах [122, 123] получены КИН для полубесконечной трещины на поверхности раздела сред с конечным ответвлением.

Произвольно ориентированная трещина около поверхности раздела сред. Пусть в составном пространстве около линии раздела сред имеет-



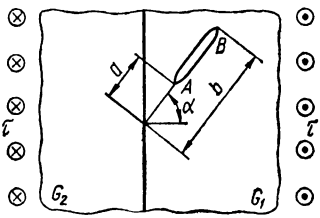
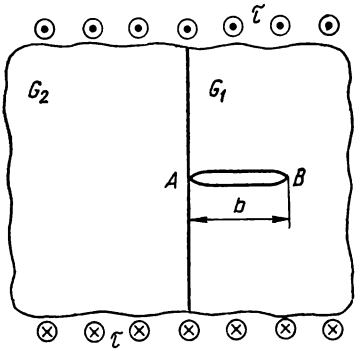


Рис. 7.45. Составное бесконечное пространство с туннельной трещиной на поверхности раздела сред при продольном сдвиге на бесконечности.

Рис. 7.46. Составное бесконечное пространство с туннельной произвольно ориентированной трещиной при продольном сдвиге на бесконечности.



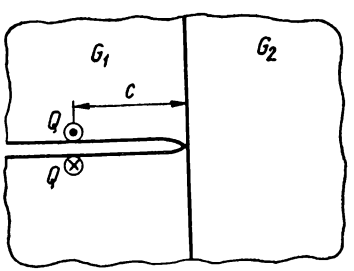


Рис. 7.47. Составное бесконечное пространство с трещиной, выходящей под прямым углом на поверхность раздела сред, при продольном сдвиге на бесконечности.

Рис. 7.48. Составное бесконечное пространство с полубесконечной трещиной, выходящей под прямым углом на поверхность раздела сред, при продольном сдвиге сосредоточенными силами.

ся прямолинейная трещина произвольной ориентации. Берега трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы сдвигающие напряжения τ (рис. 7.46). Значения КИН, полученные методом СИУ [124], приведены

Таблица 7.30. Значения КИН $K_{III}(A)/K_0 = F_{III}(A)$ ($K_0 = \tau \sin\alpha \sqrt{\pi a_0}$ при $a > 0$, $K_0 = \tau \sin\alpha \sqrt{\pi} a_0^{\beta_1}$ при $a = 0$, $a_0 = (a+b)/2$) и $K_{III}(B)/K_0 = F_{III}(B)$ ($K_0 = \tau \sin\alpha \sqrt{\pi a_0}$) при продольном сдвиге составного пространства с произвольно ориентированной трещиной для соединений алюминий — эпоксид ($G_1/G_2 = 0{,}0433$) (над чертой) и эпоксид — алюминий ($G_1/G_2 = 23{,}08$) (под чертой) [124]

$\frac{a_0+a}{a_0}$	$\alpha = 0$		$\alpha = \pi/8$		$\alpha = \pi/4$		$\alpha = 3\pi/8$	
	$F_{III}(B)$	$F_{III}(A)$	$F_{III}(B)$	$F_{III}(A)$	$F_{III}(B)$	$F_{III}(A)$	$F_{III}(B)$	$F_{III}(A)$
1,00	1,26 / 0,907	0,0767 / 14,0	1,28 / 0,902	0,0824 / 4,56	1,33 / 0,885	0,105 / 2,06	1,49 / 0,847	0,172 / 1,36
1,05	1,13 / 0,916	1,70 / 0,610	1,15 / 0,911	1,74 / 0,611	1,19 / 0,893	1,87 / 0,622	1,34 / 0,852	2,22 / 0,659
1,10	1,11 / 0,924	1,44 / 0,712	1,12 / 0,919	1,47 / 0,706	1,16 / 0,900	1,58 / 0,693	1,30 / 0,857	1,87 / 0,696
1,15	1,09 / 0,931	1,32 / 0,770	1,10 / 0,925	1,35 / 0,761	1,14 / 0,906	1,44 / 0,737	1,28 / 0,862	1,71 / 0,719
1,25	1,07 / 0,941	1,21 / 0,837	1,08 / 0,936	1,23 / 0,826	1,12 / 0,916	1,30 / 0,794	1,24 / 0,869	1,53 / 0,752
1,50	1,05 / 0,959	1,10 / 0,911	1,05 / 0,954	1,12 / 0,901	1,08 / 0,936	1,17 / 0,869	1,18 / 0,886	1,33 / 0,804
2,00	1,03 / 0,976	1,04 / 0,959	1,03 / 0,973	1,05 / 0,953	1,05 / 0,959	1,08 / 0,931	1,12 / 0,913	1,18 / 0,865
5,00	1,00 / 0,996	1,00 / 0,995	1,01 / 0,995	1,01 / 0,994	1,01 / 0,992	1,01 / 0,990	1,03 / 0,975	1,03 / 0,970
10,0	1,00 / 0,999	1,00 / 0,999	1,00 / 0,999	1,00 / 0,999	1,00 / 0,998	1,00 / 0,998	1,01 / 0,993	1,01 / 0,992
∞	1,00 / 1,00	1,00 / 1,00	1,00 / 1,00	1,00 / 1,00	1,00 / 1,00	1,00 / 1,00	1,00 / 1,00	1,00 / 1,00

в табл. 7.30. Здесь β_1 — показатель сингулярности напряжений в вершине трещины, лежащей на линии раздела сред (при $a = 0$). Ниже приведены его значения для некоторых углов ориентации трещины при $G_1/G_2 = 0{,}0433$:

α	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$
β_1	0,5	0,432	0,344	0,228

и при $G_1/G_2 = 23{,}08$:

α	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$
β_1	0,5	0,809	0,851	0,865

Данные по КИН для произвольно ориентированной трещины около линии раздела сред имеются также в работе [125]. Отдельно изучался также случай внутренней трещины, перпендикулярной линии раздела сред [22,126].

Трещина, выходящая под прямым углом на поверхность раздела сред. При продольном сдвиге составного пространства с трещиной, выходящей под прямым углом на поверхность раздела (рис. 7,47), известно точное ре-

шение [34, 127, 128]

$$K_{III}(A) = \tau\sqrt{\pi}b^m\sqrt{G_2/G_1}2^{m-1/2}(1-m)/\sin(\pi m/2),$$

$$K_{III}(B) = \tau\sqrt{\pi}bm/\sin(\pi m/2), \quad m = (2/\pi)\arcsin\sqrt{G_1/(G_1+G_2)}.$$

Данные по КИН для трещины конечной длины, выходящей на линию раздела сред, имеются также в работах [124, 129].

Пусть на поверхность спая двух полупространств под прямым углом выходит полубесконечная трещина, на берегах которой действуют сдвигающие сосредоточенные силы (рис. 7.48). Точное решение задачи имеет вид [126]

$$K_{III} = \sqrt{2/\pi}Q\sqrt{G_2/G_1}c^{m-1},$$

$$m = (2/\pi)\arcsin\sqrt{G_1/(G_1+G_2)}.$$

Известны также замкнутые решения задач, когда из вершины полубесконечной трещины, упирающейся в линию раздела сред, исходит одно или два симметричных ответвления [123].

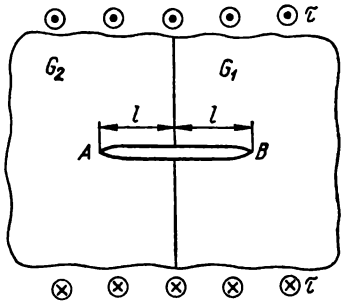


Рис. 7.49. Составное бесконечное пространство с симметричной трещиной, пересекающей поверхность раздела сред, при продольном сдвиге на бесконечности.

Трещина, пересекающая поверхность раздела сред. Пусть составное пространство ослаблено симметричной трещиной, пересекающей линию раздела сред. Берега трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы касательные напряжения τ (рис. 7.49). Точные выражения для КИН имеют вид [130, 131]

$$K_{III}(A) = \tau\sqrt{\pi l}(1+k), \quad K_{III}(B) = \tau\sqrt{\pi l}(1-k),$$

$$k = (G_2 - G_1)/(G_2 + G_1).$$

Данные по КИН для трещины, пересекающей под прямым углом линию раздела сред, имеются также в работах [22, 126]. Рассматривался также случай произвольно ориентированной трещины, пересекающей линию раздела [124].

7.11. Бесконечное пространство с цилиндрическими включениями и туннельными трещинами при продольном сдвиге

Трещина внутри кругового включения. Пусть бесконечное пространство содержит круговое цилиндрическое включение. Внутри включения имеется свободная от нагрузки радиальная трещина, выходящая на линию раздела сред, а на бесконечности заданы сдвигающие напряжения τ (рис. 7.50). Точное решение задачи построено в работах [132, 133]. Для КИН в вершине A получена формула

$$K_{III}(A) = \tau\sqrt{\pi l}(1/2)\alpha^{-2}\sqrt{1+\alpha}\sqrt{(1+k)/(1-k)}\,[(\alpha^2+1)\times$$

$$\times\cos(\omega\gamma_0) + (\alpha^2-1)\cos(g\gamma_0) - (2\alpha\operatorname{ctg}\gamma_0/\cos(g\gamma_0))\,(g\cos(\omega\gamma_0)\sin(g\gamma_0) -$$

$$-\omega\sin(\omega\gamma_0)\cos(g\gamma_0))],$$

где $\cos g\pi = -\cos\omega\pi = k$, $k = (G_2 - G_1)/(G_2 + G_1)$, $\alpha = L/R$, $0 \leqslant \gamma_0 = \arccos[(1-\alpha)/(1+\alpha)] \leqslant \pi/2$.

Данные по КИН для диаметральной трещины внутри кругового включения имеются также в работе [134]. Дугообразная трещина внутри включения изучалась в [135].

Трещины на линии раздела упругих сред. Пусть вдоль линии соединения кругового включения с бесконечным пространством имеется трещина. Берега трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы сдвигающие напряжения τ_{yz}^{∞} и τ_{xz}^{∞} (рис. 7.51). Точное выражение для КИН имеет вид [136]

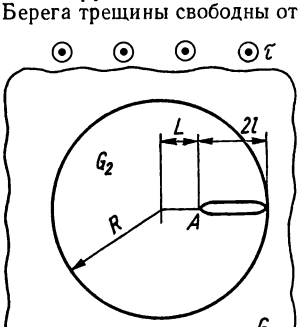


Рис. 7.50. Продольный сдвиг бесконечного пространства с круговым цилиндрическим включением, ослабленным радиальной трещиной.

$$K_{III}(A) = (1+k) \times$$

$$\times \sqrt{\pi R \sin\beta}\,[\tau_{xz}^{\infty}\cos(\beta/2) + \tau_{yz}^{\infty}\sin(\beta/2)],$$

где $k = (G_2 - G_1)/(G_2 + G_1)$.

Данные по КИН для трещин на линии соединения кругового включения с матрицей имеются также в работе [137]. Рассматривался также случай трещины на контуре упругого эллиптического включения [138].

Трещины вдоль контура жесткого включения. Пусть в бесконечном теле имеется жесткое цилиндрическое включение произвольного поперечного сечения, ограниченного гладким контуром L, с трещиной на границе раздела сред. Берега трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы сдвигающие напряжения τ (рис. 7.52). Точные формулы для КИН имеют вид [139]

$$K_{III}(A_j) = 2\omega'(\infty)\,\tau\cos[\alpha - \theta_j + (\theta_j - \theta_s)/4] \times$$

$$\times \sqrt{\pi \sin[(\theta_2 - \theta_1)/2]\,/\,|\omega'(\sigma_j^*)|}\quad (j = 1,\ s = 2 \text{ или } j = 2,\ s = 1).$$

Здесь функция $\omega(\zeta)$ осуществляет конформное отображение внешности единичной окружности в плоскости $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta}$ на внешность криволинейного включения в плоскости $z = x + iy$ ($z = \omega(\zeta)$), положение вершин трещины определяется точками $z = z_1$ и $z = z_2$ в плоскости z или точками $\zeta = \sigma_1^* = e^{i\theta_1}$ и $\zeta = \sigma_2^* = e^{i\theta_2}$ в плоскости ζ ($z_j = \omega(\sigma_j^*)$).

Если контур L жесткого включения является $(n+1)$-угольной гипотрохоидой, заданной отображающей функцией

$$\omega(\zeta) = R(\zeta + m/\zeta^n) \quad (-1/n \leqslant m < 1/n),$$

то КИН равны [139]

$$K_{III}(A_j) = 2\tau\sqrt{\pi R \sin[(\theta_2 - \theta_1)/2]}\cos[\alpha - \theta_j +$$

$$+ (\theta_j - \theta_s)/4]/\sqrt[4]{(1-mn)^2 + 4mn\sin^2[(n+1)\theta_j/2]}.$$

Отсюда при $n = 1$ следует КИН для трещины вдоль контура эллиптического включения. Последний случай рассматривался также в работах [140, 141]. Исследовалась также трещина вдоль контура жесткого остроугольного включения [142].

Пусть тело содержит жесткое линейное включение (частный случай эллиптического включения), средняя часть которого с одной стороны не скреплена с телом (рис. 7.53). Тогда КИН определяется формулой [141]

$$K_{III} = \tau \sqrt{\pi a (1 + \cos\beta) \sin\beta / \cos\beta}, \quad \sin\beta = b/a.$$

Трещина, пересекающая линию раздела упругих сред. Пусть в бесконечном теле с круговым включением имеется радиальная трещина, пересекающая линию раздела сред. Берега трещины свободны от нагрузки, а на

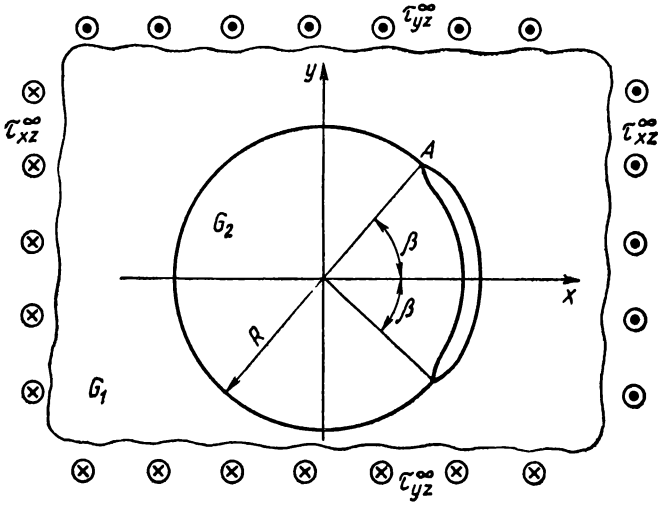


Рис. 7.51. Продольный сдвиг бесконечного пространства с упругим круговым цилиндрическим включением и трещиной на линии раздела сред.

бесконечности заданы сдвигающие напряжения τ (рис. 7.54). Точное решение задачи при $\alpha = a^2/\beta$ имеет вид [143]

$$K_{III}(A) = -\tau G_2 \pi^{3/2} \sqrt{(\beta^2 - a^2)/(2a)}\,[\alpha_1 - (\alpha_2 - D_0/\pi) + \alpha_3/(N+1) - \alpha_4/(N^2-1)],$$

$$K_{III}(B) = \tau G_1 \pi^{3/2} \beta^{-1} \sqrt{a(\beta^2 - a^2)/2}\,[\alpha_1 + (\alpha_2 - D_0/\pi) + \alpha_3/(N-1) + \alpha_4/(N^2-1)],$$

где

$$D_0 N = \alpha_1 [4k \operatorname{arctg} \sqrt{(N-1)/(N+1)} - \pi] + \pi\alpha_2 (N - \sqrt{N^2-1}) + \alpha_3 [\pi (k-2)/(2N) - k/(N\sqrt{N^2-1}) + 2kN \operatorname{arctg} \sqrt{(N-1)/(N+1)}/(N^2-1)] + \alpha_4 \pi/[2N(N^2-1)], \quad \alpha_1 = B_0 - 2N/(G_1\pi),$$

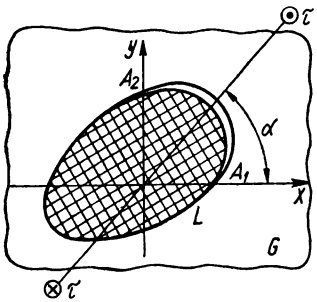
$$\alpha_2 = (k-1)/(G_1\pi), \quad \alpha_3 = 2N\sqrt{N^2-1}/(G_1\pi),$$

$$\alpha_4 = -8Nk\sqrt{N^2-1}/(G_1\pi^2)\,[\operatorname{arctg}\sqrt{(N-1)/(N+1)} +$$

$$+ \operatorname{arctg}(N - \sqrt{N^2 - 1})], \quad B_0 = 2N/(G_1\pi) - (2N^2 - 1)/(G_1\pi\sqrt{N^2 - 1}),$$
$$k = (G_2 - G_1)/(G_2 + G_1), \quad N = (\beta + a)/(\beta - a).$$

Данные по КИН для трещины, пересекающей линию раздела кругового включения и матрицы, имеются также в работе [144].

Трещины вне упругого включения. Пусть бесконечное тело содержит круговое упругое включение и радиальную трещину. Берега трещины сво-



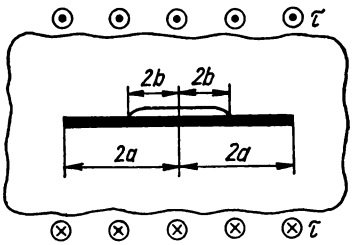
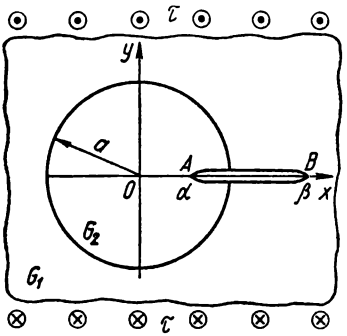


Рис. 7.52. Продольный сдвиг бесконечного пространства с жестким криволинейным включением и трещиной на границе раздела.

Рис. 7.53. Продольный сдвиг бесконечного тела с линейным жестким включением и трещиной вдоль одной его стороны.



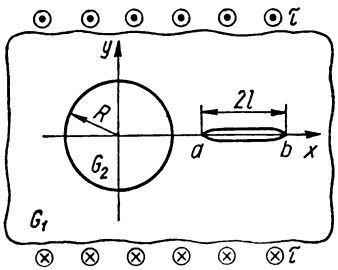


Рис. 7.54. Продольный сдвиг бесконечного тела с круговым упругим включением и радиальной трещиной, пересекающей линию раздела сред.

Рис. 7.55. Продольный сдвиг бесконечного тела с круговым включением и радиальной трещиной.

бодны от нагрузки, а на бесконечности заданы сдвигающие напряжения τ (рис. 7.55). Если трещина выходит на линию раздела сред ($a = R$), известно точное решение [145, 146]

$$K_{III}(b) = \tau\sqrt{\pi l}\,(1/2)\,\beta^{-2}\sqrt{1+\beta}\,\{(\beta^2+1)\sin(W\gamma_0) +$$
$$+ (\beta^2 - 1)\sin(g\gamma_0) + 2\beta\operatorname{ctg}\gamma_0\,[g\cos(g\gamma_0)\sin(W\gamma_0) -$$
$$- W\cos(W\gamma_0)\sin(g\gamma_0)]/\sin(g\gamma_0)\},$$

где $\beta = b/R$, $0 \leqslant \gamma_0 = \arccos[(\beta - 1)/(\beta + 1)] \leqslant \pi/2$, $\cos(W\pi) = -\cos(g\pi) = k$, $k = (G_2 - G_1)/(G_2 + G_1)$.

Данные по КИН для трещин, выходящих на границу упругого включения, имеются также в работах [143, 144, 147].

Пусть тело с круговым включением ослаблено полубесконечной трещиной (см. рис. 7.55, $b = \infty$). При отсутствии включения КИН в вершине полубесконечной трещины считается заданным и равным K_0. Изменение КИН, вызванное круговым включением, определяется по формуле [148]

$$K_{III} = K_0 \sqrt{1-\alpha^2}\,[F_1(\alpha) + G_2/G_1]/[F_2(\alpha) + G_2/G_1],$$

где

$$F_1(\alpha) = (1-\sqrt{1-\alpha^2})/\{\sqrt{1-\alpha^2} - (1-\alpha)\,K(\rho)/[(1+\alpha)\,E(\rho)]\},$$

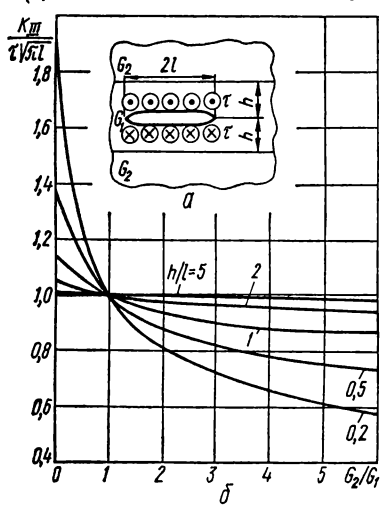
$$F_2(\alpha) = (1-\sqrt{1-\alpha^2})/[(1+\alpha)\sqrt{(1+\alpha)/(1-\alpha)}\,E(\rho)/K(\rho) - 1],$$

$$\alpha = R/a, \quad \rho = \sqrt{2R/(R+h)}, \quad h = (a^2+R^2)/(2a).$$

Данные по КИН при взаимодействии упругого включения с трещинами конечной длины имеются в работах [52, 135, 144, 149]. Изучалось также взаимодействие трещин с двумя эллиптическими включениями [149, 150]. Периодическая система эллиптических включений и прямолинейных трещин рассматривалась в работе [151].

7.12. Слоистые композиты с туннельными трещинами при продольном сдвиге

Бесконечный слой, скрепленный с двумя полупространствами. Пусть в срединной плоскости слоя, скрепленного с двумя полупространствами, имеется туннельная трещина. Берега трещины загружены постоянными сдвигающими усилиями τ, а на бесконечности напряжения отсутствуют (рис. 7.56, *а*). Зависимости КИН от отношения модулей



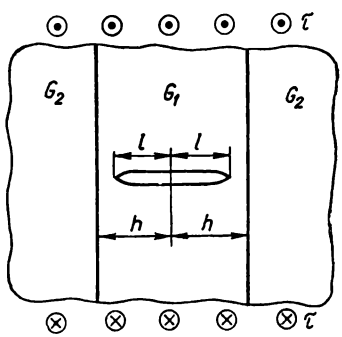


Рис. 7.56. Схема нагружения центральной продольной трещины в бесконечном слое, скрепленном с двумя полупространствами (*а*), и зависимость КИН $K_{III}/(\tau\sqrt{\pi l})$ от отношения G_2/G_1 (*б*) [82, 152].

Рис. 7.57. Продольный сдвиг ослабленного центральной поперечной трещиной кусочно-однородного тела, состоящего из бесконечного слоя и двух полупространств.

сдвига полупространств и слоя, полученные методом дуальных интегральных уравнений [152], показаны на рис. 7.56, *б*.

Пусть в трехслойном композите имеется центральная трещина, расположенная ортогонально плоскостям раздела сред. Берега трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы сдвигающие напряжения

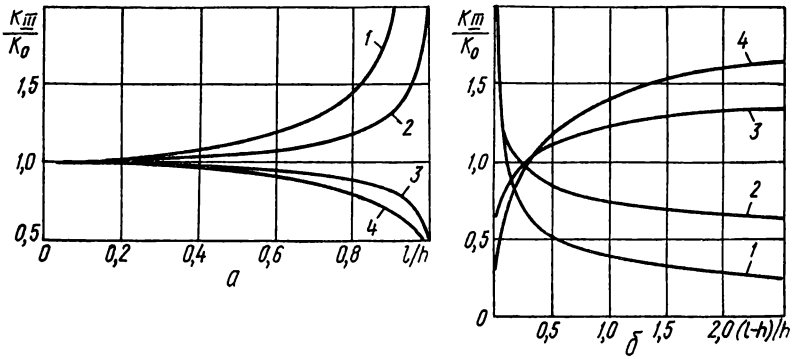


Рис. 7.58. Зависимость КИН K_{III}/K_0 при продольном сдвиге трехслойного композита с центральной поперечной трещиной, находящейся в центральном слое ($K_0 = q_0\sqrt{\pi l}$, $q_0 = 2G_1\tau/(G_1 + G_2)$) (*а*) или пересекающей линии раздела сред ($K_0 = \tau\sqrt{\pi l}$) (*б*):

1 — алюминий — эпоксид ($G_2/G_1 = 0{,}0433$), *2* — сталь — алюминий ($G_2/G_1 = 0{,}3333$), *3* — алюминий — сталь ($G_2/G_1 = 3{,}0$), *4* — эпоксид — алюминий ($G_2/G_1 = 23{,}077$) [153].

(рис. 7.57). Задача решена методом СИУ в работе [153]. Зависимости КИН от относительной длины трещины показаны на рис. 7.58.

Данные по КИН для слоистых композитов с трещинами в одном из составляющих тело изотропных слоев имеются также в работах [8, 154]. Изу-

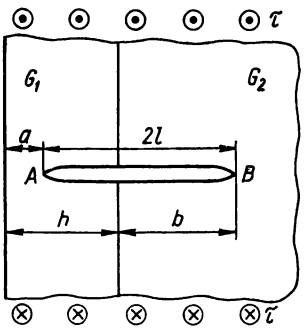
Таблица 7.31. **Значения КИН $K_{III}/(\tau\sqrt{\pi l}) = F_{III}$ при продольном сдвиге подкрепленного бесконечным слоем полупространства с трещиной, пересекающей линию раздела сред для $a = 0{,}1h$) [155]**

$\frac{b}{h}$	Алюминий — эпоксид ($G_2/G_1 = 0{,}0433$)		Сталь — алюминий ($G_2/G_1 = 0{,}3333$)	
	F_{III} (*A*)	F_{III} (*B*)	F_{III} (*A*)	F_{III} (*B*)
0,01	4,3296	0,7079	2,2748	1,3960
0,10	4,5550	0,3060	2,3976	0,9394
0,30	4,3332	0,1870	2,4525	0,7482
0,60	3,9878	0,1395	2,4493	0,6555
1,00	3,6332	0,1163	2,4230	0,6063
1,50	3,3180	0,1038	2,3971	0,5795
2,00	3,0726	0,0971	1,3792	0,5659

чались также слоистые композиты с трещинами на линии раздела сред [8, 82, 152]. В работах [8, 82] рассмотрены случаи, когда композит составлен из ортотропных слоев.

Составное полупространство. Пусть полупространство подкреплено бесконечным слоем из другого материала. Трещина пересекает линию раздела сред под прямым углом. Берега трещины и край составного полупространства свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы сдвигающие напряжения τ (рис. 7.59). Значения КИН, полученные методом СИУ [155], приведены в табл. 7.31.

В работе [155] имеются также данные по КИН, когда слоистое полупространство ослаблено двумя коллинеарными трещинами, расположенными в различных слоях. Рассматривалась также произвольно ориентиро-



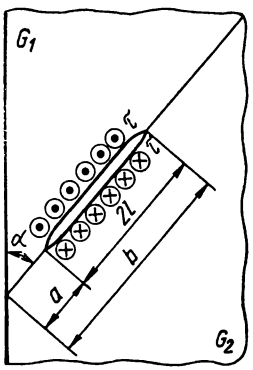


Рис. 7.59. Продольный сдвиг подкрепленного бесконечным слоем полупространства с трещиной, пересекающей линию раздела сред.

Рис. 7.60. Продольный сдвиг составленного из двух разнородных клиньев полупространства с трещиной на линии раздела сред.

ванная трещина в полупространстве, подкрепленном бесконечным слоем [125].

Пусть два упругих разнородных клина образуют полупространство. На линии раздела сред имеется трещина, берега которой загружены постоянными сдвигающими усилиями τ. На границе полупространства и на бесконечности нагрузка отсутствует (рис. 7.60). Задача решена методом СИУ в работе [156]. Ниже приведены значения КИН $K_{\mathrm{III}}/(\tau\sqrt{\pi l}) = F_{\mathrm{III}}$ для соединения эпоксид — алюминий ($G_2/G_1 = 23{,}08$) при $a = l$:

$9\alpha/\pi$	1	2	3	4	5	6	7	8
F_{III} (a)	1,359	1,145	1,081	1,055	1,043	1,037	1,037	1,051
F_{III} (b)	1,232	1,088	1,048	1,032	1,025	1,022	1,022	1,031

В случае краевой трещины (см. рис. 7.60; $a = 0$) известно точное решение [157]

$$K_{\mathrm{III}} = \tau\sqrt{\pi b}\,\exp\left[-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\ln S(p_0)}{1+p_0}\,dp_0\right], \qquad (7.5)$$

где контур L есть бесконечная прямая, параллельная мнимой оси плоскости комплексной переменной p_0 и лежащая в полосе $-1 < \mathrm{Re}\, p_0 < -1/2$,

$S(p_0) = (1 + k)\,\mathrm{ctg}\,(p_0\pi/2)\,\mathrm{tg}\,(p_0\alpha)/[1 + k\mathrm{tg}\,(p_0\alpha)\,\mathrm{ctg}\,(p_0(\pi - \alpha))]$, $k = G_2/G_1$. При $\alpha = \pi/2$ из формулы (7.5) следует: $K_{III} = \tau\sqrt{\pi b}$.

Составной клин. Пусть в составном клине на линии раздела сред имеется свободная от нагрузки краевая трещина. На гранях клина заданы постоянные смещения (рис. 7.61). Точное выражение для КИН имеет вид [158]

$$K_{III} = 2G_1 w_0/\sqrt{l(1 + \lambda)[(1 - \lambda)\varphi_1/2 + \lambda\varphi_0]}, \quad \lambda = G_1/G_2. \qquad (7.6)$$

Данные по КИН для внутренней трещины на линии соединения двух разнородных клиньев имеются в работе [156].

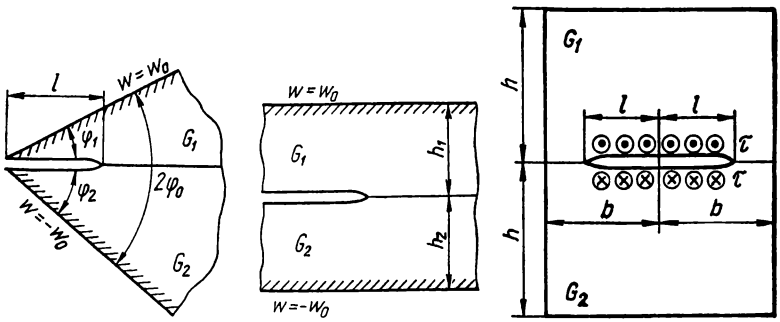


Рис. 7.61. Продольный сдвиг составного клина с краевой трещиной на линии раздела сред.

Рис. 7.62. Продольный сдвиг составного слоя с полубесконечной трещиной на линии раздела сред.

Рис. 7.63. Продольный сдвиг составного прямоугольного бруса с центральной трещиной на линии раздела сред.

Составной слой. Пусть в плоскости соединения двух разнородных слоев имеется свободная от нагрузки полубесконечная трещина. На гранях слоя заданы постоянные смещения (рис. 7.62). КИН определяются по формуле

$$K_{III} = 2\sqrt{2}G_1 w_0/\sqrt{(1 + \lambda)(h_1 + \lambda h_2)}, \quad \lambda = G_1/G_2, \qquad (7.7)$$

которую легко получить из соотношения (7.6) предельным переходом.

Таблица 7.32. **Значения КИН $K_{III}/(\tau\sqrt{\pi l})$ при продольном сдвиге составного прямоугольного бруса с центральной трещиной на линии раздела сред [160]**

$b:h$	$l:b:h$					
	1 : b : h	2 : b : h	3 : b : h	4 : b : h	5 : b : h	6 : b : h
∞ : 10	1,0021	1,0081	1,0178	1,0306	1,0457	1,0622
12 : 10	1,0032	1,0130	1,0295	1,0533	1,0847	1,1246
10 : 10	1,0043	1,0176	1,0408	1,0756	1,1241	1,1890
8 : 10	1,0063	1,0272	1,0645	1,1231	1,2093	1,3313
10 : ∞	1,0041	1,0169	1,0396	1,0740	1,1229	1,1896

Если же на берегах полубесконечной трещины заданы постоянные сдвигающие напряжения τ, а на гранях слоя смещения равны нулю, то

$$K_{III} = \tau \sqrt{2(h_1 + \lambda h_2)/(1 + \lambda)}, \quad \lambda = G_1/G_2.$$

Последнее равенство получено методом суперпозиции результата (7.7) и решения для сплошного составного слоя без трещины при заданных на его гранях постоянных смещениях.

В работе [159] приведены данные по КИН для составного слоя с двумя параллельными полубесконечными трещинами.

Составной прямоугольный брус. Пусть в плоскости соединения двух разнородных брусьев имеется трещина, берега которой нагружены постоянными сдвигающими напряжениями τ. Внешняя граница составного бруса свободна от нагрузки (рис. 7.63). Значения КИН, полученные методом дуальных уравнений — рядов [160], приведены в табл. 7.32. При этом КИН не зависит от упругих постоянных.

7.13. Слоистая среда с круговыми трещинами

Дискообразная трещина в плоскости соединения двух разнородных полупространств. Пусть в бесконечной двухслойной упругой среде в плоскости раздела материалов имеется свободная от нагрузки дискообразная трещина радиуса a. На бесконечности действуют растягивающие напряжения $\sigma_z^\infty = \sigma$, перпендикулярные плоскости трещины (рис. 7.64; $\tau = 0$). Точное решение задачи получено в работах [8, 161—163]. Напряжения на продолжении трещины можно записать в виде [162]

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_z(r, 0) = (1/\sqrt{2\pi\rho})\,\{\tilde{K}_I \cos[\varepsilon \ln(\rho/(\rho + 2a))] - \\ &- \tilde{K}_{II} \sin[\varepsilon \ln(\rho/(\rho + 2a))]\} + O(\rho^0), \\ &\tau_{rz}(r, 0) = (1/\sqrt{2\pi\rho})\,\{\tilde{K}_I \sin[\varepsilon \ln(\rho/(\rho + 2a))] + \\ &+ \tilde{K}_{II} \cos[\varepsilon \ln(\rho/(\rho + 2a))]\} + O(\rho^0), \quad \rho = r - a. \end{aligned}\right\} \qquad (7.8)$$

КИН $\tilde{K}_I$ и $\tilde{K}_{II}$ связаны соотношением

$$\tilde{K}_I + i\tilde{K}_{II} = 2\sigma\sqrt{a}\,\Gamma(2 + i\varepsilon)/\Gamma(1/2 + i\varepsilon),$$

где

$$\varepsilon = (1/(2\pi)) \ln\{[G_1 + G_2(3 - 4\mu_1)]/[G_2 + G_1(3 - 4\mu_2)]\}, \qquad (7.9)$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция комплексного аргумента. Числовые значения КИН $\tilde{K}_I$ и $\tilde{K}_{II}$ приведены в табл. 7.33.

Данные по КИН при растяжении двухслойного пространства с дискообразной трещиной в плоскости раздела сред имеются также в работах [82, 164, 165].

Эта же задача рассматривалась в модифицированной постановке с учетом контакта берегов трещины [166, 167].

Для случая, когда на бесконечности заданы сдвигающие усилия $\tau_{xz}^\infty = \tau$ (см. рис. 7.64; $\sigma = 0$), напряжения на продолжении трещины представляются в виде [168]

$$\sigma_z(r, 0) = (1/\sqrt{2\pi\rho})\,\{\tilde{K}_I \sin[\varepsilon \ln(\rho/(\rho + 2a))] +$$

Таблица 7.33. **Значения КИН для дискообразной трещины в плоскости соединения двух полупространств при растяжении на бесконечности [8]**

ε	$\tilde{K}_I/(2\sigma\sqrt{a/\pi})$	$\tilde{K}_{II}/(2\sigma\sqrt{a/\pi})$	ε	$\tilde{K}_I/(2\sigma\sqrt{a/\pi})$	$\tilde{K}_{II}/(2\sigma\sqrt{a/\pi})$	ε	$\tilde{K}_I/(2\sigma\sqrt{a/\pi})$	$\tilde{K}_{II}/(2\sigma\sqrt{a/\pi})$
0,01	0,99993	0,02386	0,06	0,99747	0,14320	0,11	0,99151	0,26265
0,02	0,99972	0,04773	0,07	0,99656	0,16708	0,12	0,98990	0,28656
0,03	0,99937	0,07159	0,08	0,99551	0,19096	0,13	0,98814	0,31047
0,04	0,99888	0,09546	0,09	0,99431	0,21485	0,14	0,98625	0,33440
0,05	0,99824	0,11933	0,10	0,99298	0,23875	0,15	0,98422	0,35834

$$+\tilde{K}_{II}\cos[\varepsilon\ln(\rho/(\rho+2a))]\}+O(\rho^0),$$

$$\tau_{rz}(r,\ 0)=(1/\sqrt{2\pi\rho})\{\tilde{K}_I\cos[\varepsilon\ln(\rho/(\rho+2a))]-$$

$$-\tilde{K}_{II}\sin[\varepsilon\ln(\rho/(\rho+2a))]\}+O(\rho^0),$$

$$\tau_{\theta z}(r,\ 0)=\tilde{K}_{III}/\sqrt{2\pi\rho}+O(\rho^0),\quad \rho=r-a.$$

Здесь параметр ε дается формулой (7.9), а КИН определяются соотношениями

$$\tilde{K}_I+i\tilde{K}_{II}=-4\tau\sqrt{a}\,(\beta/\pi)\,(1+k)\,[(\beta/\pi)\,(1+k)+$$

$$+\varepsilon\,(1+\varepsilon^2)]^{-1}\,\Gamma\,(2+i\varepsilon)/\Gamma\,(1/2+i\varepsilon),\quad k=G_1/G_2,$$

$$\tilde{K}_{III}=-4\tau\sqrt{a/\pi}\varepsilon\,(1+\varepsilon^2)/[(\beta/\pi)\,(1+k)+\varepsilon\,(1+\varepsilon^2)],$$

$$\beta=[(\varkappa_1+k)-(1+\varkappa_2 k)]/[(\varkappa_1+k)\,(1+\varkappa_2 k)],\ \varkappa_1=3-4\mu_1,$$

$$\varkappa_2=3-4\mu_2.$$

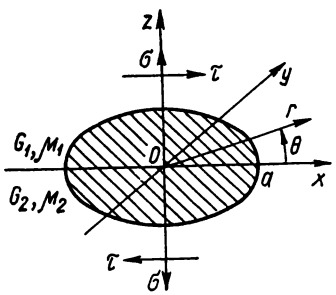
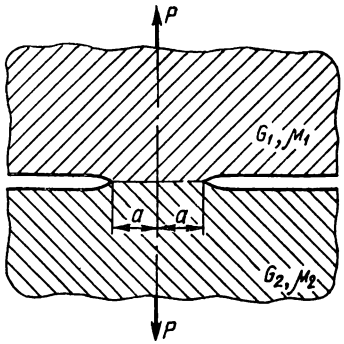


Рис. 7.64. Схема нагружения двух спаянных полупространств с дискообразной трещиной в плоскости раздела сред.

Данные по КИН при сдвиге двухслойного пространства с дискообразной трещиной в плоскости раздела сред имеются также в работе [165].

Внешняя круговая трещина в плоскости соединения двух разнородных полупространств. Пусть два разнородных полупространства соединены между собой по круглой площадке радиуса a. Берега внешней трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности тело растягивается силами P, действующими вдоль оси симметрии (рис. 7.65). Точное решение задачи получено в работе [169]. Напряжения в плоскости соединения полупространств



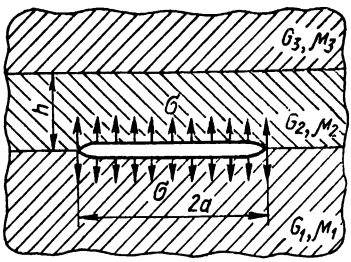


Рис. 7.65. Осевое сечение двухслойного пространства с внешней круговой трещиной в плоскости раздела сред.

Рис. 7.66. Осевое сечение трехслойного пространства с дискообразной трещиной в плоскости раздела сред.

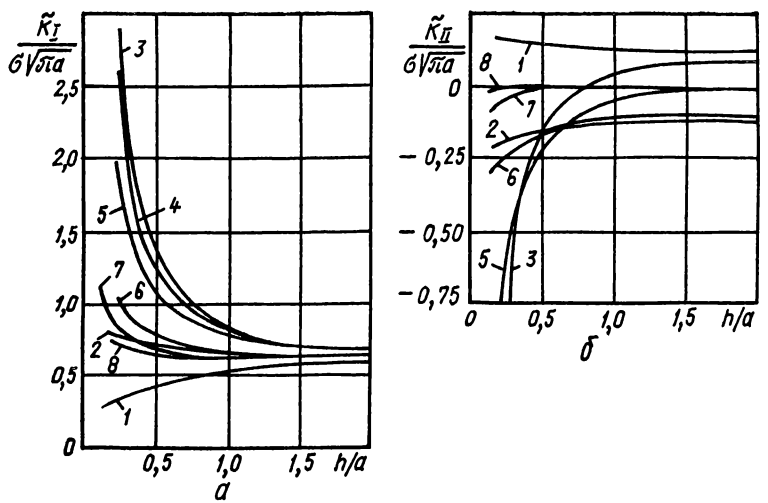


Рис. 7.67. Зависимости КИН $\tilde{K}_I / (\sigma\sqrt{\pi a})$ (*а*) и $\tilde{K}_{II} / (\sigma\sqrt{\pi a})$ (*б*) от параметра h/a для трехслойного пространства с дискообразной трещиной в плоскости раздела сред при действии на ее берегах постоянного давления:

1 — $E_1 : E_2 : E_3 = 10 : 1 : 10$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$; *2* — $E_1 : E_2 : E_3 = 1 : 10 : 1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0{,}3$; *3* — $E_1 : E_2 = 1000 : 45$, $E_3 = 0$, $\mu_1 = 0{,}3$, $\mu_2 = 0{,}35$; *4* — $E_1 : E_2 = 3$, $E_3 = 0$, $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$; *5* — $E_1 : E_2 = 1$, $E_3 = 0$, $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$; *6* — $E_1 : E_2 = 45 : 1000$, $E_3 = 0$, $\mu_1 = 0{,}35$; $\mu_2 = 0{,}3$; *7* — $E_1 : E_2 = 0{,}01$, $E_3 = 0$, $\mu_1 = 0{,}5$, $\mu_2 = 0{,}3$; *8* — $E_1 : E_2 = 0{,}001$, $E_3 = 0$, $\mu_1 = 0{,}5$, $\mu_2 = 0{,}3$ [170].

представляются в виде

$$\sigma_z(r, 0) = (1/\sqrt{2\pi\rho})\{\tilde{K}_I \cos[\varepsilon \ln(\rho/(\rho+2a))] -$$

$$- \tilde{K}_{II} \sin[\varepsilon \ln(\rho/(\rho+2a))]\} + O(\rho^0),$$

$$\tau_{rz}(r, 0) = -(1/\sqrt{2\pi\rho})\{\tilde{K}_I \sin[\varepsilon \ln(\rho/(\rho+2a))] +$$

$$+ \tilde{K}_{II} \cos[\varepsilon \ln(\rho/(\rho+2a))]\} + O(\rho^0), \quad \rho = a - r,$$

где

$$\tilde{K}_I + i\tilde{K}_{II} = (1/4)(P/\pi a^2)\sqrt{a}\varepsilon^{-1}(e^{-\pi\varepsilon} - e^{\pi\varepsilon})\Gamma(1 + i\varepsilon)/\Gamma(1/2 + i\varepsilon),$$

а параметр ε дается соотношением (7.9).

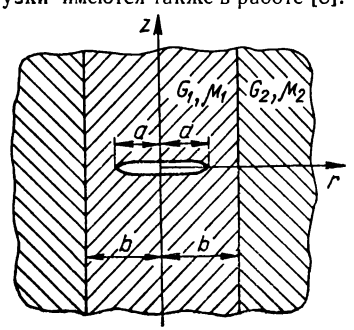
Многослойная среда с трещинами. Пусть бесконечный слой соединен с двумя разнородными полупространствами. В плоскости соединения слоя и полупространства имеется трещина, нагруженная постоянным давлением σ (рис. 7.66). Задача решена методом СИУ в работе [170]. КИН $\tilde{K}_I$ и $\tilde{K}_{II}$, по которым напряжения около фронта трещины определяются соотношениями (7.8), приведены на рис. 7.67.

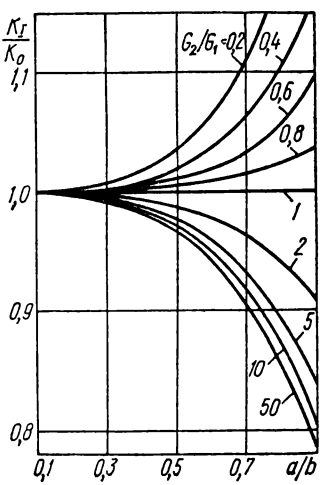
Данные по КИН для трехслойного пространства с дискообразной или кольцевой трещиной в срединной плоскости слоя имеются в работах [8, 171, 172]. Изучалось двухслойное полупространство, когда круговая трещина находится в слое [171, 173] или в плоскости соединения слоя с полупространством [174—177]. Рассматривался также случай двухкомпонентного слоя, когда внутренняя или внешняя круговая трещина расположена на границе соединения слоев [178].

7.14. Пространственные тела с включениями и трещинами

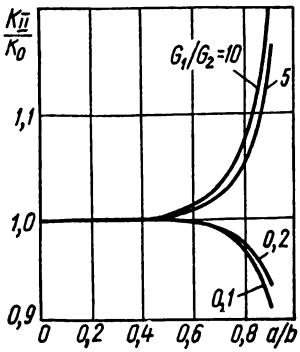
Бесконечное пространство с круговым цилиндрическим включением и плоскими круговыми трещинами. Пусть в бесконечном теле имеется круговое цилиндрическое включение, ослабленное соосной круговой трещиной (рис. 7.68). Когда на берегах трещины действует постоянное давление p ($\sigma_z^{\pm} = -p$), задача решена методом интегральных уравнений в работе [179]. Зависимость КИН от относительного радиуса трещины приведена на рис. 7.69.

Данные по КИН для рассматриваемой нагрузки имеются также в работе [8].





Пусть на берегах трещины (см. рис. 7.68) заданы постоянные радиальные касательные напряжения q ($\tau_{rz}^{\pm} = -q$). Задача решена методом интегральных уравнений в работе [8]. Зависимость КИН от относительного радиуса трещины приведена на рис. 7.70.



Если на берегах трещины задана крутящая нагрузка $\tau_{\theta z}^{\pm} = -\tau_0 (r/a)$,

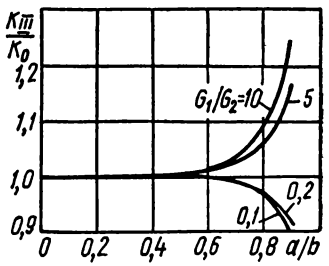
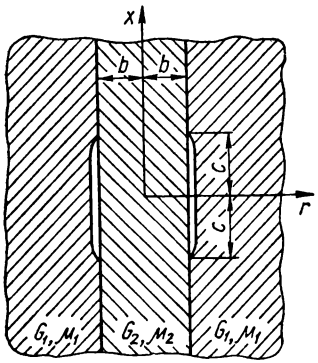


Рис. 7.70. Зависимость КИН K_{II}/K_0 ($K_0 = (1/2)\ q\sqrt{\pi a}$) от параметра a/b для бесконечного пространства с цилиндрическим включением, ослабленным трещиной, при действии на ее берегах радиального сдвига для $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$ [8].

Рис. 7.71. Зависимость КИН K_{III}/K_0 ($K_0 = (4/3)\ \tau_0\sqrt{a/\pi}$) от параметра a/b для бесконечного пространства с цилиндрическим включением, ослабленным трещиной, при действии на ее берегах крутящей нагрузки [8].



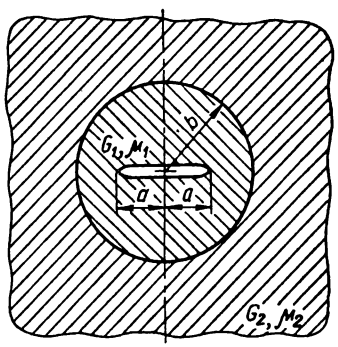


Рис. 7.72. Осевое сечение бесконечного пространства с цилиндрическим включением и трещиной на поверхности раздела сред.

Рис. 7.73. Осевое сечение бесконечного пространства со сферическим включением, содержащим дискообразную трещину.

Рис. 7.68. Осевое сечение бесконечного пространства с круговым цилиндрическим включением, содержащим соосную круговую трещину.

Рис. 7.69. Зависимость КИН K_I/K_0 ($K_0 = 2p\sqrt{a/\pi}$) от параметра a/b для бесконечного пространства с цилиндрическим включением, ослабленным трещиной под давлением, при $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}25$ [179].

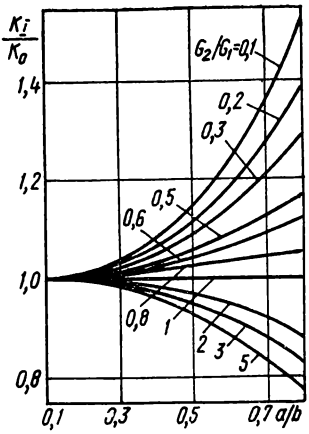


Рис. 7.74. Зависимость КИН K_I/K_0 ($K_0 = 2p\sqrt{a/\pi}$) от параметра a/b для бесконечного пространства со сферическим включением, ослабленным трещиной под давлением, при $\mu_1 = \mu_2 = 1/3$ [186].

задача решена методом интегральных уравнений в работах [8, 180]. Зависимость КИН от относительного радиуса трещины приведена на рис. 7.71.

Периодическая система соосных круговых трещин в цилиндрическом включении, погруженном в бесконечное пространство, рассмотрена в работе [181]. Изучалась также внешняя круговая трещина в бесконечном теле с цилиндрическим включением [182, 183].

Цилиндрическое включение и трещина на поверхности раздела сред. Пусть на поверхности соединения цилиндрического включения с бесконечной матрицей имеется цилиндрическая трещина длиной $2c$ (рис. 7.72), берега которой загружены постоянным давлением p ($\sigma_r^{\pm} = -p$), т. е. состав-

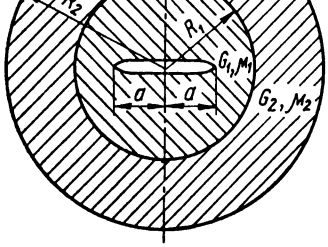


Рис. 7.75. Осевое сечение составного шара с дискообразной трещиной.

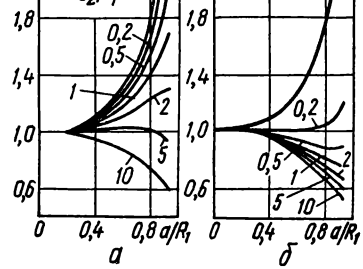


Рис. 7.76. Зависимость КИН K_I/K_0 ($K_0 = 2p\sqrt{a/\pi}$) для дискообразной трещины под давлением в составном шаре, внешняя поверхность которого свободна от нагрузки (*а*) или на ней отсутствуют нормальные смещения и касательные напряжения (*б*), при $R_2/R_1 = 1{,}2$, $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}25$ [189].

ное пространство находится в осесимметричном напряженно-деформированном состоянии. Задача решена методом СИУ в работе [184]. Напряжения на продолжении трещины можно представить в виде

$$\sigma_r - i\tau_{rx} = (\tilde{K}_I - i\tilde{K}_{II})\, e^{i\tau_0}/\sqrt{2\pi\rho} + O(\rho^0), \quad \rho = x - c > 0,$$

где $\tau_0 = \omega \ln[(\rho + 2c)/\rho]$, $\omega = (1/(2\pi)) \ln[(1+\gamma)/(1-\gamma)]$, $\gamma = [G_2(1 - 2\mu_1) - G_1(1 - 2\mu_2)]/[2G_2(1-\mu_1) + 2G_1(1-\mu_2)]$.

Ниже приведены значения КИН $\tilde{K}_{\mathrm{I}}$ и $\tilde{K}_{\mathrm{II}}$ для соединения эпоксидная смола (матрица) — стекловолокно (включение) ($E_1/E_2 = 0{,}0493$, $\mu_1 = 0{,}35$, $\mu_2 = 0{,}2$):

b/c	0,1	1,0	10	∞
$\tilde{K}_{\mathrm{I}}/(p\sqrt{\pi c})$	0,1422	0,4282	0,6366	1,0
$\tilde{K}_{\mathrm{II}}/(p\sqrt{\pi c})$	—0,0210	—0,0335	—0,0766	—0,1310

Известны также данные по КИН для трещины на поверхности соединения цилиндрического включения с бесконечным слоем [185].

Бесконечное пространство со сферическим включением, содержащим дискообразную трещину. Пусть в упругой сфере радиуса b имеется центральная дискообразная трещина, загруженная постоянным давлением p. Сфера помещена в сферическую полость радиуса b в бесконечном пространстве, на поверхности раздела сред имеют место условия идеального контакта (рис. 7.73). Зависимости КИН от относительного радиуса трещины, полученные методом интегральных уравнений [186], приведены на рис. 7.74.

Данные по КИН для дискообразной трещины в сферическом включении имеются также в работе [187]. Рассматривалось также сферическое включение с плоской кольцевой трещиной [188].

Составной шар с дискообразной трещиной. Пусть в шаре, подкрепленном толстостенной сферической оболочкой, имеется центральная дискообразная трещина (рис. 7.75), нагруженная постоянным давлением p. На внешней поверхности составного шара отсутствуют напряжения или нормальные смещения и касательные напряжения. Задачи решены методом интегральных уравнений в работе [189]. Зависимости КИН от относительного радиуса трещины приведены на рис. 7.76.

7.15. Неоднородная упругая среда с трещинами

Плоское напряженное состояние. Пусть бесконечная изотропная неоднородная пластина содержит прямолинейную трещину конечной длины, на берегах которой действует постоянное давление σ (рис. 7.77). Модуль сдвига материала $G(x, y)$ меняется по степенному закону в направлении, перпендикулярном трещине, и постоянен по направлению, параллельному ей, т. е.

$$G(x, y) = G_0 |y|^m, \quad m \geqslant 0, \quad G_0 = \text{const}.$$

Коэффициент Пуассона μ постоянен. Точное решение задачи получено в работах [8, 190]. Нормальные напряжения на линии трещины в окрестности ее вершин имеют асимптотику

$$\sigma_y(x, 0) = K_{\mathrm{I}}/(2\pi\rho)^{\alpha} + O(\rho^0), \quad \rho = x - l \geqslant 0,$$

где $\alpha = (1 - m)/2$ ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$). КИН K_{I} дается выражением

$$K_{\mathrm{I}} = \sqrt{\pi}\sigma(\pi l)^{\alpha}/[\Gamma(1/2 + \alpha)\Gamma(1 - \alpha)], \qquad (7.10)$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

В случае, когда на берегах трещины задана нормальная симметричная нагрузка

$$\sigma_y^+(x, 0) = \sigma_y^-(x, 0) = -p(x) = -p(-x), \quad |x| \leqslant l,$$

КИН равен [8]

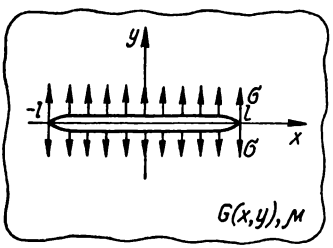
$$K_I = \frac{2\sin(\pi\alpha)}{(\pi/l)^{1-\alpha}} \int_0^l \frac{p(x)\,dx}{(l^2 - x^2)^{1-\alpha}}. \qquad (7.11)$$

Выражения (7.10) и (7.11) определяют решение задачи как при плоском напряженном состоянии, так и при плоской деформации.

Пусть модуль Юнга E экспоненциально меняется в направлении, параллельном трещине, и постоянен в направлении, перпендикулярном ей, т. е.

$$E = E_0 \exp(\beta x), \quad E_0, \beta = \text{const}.$$

Коэффициент Пуассона μ постоянен. Решение задачи получено методом СИУ в работе [191]. При этом распределение напряжений в окрестности вершины трещины такое же, как и в случае однородной среды. Значения



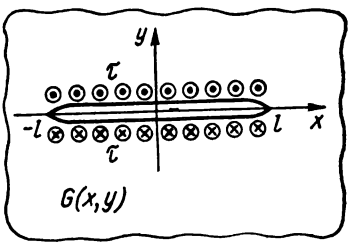


Рис. 7.77. Действие постоянного давления на берегах прямолинейной трещины в бесконечной плоскости с переменным модулем сдвига.

Рис. 7.78. Действие постоянной сдвигающей нагрузки на берегах туннельной трещины в бесконечном пространстве с переменным модулем сдвига.

КИН при действии на трещине постоянного давления σ приведены в табл. 7.34.

Данные по КИН для неоднородных пластин с трещинами имеются также в работах [192—194].

Антиплоская деформация. Пусть бесконечное изотропное пространство содержит туннельную трещину, на берегах которой действуют постоянные сдвигающие напряжения τ (рис. 7.78). Если $G(x, y) = G_0 \mid y \mid^m$ $(m \geqslant 0)$, известно точное решение задачи [8]. При этом касательные напряжения на линии трещины имеют вид

$$\tau_{yz}(x, 0) = K_{III}/(2\pi\rho)^{\alpha} + O(\rho^0),$$

$$\rho = x - l \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \alpha = (1 - m)/2 \leqslant 1/2,$$

где КИН

$$K_{III} = \sqrt{\pi}\tau\,(\pi l)^{\alpha}/[\Gamma(1/2 + \alpha)\,\Gamma(1 - \alpha)].$$

Для случая, когда модуль упругости среды изменяется по экспоненциальному закону,

$$G(x, y) = G_0 \exp(\gamma x + \beta y),$$

значения КИН, полученные методом СИУ [195], приведены в табл. 7.35.

Таблица 7.34. **Значения КИН $K_I/(\sigma\sqrt{\pi l}) = F_I$ при действии постоянного давления на берегах трещины в неоднородной среде ($E = E_0 \exp(\beta x)$, $\mu = 0{,}3$) [191]**

βl	Плоское напряженное состояние		Плоская деформация		βl	Плоское напряженное состояние		Плоская деформация	
	F_I (—)	F_I (—)	F_I (—)	F_I (—)		F_I (—)	F_I (—)	F_I (—)	F_I (—)
0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,50	1,113	0,861	1,117	0,863
0,01	1,003	0,997	1,003	0,997	0,75	1,162	0,797	1,170	0,801
0,10	1,025	0,973	1,026	0,973	1,00	1,209	0,740	1,222	0,745
0,25	1,060	0,930	1,061	0,931					

Таблица 7.35. **Значения КИН $K_{III}/(\tau\sqrt{\pi l}) = F_{III}$ при действии постоянной сдвигающей нагрузки на берегах туннельной трещины в неоднородной среде ($G = G_0 \exp(\gamma x + \beta y)$) [195]**

γl	$\beta l = 0$		βl	$\gamma l = 0$
	F_{III} (—)	F_{III} (—)		F_{III} (—)
0	1,000	1,000	0	1,000
0,1	1,024	0,973	0,1	1,002
0,3	1,063	0,914	0,3	1,012
0,5	1,093	0,855	0,5	1,028
0,75	1,127	0,787	0,75	1,051
1,0	1,153	0,726	1,0	1,076

Данные по КИН для трещин продольного сдвига в неоднородных средах с модулем сдвига, являющимся непрерывной функцией пространственных координат, имеются также в работах [196—198]. Рассматривался также случай трещины на линии соединения двух разнородных полуплоскостей с переменными модулями сдвига [195].

Дискообразная трещина. Пусть в бесконечном теле, отнесенном к цилиндрической системе координат (r, θ, z), в плоскости $z = 0$ имеется дискообразная трещина радиуса a с центром в начале координат (рис. 7.79). Модуль сдвига среды зависит от координаты z:

$$G = G_0 |z|^n, \quad n \geqslant 0,$$

а коэффициент Пуассона μ постоянен. На берегах трещины действует постоянное давление p ($\sigma_z^{\pm} = -p$), а на бесконечности напряжения равны нулю. Точное решение задачи получено в работах [8, 190]. Для напряжений σ_z на продолжении трещины получено асимптотическое представление

$$\sigma_z(r, 0) = K/(2\pi\rho)^{\beta} + O(\rho^{\beta}), \quad \rho = r - a \geqslant 0, \tag{7.12}$$

где $K_I = p(\pi a)^{\beta} \sin(\pi\beta)/(\pi\beta)$ $(0 \leqslant \beta = (1 - n)/2 \leqslant 1/2)$.

Если же на берегах дискообразной трещины задана крутящая нагрузка $\tau_{\theta z}^{\pm} = -\tau(r)$, то в плоскости $z = 0$ напряжения $\tau_{\theta z}$ представляются в виде [199]

$$\tau_{\theta z}(r, 0) = K_{III}/(2\pi\rho)^{\beta} + O(\rho^0),$$

где

$$K_{III} = \frac{2\sin(\pi\beta)}{\pi a\,(a/\pi)^{\beta}} \int_0^a \frac{r^2\tau(r)\,dr}{(a^2 - r^2)^{1-\beta}}.$$

В частном случае, когда $\tau(r) = \tau_1 = \text{const}$, КИН равен [199]

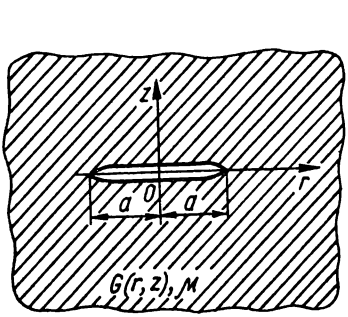
$$K_{III} = \tau_1 (\pi a)^{\beta} \Gamma(\beta) \sin(\pi\beta)/[2\sqrt{\pi}\Gamma(^3/_2 + \beta)],$$

где $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция.

При $\tau(r) = \tau_0 (r/a)$ ($\tau_0 = \text{const}$) для КИН получена формула [8, 199]

$$K_{III} = \tau_0 (\pi a)^{\beta} \sin(\pi\beta)/[\pi\beta(1 + \beta)].$$

Имеются также данные по КИН для дискообразной трещины, когда модуль сдвига среды зависит от радиальной координаты r [200]. Рассматри-



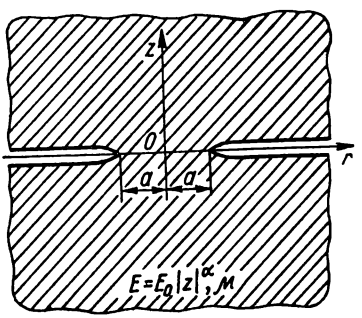


Рис. 7.79. Осевое сечение бесконечного тела с переменным модулем сдвига, ослабленного дискообразной трещиной.

Рис. 7.80. Осевое сечение бесконечного тела с переменным модулем упругости, ослабленного внешней круговой трещиной.

вался также неоднородный круговой цилиндр с дискообразной трещиной [199].

Внешняя круговая трещина. Пусть в бесконечном теле, отнесенном к цилиндрической системе координат (r, θ, z), в плоскости $z = 0$ имеется внешняя круговая трещина с внутренним радиусом a (рис. 7.80). Модуль упругости среды зависит от координаты z:

$$E = E_0 |z|^{\alpha}, \quad E_0 = \text{const}, \quad |\alpha| < 1,$$

а коэффициент Пуассона μ постоянен. На берегах трещины задана нормальная нагрузка

$$\sigma_z^{\pm} = \sigma(r, \theta) \quad (a \leqslant r < \infty, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi).$$

Замкнутое решение задачи получено в работе [201]. Для нормальных напряжений σ_z в плоскости трещины имеет место асимптотическое представление

$$\sigma_z = K_I/(2\pi\rho)^{(1-\alpha)/2} + O(\rho^0) \quad (\rho = a - r \geqslant 0),$$

аналогичное соотношению (7.12). Здесь КИН K_I определяется по формуле

$$K_I = \frac{\cos(\pi\alpha/2)}{\pi^2 (a/\pi)^{(1-\alpha)/2}} \int_a^\infty \frac{r_0 dr_0}{(r_0^2 - a^2)^{(1+\alpha)/2}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{1 - (a/r_0)\, e^{-i(\theta-\theta_0)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1 - (a/r_0)\, e^{i(\theta-\theta_0)}} - 1 \right] \sigma(r_0, \theta)\, d\theta_0. \qquad (7.13)$$

В осесимметричном случае, когда $\sigma(r, \theta) = \sigma(r)$, решение (7.13) принимает более простую форму [201]:

$$K_I = \frac{2\cos(\pi\alpha/2)}{\pi (a/\pi)^{(1-\alpha)/2}} \int_a^\infty \frac{\sigma(r)\, r dr}{(r^2 - a^2)^{(1+\alpha)/2}}. \qquad (7.14)$$

Результаты (7.13) и (7.14) так же, как и соответствующие решения аналогичных задач для однородного тела (п. 6.5), справедливы при условии, то на бесконечности отсутствуют смещения.

К гл. 1

1. *Irwin G. R.* Fracture // Handbuch der Physik.— Berlin : Springer,1958.— **6.**— S. 551—590.
2. *Колосов Г. В.* Применение комплексной переменной к теории упругости.— М., Л. : ОНТИ, 1935.— 224 с.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М. : Наука, 1966.— 707 с.
4. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение : В 7-ми т. / Ред. Г. Либовиц.— Т. 2. Математические основы теории разрушения.— М. : Мир, 1975.— С. 83—203.
5. *Williams M. L.* On the stress distribution at the base of a stationary crack // J. Appl. Mech.— 1957.— **24,** N 1.— P. 109—114.
6. *Си.* Распределение напряжений вблизи концов трещины продольного сдвига // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1965.— **32,** № 1.— С. 57—65.
7. *Benthem J. P.* State of stress at the vertex of a quarter-infinite crack in a half-space // Int. J. Solids and Struct.— 1977.— **13,** N 5.— P. 479—492.
8. *Benthem J. P.* A quarter-infinite crack in a half space; alternative and additional solutions // Int. J. Solids and Struct.— 1980.—**16,** N 2.— P. 119—130.
9. *Bazant Z. P., Estenssoro L. F.* Surface singularity and crack propagation // Int. J. Solids and Struct.— 1979.— **15,** N 5.— P. 405—428.
10. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения.— М. : Наука, 1974.— 640 с.
11. *Sih G. C., Chen E. P.* Cracks in composite materials: A compilation of stress solutions for composite systems with cracks.— London etc. : Martinus Nijhoff publishers, 1981.— 538 p.— (Mechanics of fracture; 6).
12. *Williams M. L.* The stresses around a fault or crack in dissimilar media // Bull. Seismological Soc. America.— 1959.— **49,** N 2.— P. 199—204.
13. *Райс, Си.* Плоские задачи о трещинах, расположенных на границе раздела двух различных сред // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1965.— **32,** № 2.— С. 186—192.
14. *Theocaris P. S., Gdoutos E. E.* Stress singularities in cracked composite full-planes // Int. J. Fract.— 1977.— **13,** N 6.— P. 763—773.
15. *Sendeckyj G. P.* Analysis of cracks in heterogeneous solids // Fract. Mech. Ceram.— New York; London, 1974.— **1.**— P. 269—282.
16. *Зак, Вильямс.* Сингулярности в напряжениях у конца трещины на поверхности раздела двух материалов // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1963.— **30,** № 1.— С. 169—171.
17. *Swenson D. O., Rau C. A.* The stress distribution around a crack perpendicular to an interface between materials // Int. J. Fract. Mech.—1970.— **6,** N 4.— P. 357—365.

18. *Cook T. S., Erdogan F.* Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface // Int. J. Eng. Sci.— 1972.— **10**, N 8.— P.677—697.
19. *Gupta G. D.* A layered composite with a broken laminate // Int. J. Solids and Struct.— 1973.— **9**, N 10.— P. 1141—1154.
20. *Erdogan F., Gupta G. D.* The inclusion problem with a crack crossing the boundary // Int. J. Fract.— 1975.— **11**, N 1.— P. 13—27.
21. *Lin K. Y., Mar J. W.* Finite element analysis of stress intensity factors for cracks at a bi-material interface // Int. J. Fract.— 1976.— **12**, N 4— P. 521—531.
22. *Боджи.* Плоская статическая задача о нагруженной трещине, заканчивающейся на границе раздела двух материалов // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1971.— **38**, № 4.— С. 196—202.
23. *Fenner D. N.* Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface // Int. J. Fract.— 1976.— **12**, N 5.— P. 705—721.
24. *Bassani J. L., Erdogan F.* Stress intensity factors in bonded half planes containing inclined cracks and subjected to antiplane shear loading // Int. J. Fract.— 1979.— **15**, N 2.— P. 145—158.
25. *Creager M., Paris P. C.* Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking // Int. J. Fract. Mech.— 1967.— **3**, N 4.— P. 247—252.
26. *Парис П., Си Дж.* Анализ напряженного состояния около трещин // Прикладные вопросы вязкости разрушения.— М. : Мир, 1968.— С.64—142.
27. *Ивлев Д. Д.* О теории трещин квазихрупкого разрушения // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1967.— № 6.— С. 88—128.
28. *Cartwright D. J., Rooke D. P.* Evaluation of stress intensity factors // J. Strain Anal.— 1975.— **10**, N 4.— P. 217—224.
29. *Sih G. C.* Handbook of stress-intensity factors.— Bethlehem : Lehigh University Press, 1973.— Vol. 1.— 420 p.
30. *Tada H., Paris P. C., Irwin G. R.* The stress analysis of cracks : Handbook.— Hellertown : Del Research Corp., 1973.— 385 p.
31. *Erdogan F.* Stress intensity factors // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1983.— **50**, N 4.— P. 992—1002.
32. *Сиратори М., Миёси Т., Мацусита Х.* Вычислительная механика разрушения.— М. : Мир, 1986.— 334 с.
33. *Westergaard H. M.* Bearing pressures and cracks // J. Appl. Mech.— 1939.— **6**, N 2.— P. A49—A53.
34. *Gross B., Srawley J. E., Brown W. F.* Stress intensity factors for a single edge notch tensile specimen by boundary collocation of a stress function.— NASA TN D-2398, 1964.— 11 p.
35. *Gross B., Srawley J. E.* Stress intensity factors for single edge notch specimens in bending or combined bending and tension.— NASA TN D-2603, 1965.
36. *Gross B., Srawley J. E.* Stress intensity factors by boundary collocation for single-edge-notch specimens subjected to splitting forces.— NASA TN D-3295, 1966.
37. *Кобаяси, Черепи, Кинсел.* Численный метод оценки коэффициента интенсивности напряжений вблизи трещины в пластинке конечных размеров // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теорет. основы инж. расчетов.— 1964.— **86**, № 4.— С. 52—56.
38. *Вурен.* Замечания по поводу численного метода оценки коэффициента интенсивности напряжений в пластине конечных размеров // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теорет. основы инж. расчетов.— 1967.— **89**, № 1.— С. 271—272.

39. *Newman J. C.* An improved method of collocation for the stress analysis of cracked plate with various shaped boundaries.— NASA TN D-6376, 1971.— 45 p.
40. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами.— Киев : Наук. думка, 1968.— 246 с.
41. *Bowie O. L.* Solutions of plane crack problems by mapping technique // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 1—55.— (Mechanics of fracture : 1).
42. *Каминский А. А.* Хрупкое разрушение вблизи отверстий.— Киев : Наук. думка, 1982.— 158 с.
43. *Isida M.* Method of Laurent series expansion for internal crack problems // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 56— 130.— (Mechanics of fracture; 1).
44. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости.— Л. : Наука, 1968.— 402 с.
45. *Sneddon I. N., Lowengrub M.* Crack problems in the classical theory of elasticity.— New York ; London : Wiley, 1969.— 221 p.
46. *Sneddon I. N.* Integral transform methods // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 315—367.— (Mechanics of fracture; 1).
47. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.— М. : Наука, 1982.— 342 с.
48. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.— Киев : Наук. думка, 1976.— 444 с.
49. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.— Киев : Наук. думка, 1981.— 324 с.
50. *Андрейкив А. Е.* Пространственные задачи теории трещин.— Киев : Наук. думка, 1982.— 354 с.
51. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами.— Киев : Наук. думка, 1983.— 277 с.
52. *Панасюк В. В., Саврук М. П.* Плоские задачи теплопроводности и термоупругости для тел с трещинами // Успехи механики.— 1984.— **7**, № 2.— С. 75—115.
53. *Chen Yi-zhou.* General case of multiple crack problems in an infinite plate // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **20**, N 4.— P. 591—597.
54. *Нобл Б.* Метод Винера — Хопфа.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 278 с.
55. *Koiter W. T.* On the flexural rigidity of a beam weakened by transverse saw cuts // Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.— 1956.— **B59**, N 4.— P. 354—374.
56. *Westmann R. A.* Pressurized star crack // J. Math. and Phys.— 1964.— **43**, N 3.— P. 191—198.
57. *Кнаусс.* Напряжения в бесконечной полосе, содержащей полубесконечную трещину // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1966.— **33**, № 2.— С. 108—113.
58. *Храпков А. А.* Первая основная задача для кусочно-однородной плоскости с разрезом, перпендикулярным прямой раздела // Прикл. математика и механика.— 1968.— **32**, № 4.— С. 647—659.
59. *Nisitani H.* Solutions of notch problems by body force method // Stress analysis of notch problems.— Alphen aan den Rijn: Noordhoff Intern. Publ., 1978.— P. 1—68.— (Mechanics of fracture; 5).
60. *Benthem J. P., Koiter W. T.* Asymptotic approximations to crack problems // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden: Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 131—178.— (Mechanics of fracture; 1).
61. *Морозов Е. М., Никишков Г. П.* Метод конечных элементов в механике разрушения.— М. : Наука, 1980.— 254 с.

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М. : Наука, 1966.— 707 с.
2. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.— Киев : Наук. думка, 1976.— 444 с.
3. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.— Киев : Наук. думка, 1981.— 324 с.
4. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение.— М. : Мир, 1975.— **2.**— С. 83—203.
5. *Парис П., Си Дж.* Анализ напряженного состояния около трещин // Прикладные вопросы вязкости разрушения.— М. : Мир, 1968.— С. 64—142.
6. *Sih G. C.* Handbook of stress-intensity factors.— Bethlehem : Lehigh University Press, 1973.— Vol. 1.— 420 p.
7. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения.— М. : Наука, 1974.— 640 с.
8. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами.— Киев : Наук. думка, 1968.— 246 с.
9. *Tada H., Paris P. C., Irwin G. R.* The stress analysis of cracks : Handbook.— Hellertown : Del Research Corp., 1973.— 385 p.
10. *Irwin G. R.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech.— 1957.— **24,** N 3.— P. 361—364.
11. *Erdogan F. E.* On the stress distribution in plates with collinear cuts under arbitrary loads // Proc. 4th US Nat. Congr. of Appl. Mech.— Oxford etc., 1962.— **1.**— P. 547—553.
12. *Rooke D. P., Cartwright D. J.* The compendium of stress intensity factors.— London : Her Majesty's Stationare Office, 1976.— 330 p.
13. *Баренблатт Г. И.* О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинах // Прикл. математика и механика.— 1959.— **23,** № 4.— С. 706—721.
14. *Sneddon I. N., Tweed J.* The stress intensity factor for a Griffith crack in an elastic body in which body forces are acting // Int. J. Fract. Mech.— 1967.— **3,** N 4.— P. 317—330.
15. *Parihar K. S., Lalitha S.* Griffith cracks in an elastic medium in which body forces are acting // Eng. Fract. Mech.— 1985.— **22,** N 1.— P. 135—148.
16. *Maiti M.* On the extension of a crack due to rigid inclusions // Int. J. Fract.— 1979.— **15,** N 4.— P. 389—393.
17. *Maiti M.* On the equilibrium of a Griffith crack opened by a rigid inclusion // SIAM J. Appl. Math.— 1980.— **38,** N 2.— P. 209—214.
18. *Tweed J.* The stress intensity factor of a Griffith crack which is opened by a thin symmetric wedge // J. Elast.— 1971.— **1,** N 1.— P. 29—35.
19. *Маркузон И. А.* О расклинивании хрупкого тела клином конечной длины // Прикл. математика и механика.— 1961.— **25,** № 2.— С. 356—361.
20. *McCartney L. N.* General solution of a certain mixed boundary value crack problem // Int. J. Eng. Sci.— 1983.— **21,** N 2.— P. 131—142.
21. *Sih G. C.* Handbook of stress-intensity factors.— Bethlehem : Lehigh University Press, 1974.— Vol. 2.— 406 p.
22. *Прусов И. А.* Термоупругие анизотропные пластины.— Минск : Изд-во Белорус. ун-та, 1978.— 200 с.
23. *Sih G. C., Chen E. P.* Cracks in composite materials : A compilation of stress solutions for composite systems with cracks.— London etc. : Martinus Nijhoff publishers, 1981.— 538 p.— (Mechanics of fracture; 6).

24. *Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г.* Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле.— Киев : Наук. думка, 1983.— 288 с.
25. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О расклинивании хрупких тел // Прикл. математика и механика.— 1960.— **24**, № 4.— С. 667—682.
26. *Maiti M., Paramguru R.* Stress distribution due to a crack opened by a semi-infinite wedge // Int. J. Fract.— 1982.— **18**, N 1.— P. 39—44.
27. *Freund L. B.* Stress intensity factor calculations based on a conservation integral // Int. J. Solids and Struct.— 1978.— **14**, N 3.— P. 241—250.
28. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О равновесии и распространении трещин в анизотропной среде // Прикл. математика и механика.— 1961.— **25**, № 1.— С. 46—55.
29. *Бережницкий Л. Т., Онышко Л. И., Попеляев В. А.* Фундаментальные решения для анизотропной пластины с трещиной // Физ.-хим. механика материалов.— 1981.— **17**, № 1.— С. 75—79.
30. *Stallybrass M. P.* Some comments on external crack problems in 2-dimensional elastostatics // Int. J. Eng. Sci.— 1981.— **19**, N 1.— P. 57—61.
31. *Mastrojannis E. N., Kermanidis T. B., Mastrogiannis Arg.* On the problem of two collinear external line cracks // Int. J. Eng. Sci.— 1982.— **20**, N 12.— P. 1353—1363.
32. *Maiti M., Paramguru R.* Stress distribution due to an external crack opened by two rigid inclusions // Eng. Fract. Mech.— 1980.— **13**, N 4.— P. 767—773.
33. *Krenk S.* The stress distribution in an infinite anisotropic plate with colinear cracks // Int. J. Solids and Struct.— 1975.— **11**, N 4.— P. 449—460.
34. *Cotterell B., Rice J. R.* Slightly curved or kinked cracks // Int. J. Fract.— 1980.— **16**, N 2.— P. 155—169.
35. *Characteristics* of brittle fracture under general combined modes including those under bi-axial tensile loads / Y. Ueda, K. Ikeda, T. Yao, M. Aoki // Eng. Fract. Mech.— 1983.— **18**, N 6.— P. 1131—1158.
36. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений для криволинейной трещины, мало отличающейся от дугообразной или прямолинейной // Физ.-хим. механика материалов.— 1980.— **16**, № 2.— С. 57—63.
37. *Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л.* Хрупкое разрушение тел с произвольными трещинами // Успехи механики деформируемых сред.— М. : Наука, 1975.— С. 156—171.
38. *Narendran V. M., Cleary M. P.* Elastostatic interaction of multiple arbitrarily shaped cracks in plane inhomogeneous regions // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **19**, N 3.— P. 481—506.
39. *Дацышин А. П., Марченко Г. П.* Краевая криволинейная трещина в упругой полуплоскости // Физ.-хим. механика материалов.— 1985.— **21**, № 1.— С. 67—71.
40. *Марченко Г. П., Дацышин А. П.* Предельное равновесие полуплоскости с криволинейной трещиной / Ред. журн. «Физ.-хим. механика материалов».— Львов, 1987.— 82 с.— Деп. в ВИНИТИ 11.12.87, № 8663—В87.
41. *Куршин Л. М., Суздальницкий И. Д.* Напряженное состояние плоскости с криволинейным разрезом // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1978.— № 1.— С. 177—180.
42. *Суздальницкий И. Д.* К оценке влияния длины криволинейного разреза на коэффициенты интенсивности напряжений // Прочность, устойчивость и колебания тонкостен. и монолит. авиац. конструкций.— Казань, 1980.— С. 107—110.

43. *Гольдштейн Р. В., Савова Л. Н.* Об определении раскрытия и коэффициентов интенсивности напряжений для гладкой криволинейной трещины в упругой плоскости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1972.— № 2.— С. 69—78.
44. *Фильштинский Л. А.* Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1976.— № 5.— С. 91—97.
45. *Chatterjee S. N.* The stress field in the neighbourhood of a branched crack in an infinite elastic sheet // Int. J. Solids and Struct.— 1975.— **11**, N 5.— P. 521—538.
46. *Ioakimidis N. I., Theocaris P. S.* The modified Lobatto — Chebyshev method applied to the numerical evaluation of stress intensity factors in cracks with a corner point // Rev. roum. sci. techn. Sér. méc. appl.— 1980.— **25**, N 2.— P. 151—159.
47. *Kitagawa H., Yuuki R., Ohira T.* Crack-morphological aspects in fracture mechanics // Eng. Fract. Mech.— 1975.— **7**, N 3.— P. 515—529.
48. *Kitagawa H., Yuuki R.* Коэффициенты интенсивности напряжений в задачах о ветвящихся трещинах при плосконапряженном состоянии // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1975.— **41**, № 346.— С. 1641—1649.— Яп.
49. *Theocaris P. S., Ioakimidis N. I.* Mode I stress intensity factors at corner points in plane elastic media // Eng. Fract. Mech.— 1980.— **13**, N 4.— P. 699—708.
50. *Осив П. Н., Саврук М. П.* Определение напряжений в бесконечной пластине с ломаной или ветвящейся трещиной // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1983.— № 2.— С. 142—147.
51. *Lo K. K.* Analysis of branched cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1978.— **45**, N 4.— P. 797—802.
52. *Nisitani H., Chen D. H., Isida M.* An approximate method for calculating K_{I} and K_{II} of various edge cracks emanating from the apex of an elliptic hole // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.— 1984.— **A50**, N 451.— P 341—350.
53. *Isida M., Chen D. H., Nisitani H.* Plane problems of an arbitrary array of cracks emanating from the edge of an elliptical hole // Eng. Fract. Mech.—1985.—**21**, N 5.— P. 983—995.
54. *Wu C. H.* The plane problem of a semi-infinite L-shaped crack // Proc. Int. Conf. Fract. Mech. and Technol. (Hong Kong, 1977).— Alphen aan den Rijn, 1977.— **2**.— P. 1201—1211.
55. *Bilby B. A., Cardew G. E., Howard I. C.* Stress intensity factors at the tips of kinked and forked cracks // Adv. Res. Strength and Fract. Mater. 4th Int. Conf. Fract. (Waterloo, 1977).— New York etc. : Pergamon Press, 1978.— **3A**.— P. 197—200.
56. *Hayashi K., Nemat-Nasser S.* Energy-release rate and crack kinking under combined loading // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1981.— **48**, N 3.— P. 520—524.
57. *Karihaloo B. L., Keer L. M., Nemat-Nasser S.* Crack kinking under nonsymmetric loading // Eng. Fract. Mech.— 1980.— **13**, N 4.— P. 879—888.
58. *Храпков А. А.* Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил // Прикл. математика и механика.— 1971.— **35**, № 4.— С. 677—689.
59. *Кулиев В. Д., Садыхов А. Э.* Проблема Римана для двух пар функций и одно ее применение в теории упругости // Изв. АН АрмССР. Механика.— 1979.— **32**, № 2.— С. 26—37.

60. *Hussain M. A., Pu S. L., Underwood J.* Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II // Fracture Analysis.— Philadelphia : ASTM, 1974.— P. 2—28.— (ASTM STP 560).
61. *Howard I. C.* Simple approximate results for the stress intensity factors at the tip of a kinked crack // Int. J. Fract.— 1978.— **14,** N 6.— P. R307—R310.
62. *Approximate* description of crack kinking and curving / B. L. Karihaloo, L. M. Keer, S. Nemat-Nasser, A. Oranratnachai // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1981.— **48,** N 3.— P. 515—519.
63. *Ichikawa M., Tanaka S.* A critical analysis of the relationship between the energy release rate and the stress intensity factors for non-coplanar crack extension under combined mode loading // Int. J. Fract.— 1982.— **18,** N 1.— P. 19—28.
64. *Ромалис Н. Б.* Об эквивалентности энергетического и силового подходов в теории трещин в общем случае двумерной нагрузки // Физ.-хим. механика материалов.— 1982.— **18,** № 3.— С. 12—15.
65. *Kageyama K., Okamura H.* Упругий анализ трещины с бесконечно малым отростком при растяжении и поперечном сдвиге и критерий максимума скорости высвобождения энергии // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1982.— **A48,** № 430.— С. 783—790.— Яп.
66. *Vitek V.* Plane strain stress intensity factors for branched cracks // Int. J. Fract.— 1977.— **13,** N 4.— P. 481—501.
67. *Isida M.* Анализ коэффициентов интенсивности напряжений для пластин, содержащих произвольный ряд прямолинейных или разветвленных трещин // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1978.— **44,** № 380.— С. 1122—1130.— Яп.
68. *Miller G. R., Keer L. M.* Approximate analitical model of anchor pull-out test // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1982.— **49,** N 4.— P. 768—772.
69. *Theocaris P. S., Ioakimidis N. I.* The symmetrically branched crack in an infinite elastic medium // Z. angew. Math. und Phys.— 1976.— **27,** N 6.— P. 801—814.
70. *Isida M., Noguchi H.* Formulae of stress intensity factors of branched cracks in plane problems // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.— 1983.— **A49,** N 440.— P. 469—479.
71. *Theocaris P. S.* Branched cracks at small angles (an addendum) // Eng. Fract. Mech.— 1983.— **17,** N 4.— P. 361—366.
72. *Theocaris P. S.* Asymmetric branching of cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1977.— **44,** N 4.— P. 611—618.
73. *Wilson W. K., Cherepko J.* Analysis of cracks with myltiple branches // Int. J. Fract.— 1983.— **22,** N 4.— P. 303—315.
74. *Бойко А. В., Карпенко Л. Н.* Предельное состояние пластины, ослабленной трещиной сложной формы, при двухосном растяжении // Пробл. прочности.— 1980.— № 8.— С. 41—45.
75. *Williams W. E.* A star-shaped crack deformed by an arbitrary internal pressure // Int. J. Eng. Sci.— 1971.— **9,** N 8.— P. 705—712.
76. *Westmann R. A.* Pressurized star crack // J. Math. and Phys.— 1964.— **43,** N 3.— P. 191—198.
77. *Ouchterlony F.* Stress intensity factors for the expansion loaded star crack // Eng. Fract. Mech.— 1976.— **8,** N 2.— P. 447—448.
78. *Srivastav R. P., Narain P.* Certain two-dimensional problems of stress distribution in wedge shaped elastic solids under discontinuous loads // Proc. Camb. Phil. Soc.— 1965.— **61,** N 4.— P. 945—954.
79. *Шер Е. Н.* Об одном случае равновесия системы радиальных трещин // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1974.— № 5.— С. 156—159.
80. *Нуллер Б. М., Рывкин М. Б.* Об одном методе решения циклических краевых задач // Изв. ВНИИ гидротехники.— 1979.— **129.**— С. 9—13.

81. *Rooke D. P., Sneddon I. N.* The crack energy and the stress intensity factor for a cruciform crack deformed by internal pressure // Int. J. Eng. Sci.— 1969.— **7**, N 10.— P. 1079—1089.
82. *Stallybrass M. P.* A cruciform crack deformed by an arbitrary internal pressure // Int. J. Eng. Sci.— 1969.— **7**, N 11.— P. 1103—1116.
83. *Stallybrass M. P.* A pressurized crack in the form of a cross // Quart. J. Mech. and Appl. Math.— 1970.— **23**, N 1.— P. 35—48.
84. *Sneddon I. N., Das S. C.* The problem of the unsymmetrical cruciform crack // Trends elasticity and thermoelasticity.— Groningen, 1971.— P. 233—247.
85. *Theocaris P. S., Ioakimidis N. I.* A method of solution of the problem of the unsymmetric cruciform crack in an infinite plane isotropic elactic medium // Acta mech.— 1978.— **29**, N 1—4.— P. 127—133.
86. *Бойко А. В., Карпенко Л. Н.* О некоторых численных методах решения плоской задачи теории упругости для тел с трещинами при помощи сингулярных интегральных уравнений // Прикл. механика.— 1980.— **16**, № 8.— С. 64—70.
87. *Aksogan O.* The stress intensity factors for X-formed arrays of cracks // Adv. Res. Strength and Fract. Mater. 4th Int. Conf. Fract. (Waterloo, 1977).— New York etc. : Pergamon Press, 1978.— **3A**.— P. 177—184.
88. *Hasebe N., Ueda M.* Crack originating from a corner of a square hole // Eng. Fract. Mech.— 1980.— **13**, N 4.— P. 913—923.
89. *Tweed J.* The determination of the stress intensity factors of a pair of coplanar Griffith cracks whose surfaces are loaded asymmetrically // Eng. Fract. Mech.— 1971.— **3**, N 4.— P. 381—402.
90. *Willmore T. J.* The distribution of stress in the neighbourhood of a crack // Quart. J. Mech. and Appl. Math.— 1949.— **2**, N 1.— P. 53—64.
91. *Бережницкий Л. Т.* О предельном равновесии пластины, ослабленной системой трещин, расположенных вдоль прямой под углом в направлении растяжения // Концентрация напряжений.— Киев : Наук. думка, 1965.— **1**.— С. 46—52.
92. *Буйна Е. В.* Определение величины критических сил для хрупкой пластины с двумя трещинами одинаковой длины // Вопросы механики реального твердого тела.— Киев : Наук. думка, 1964.— **2**.— С. 64—70.
93. *Field* of stresses in an infinite plate containing two collinear cuts loaded at an arbitrary location / G. Vialaton, G. Lhermet, G. Vessiere et al. // Eng. Fract. Mech.— 1976.— **8**, N 3.— P. 525—538.
94. *Bueckner H. F.* The weigth functions of the configuration of collinear cracks // Int. J. Fract.— 1975.— **11**, N 1.— P. 71—83.
95. *Sörgel W., Günther W.* Zur Wechselwirkung bei Mehrfachrissen // Techn. Mech.— 1983.— **4**, N 3.— S. 5—11.
96. *Goyal D. P.* On three coplanar Griffith cracks in an infinite elastic medium // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1974.— **5**, N 6.— P. 556—567.
97. *Лозовой Б. Л.* Критические напряжения для пластины с тремя трещинами // Вопросы механики реального твердого тела.— Киев : Наук. думка, 1964.— **2**.— С. 59—63.
98. *Isida M.* Analysis of stress intensity factors for plates containing random array of cracks // Bull. JSME.— 1970.— **13**, N 59.— P. 635—642.
99. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения.— М. : Наука, 1985.— 504 с.
100. *Rubinstein A. A.* Macrocrack interaction with semi-infinite microcrack array // Int. J. Fract.— 1985.— **27**, N 2.— P. 113—119.
101. *Yokobori T., Uozumi M., Ichikawa M.* Interaction between non-coplanar parallel staggered elastic cracks // Repts Res. Inst. Strength and Fract. Mater. Tohoku Univ.— 1971.— **7**, N 1.— P. 25—47.

102. *Theocaris P. S., Chrysakis A. C.* Stress intensity factors at a finite number of parallel, equal cracks: a mixed-mode problem // Solid Mech. Arch.— 1983.— **8**, N 4.— P. 313—335.
103. *Chen Yi-zhou.* General case of multiple crack problems in an infinite plate // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **20**, N 4.— P. 591—597.
104. *Саврук М. П., Дацышин А. П.* О предельном равновесии пластины, ослабленной двумя произвольно ориентированными трещинами // Прикл. механика.— 1973.— **9**, № 7.— С. 49—56.
105. *Badaliance R., Gupta G. D.* Growth characteristics of two interacting cracks // Eng. Fract. Mech.— 1976.— **8**, N 2.— P. 341—353.
106. *Chen Y. Z.* Multiple crack problems of antiplane elasticity in an infinite body // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **20**, N 5/6.— P. 767—775.
107. *Özbek T.* The plane problem of a semi-finite crack and a finite crack on two radial lines // Int. J. Eng. Sci.— 1977.— **15**, N 3.— P. 185—192.
108. *Зобнин А. И.* Расщепление в однонаправленном композите // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1977.— № 2.— С. 168—171.
109. *Kishida M., Asano M.* A study of interference of three parallel cracks // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **19**, N 3.— P. 531—538.
110. *Geçit M. R.* Interaction of four perpendicular cracks // METU J. Pure and Appl. Sci.— 1980.— **13**, N 1.— P. 1—19.
111. *Саврук М. П.* О взаимодействии произвольно ориентированных прямолинейных трещин // Прикл. механика.—1972.— **7**, № 7.— С. 121—124.
112. *Дацышин А. П., Саврук М. П.* Система произвольно ориентированных трещин в упругих телах // Прикл. математика и механика.— 1973.— **37**, № 2.— С. 326—332.
113. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Применение сингулярных интегральных уравнений для решения двумерных задач теории трещин // Физ.-хим. механика материалов.— 1976.— **12**, № 3.— С. 30—47.
114. *Panasyuk V. V., Savruk M. P., Datsyshyn A. P.* A general method of solution of two-dimensional problems in the theory of cracks // Eng. Fract. Mech.— 1977.— **9**, N 2.— P. 481—497.
115. *Günther W.* Asymptotic elastic solution for two straight cracks of arbitrary length and location // Theor. and Appl. Fract. Mech.— 1985.— **3**, N 3.— P. 247—255.
116. *Бережницкий Л. Т.* Предельные усилия для пластины с двумя равными дугообразными трещинами // Физ.-хим. механика материалов.— 1965.— **1**, N 1.— С. 99—106.
117. *Панасюк В. В., Бережницкий Л. Т.* О предельном равновесии пластины с трещинами вдоль дуг окружности // Прикл. механика.— 1965.— **1**, № 10.— С. 52—60.
118. *Панасюк В. В., Бережницький Л. Т.* До питання про поширення дугоподібних тріщин при розтягу пластин // Доп. АН УРСР.— 1966.— № 6.— С. 753—758.
119. *Tamate O.* Interaction of two parallel cracks of circular arc in an infinite plate under tension // Technol. Repts Tohoku Univ.— 1970.— **35**, N 1.— P. 93—102.
120. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Система трещин в упругой плоскости при циклической симметрии // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1976.— № 4.— С. 333—337.
121. *Tweed J., Rooke D. P.* The stress intensity factors of a star-shaped array of cracks in an infinite elastic solid // Int. J. Eng. Sci.— 1974.— **12**, N 5.— P. 423—431.
122. *Das S. C., Sneddon I. N.* The stress field near a system of four symmetrically situated line cracks of equal length // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа.— М. ; Наука, 1972.— С. 181—192.

123. *Srivastava K. N., Nath B.* Stress distribution in an infinite elastic medium containing four non-intersecting Griffith cracks // Z. angew. Math. und Mech.— 1973.— **53**, N 7.— P. 416—419.
124. *Aksogan O.* Numerical solution for a class of multi-part mixed boundary value problems // Int. J. Numer. Meth. Eng.— 1978.— **12**, N 6.— P. 1025—1030.
125. *Stallybrass M. P.* A unified approach to the solution of four crack problems in plane elastostatics // Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1971.— **70**, N 1.— P. 175—189.
126. *Саврук М. П.* Система криволинейных трещин в упругом теле при циклической симметрии // Физ.-хим. механика материалов.— 1977.— **13**, № 6.— С. 84—88.
127. *Theocaris P. S., Ioakimidis N. I.* A star-shaped array of curvilinear cracks in an infinite isotropic elastic medium // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1977.— **44**, N 4.— P. 619—624.
128. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О влиянии границ тела на развитие трещин хрупкого разрушения // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение.— 1960.— № 3.— С. 79—88.
129. *Parker A. P., Mason J. C.* Stress intensity factors for an infinite array of collinear cracks subjected to varying pressure // Proc. Inst. Civ. Eng.— 1981.— **71**, June.— P. 543—549.
130. *Koiter W. T.* An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet // Ing.-Arch.— 1959.— **28**, N 3.— P. 168—172.
131. *Tada H.* Westergaard stress functions for several periodic crack problems // Eng. Fract. Mech.— 1970.— **2**, N 2.— P. 177—180.
132. *Singh B. M., Dhaliwar R. S.* Three coplanar Griffith cracks in an infinite elastic strip // J. Elast.— 1982.— **12**, N 1.— P. 127—141.
133. *Parihar K. S.* Some triple trigonometrical series equations and their application // Proc. Roy. Soc. Edinburgh.— 1971.— **A69**, N 3.— P. 255—265.
134. *Саврук М. П.* Напряжения в пластине с бесконечным рядом параллельных трещин при симметричной нагрузке // Физ.-хим. механика материалов.— 1971.— **7**, № 6.— С. 104—106.
135. *Дацышин А. П., Саврук М. П.* Периодическая задача теории трещин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1974.— № 5.— С. 136—143.
136. *Александров В. М., Сметанин Б. И.* Равновесная трещина в слое малой толщины // Прикл. математика и механика.— 1965.— **29**, № 4.— С. 782—785.
137. *Benthem J. P., Koiter W. T.* Asymptotic approximations to crack problems // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden: Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 131—178.— (Mechanics of fracture; 1).
138. *Delameter W. R., Herrmann G., Barnett D. M.* Weakening of an elastic solid by a rectangular array of cracks // Trans. ASME J. Appl. Mech. — 1975.— **42**, N 1.— P. 74—80. (см. исправление ошибки там же.— 1977.— **44**, № 1.— P. 190).
139. *Осадчук В. А., Подстригач Я. С.* К определению напряженного состояния в замкнутой цилиндрической оболочке и бесконечной пластинке с трещинами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1973.— № 3.— С. 69—78.
140. *Lowengrub M., Srivastava K. N.* Two coplanar Griffith cracks in an infinitely long elastic strip // Int. J. Eng. Sci.— 1968.— **6**, N 8.— P. 425—434.
141. *Саврук М. П.* Напряжения в пластине с бесконечным рядом параллельных трещин при антисимметричной нагрузке // Физ.-хим. механика материалов.— 1972.— **8**, № 4.— С. 109—111.

142. *Койтер В. Т.* Бесконечный ряд параллельных трещин в неограниченной упругой пластине // Проблемы механики сплошной среды.— М. : Изд-во АН СССР, 1961.— С. 202—214.
143. *Саврук М. П.* Напряжения в пластине с бесконечным рядом внешних параллельных трещин при симметричной нагрузке // Прикл. механика.— 1975.— **11**, № 5.— С. 126—129.
144. *Саврук М. П.* Напряжения в пластине с периодической системой внешних параллельных трещин при антисимметричной нагрузке // Физ.-хим. механика материалов.— 1977.— **13**, № 1.— С. 117—119.
145. *Дацышин А. П., Саврук М. П.* Интегральные уравнения плоской задачи теории трещин // Прикл. математика и механика.— 1974.— **38**, № 4.— С. 728—737.
146. *Isida M.* Method of Laurent series expansion for internal crack problems // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 56—130.— (Mechanics of fracture; 1).
147. *Куршин Л. М., Суздальницкий И. Д.* Напряженное состояние упругой плоскости, ослабленной бесконечным рядом продольно-поперечных трещин // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1975.— № 5.— С. 179—186.
148. *Ioakimidis N. I., Theocaris P. S.* Array of periodic curvilinear cracks in an infinite isotropic medium // Acta mech.— 1977.— **28**, N 1—4.— P. 239—254.
149. *Ioakimidis N. I., Theocaris P. S.* The practical evaluation of stress intensity factors at semi-infinite crack tips // Eng. Fract. Mech.— 1980.— **13**, N 1.— P. 31—42.
150. *Watanabe K., Atsumi A.* Infinite row of parallel cracks in a strip // Int. J. Eng. Sci.— 1972.— **10**, N 2.— P. 173—184.
151. *Kant R.* The elastostatic problem of an infinite strip containing a periodic row of line cracks // Int. J. Eng. Sci.— 1982.— **20**, N 9.— P. 1057—1070.
152. *Gross D.* Spannungsintensitätsfactoren von Riβsystemen // Ing.-Arch.— 1982.— **51**, N 5.— S. 301—310.
153. *Ogen G., Schiff B.* Stress intensity factors for two-dimensional crack problems using constrained finite elements // Int. J. Fract.— 1985.— **28**, N 2.— P. 55—68.
154. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Двоякопериодическая задача теории трещин // Пробл. прочности.— 1976.— № 12.— С. 63—68.
155. *Партон В. З.* Об одной оценке взаимного упрочнения трещин при их шахматном расположении // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1965.— № 5.— С. 94—97.
156. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З.* Первая основная задача теории упругости для двоякопериодической системы разрезов // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа.— М. : Наука, 1972.— С. 251—258.
157. *Фильштинский Л. А.* Взаимодействие двоякопериодической системы прямолинейных трещин в изотропной среде // Прикл. математика и механика.— 1974.— **38**, № 5.— С. 906—914.
158. *Фильштинский Л. А.* Двоякопериодическая задача теории упругости для анизотропной среды с криволинейными разрезами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1977.— № 6.— С. 116—124.

К гл. 3

1. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.— Киев : Наук. думка, 1976.— 444 с.
2. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.— Киев : Наук. думка, 1981.— 324 с.
3. *Саврук М. П.* Напряжения около трещины в упругой полуплоскости // Физ.-хим. механика материалов.— 1975.— **11**, № 5.— С. 59—64.
4. *Храпков А. А.* Первая основная задача кусочно-однородной плоскости с разрезом, перпендикулярным прямой раздела // Прикл. математика и механика.— 1968.— **32**, № 4.— С. 647—659.
5. *Stallybrass M. P.* A crack perpendicular to an elastic half-plane // Int. J. Eng. Sci.— 1970.— **8**, N 5.— P. 351—362.
6. *Wigglesworth L. A.* Stress distribution in a notched plate // Mathematika.— 1957.— **4**, N 7.— P. 76—96.
7. *Bueckner H. F.* Some stress singularities and their computation by means of integral equations // Boundary Problems Different. Equat.— Madison: Univ. Wisconsin Press, 1960.— P. 215—230.
8. *Койтер.* Обсуждение статьи Бови «Растяжение прямоугольной пластины с симметричными трещинами на кромках» // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1965.— **32**, № 1.— С. 279—280.
9. *Sneddon I. N., Das S. C.* The stress intensity factor at the tip of an edge crack in an elastic half-plane // Int. J. Eng. Sci.— 1971.— **9**, N 1.— P. 25—36.
10. *Bowie O. L.* Solutions of plane crack problems by mapping technique // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden: Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 1—55 — (Mechanics of fracture; 1).
11. *Isida M.* Растяжение полуплоскости, содержащей набор трещин, разветвляющиеся трещины и трещины, исходящие из острых выточек // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1979.— **А45**, № 392.— С. 306—317.— Яп.
12. *Eshelby J. D.* The calculation of energy release rates // Prospects Fract. Mech.— Leyden, 1974.— P. 69—84.
13. *Freund L. B.* Stress intensity factor calculations based on a conservation integral // Int. J. Solids and Struct.— 1978.— **14**, N 3.— P. 241—250.
14. *Hartranft R. J., Sih G. C.* Alternating method applied to edge and surface crack problems // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 179—238.— (Mechanics of fracture; 1).
15. *Bueckner H. F.* Field singularities and related integral representations // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 239—314.— (Mechanics of fracture; 1).
16. *Sih G. C.* Handbook of stress-intensity factors.— Bethlehem : Lehigh University Press, 1973.— Vol. 1.— 420 p.
17. *Tada H., Paris P. C., Irwin G. R.* The stress analysis of cracks: Handbook.— Hellertown : Del Research Corp., 1973.— 385 p.
18. *Fracture* mechanics design handbook.— Redstone Arsenal, 1976.— 231 p.— (Techn. rep. / US Army missle command; N 77-5).
19. *Rooke D. P., Jones D. A.* Stress intensity factors in fretting fatigue // J. Strain Anal.— 1979.— **14**, N 1.— P. 1—6.
20. *Lachenbruch A. H.* Depth and spacing of tension cracks // J. Geophysical Research.— 1961.— **66**, N 12.— P. 4273—4291.
21. *Дацышин А. П.* О предельном равновесии полуплоскости с поверхностной трещиной // Физ.-хим. механика материалов.— 1969.— 5, № 6.— С. 746—748.

22. *Луцышин Р. М.* О расклинивании трещины в упругой полуплоскости // Мат. методы и физ.-мех. поля.— Киев, 1979.— № 10.— С. 58—62.
23. *Сметанин Б. И.* О расклинивании упругого бесконечного клина // Прикл. математика и механика.— 1969.— **33**, № 5.— С. 935—940.
24. *Галаджева М. Р., Сирунян В. Х., Сметанин Б. И.* О расклинивании упругой полуплоскости // Изв. АН АрмССР. Механика.— 1974.— **27**, № 2.— С. 38—45.
25. *Hasebe N.* Uniform tension of a semi-infinite plate with crack at an end of a stiffened edge // Ing.-Arch.— 1979.— **48**, N 2.— P. 129—141.
26. *Hasebe N.* An edge crack in a semi-infinite plate welded to a rigid stiffener // Proc. Jap. Civ. Eng.— 1981.— N 314.— P. 149—157.
27. *Nisitani H.* Interference effects among cracks or notches in two-dimensional problem // Proc. Int. Conf. Fract. Mech. and Technol. (Hong Kong, 1977).— Alphen aan den Rijn, 1977.— **2**.— P. 1127—1142.
28. *Рудь М. А., Саврук М. П., Дацишин О. П.* Періодична система крайових тріщин у півплощині // Вісник Львівського ун-ту. Сер. механ.-матем.— 1977.— № 12.— С. 82—85.
29. *Ejike U. B. C. O.* A row of external cracks in an elastic halfplane // J. Elast.— 1973.— **3**, N 4.— P. 261—269.
30. *Freese C. E.* Periodic edge cracks of unequal length in a semi-infinite tensile sheet // Int. J. Fract.— 1976.— **12**, N 1.— P. 125—134.
31. *Nisitani H.* Solutions of notch problems by body force method // Stress analysis of notch problems.— Alphen aan den Rijn: Noordhoff Intern. Publ., 1978.— P. 1.— 68.— (Mechanics of fracture; 5).
32. *Benthem J. P., Koiter W. T.* Asymptotic approximation to crack problems // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 131—178.— (Mechanics of fracture; 1).
33. *Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г.* Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле.— Киев : Наук. думка, 1983.— 288 с.
34. *Nisitani H., Oda Y.* Эффект взаимодействия между трещиной и надрезом или трещиной в полубесконечной пластине // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1980.— **A46**, № 407.— С. 745—755.— Яп.
35. *Nisitani H.* A method for calculating stress concentrations and its applications // Strength and Structure of Solid Materials.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1976.— P. 53—69.
36. *Nisitani H.* Коэффициент интенсивности напряжений в растягиваемой полубесконечной плите, имеющей наклонную или криволинейную краевую трещину // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1975.— **41**. № 344.— С. 1103—1110.— Яп.
37. *Ioakimidis N. I., Theocaris P. S.* A system of curvilinear cracks in an isotropic elastic halfplane // Int. J. Fract.— 1979.— **15**, N 4.— P. 299—309.
38. *Hasebe N., Inohara S.* Stress analysis of a semi-infinite plate with an oblique edge crack // Ing.-Arch.— 1980.— **49**, N 1.— P. 51—62.
39. *Barr D. T., Cleary M. P.* Thermoelastic fracture solutions using distributions of singular influence functions. I. Determining crack stress fields from dislocation distributions // Int. J. Solids and Struct.— 1983.— **19**, N 1.— P. 73—82.
40. *Дацышин А. П., Марченко Г. П.* Краевая криволинейная трещина в упругой полуплоскости // Физ.-хим. механика материалов.— 1985.— **21**, № 1.— С. 67—71.
41. *Храпков А. А.* Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил // Прикл, математика и механика,— 1971.— **35**, № 4.— С. 677—689.

42. *Hills D. A., Sackfield A., Uzel A.* The Green's function for a slant edge crack // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **20**, N 2.— P. 245—253.
43. *Черепанов Г. П.* Равновесие откоса с тектонической трещиной // Прикл. математика и механика.— 1976.— **40**, № 1.— С. 136—151.
44. *Черепанов Г. П., Кулиев В. Д.* Теория устойчивости скальных откосов с тектоническими трещинами // Теор. и прил. механика.— София, 1977.— **1**.— С. 610—615.
45. *Tsamasphyros G., Theocaris P. S.* Integral-equation solution for half planes bonded together or in contact and containing internal cracks or holes // Ing.- Arch.— 1983.— **53**, N 4.— P. 225—241.
46. *Nisitani H., Chen D. H., Isida M.* An approximate method for calculating K_I and K_{II} of various edge cracks emanating from the epex of an elliptic hole // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.— 1984.— **A50**, N 451.— P. 341—350.
47. *Лібацький Л. Л.* Фундаментальний розв'язок задачі про напружений стан півплощини з тріщиною // Вісник Львівського політехн. ін-ту. Математика і механіка.— 1974.— № 87.— С. 82—86.
48. *Саврук М. П., Дацышин А. П.* О взаимодействии системы трещин с границей упругого тела // Прикл. механика.— 1974.— **10**, № 7.— С. 84—92.
49. *Dhaliwal R. S., Singh A.* Vertical crack inside a semi-infinite plate // Int. J. Eng. Sci.— 1976.— **14**, N 11.— P. 1059—1069.
50. *Rooke D. P., Cartwright D. J.* The compendium of stress intensity factors.— London : Her Majesty's Stationare Office, 1976.— 330 p.
51. *Шкараев С. В.* Определение перемещений и коэффициентов интенсивности напряжений в полубесконечной пластине с трещиной // Физ.-хим. механика материалов.— 1985.— **21**, № 4.— С. 111—113.
52. *Chen Y. Z.* Solutions of multiple crack problems of elastic half-plane // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1985.— **52**, N 4.— P. 979—981.
53. *Исида.* Коэффициенты интенсивности напряжения при растяжении пластины с эксцентрично расположенной трещиной // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1966.— **33**, № 3.— С. 225—227.
54. *Atkinson C.* On the strees intensity factors associated with cracks interacting with an interface between two elastic media // Int. J. Eng. Sci.— 1975.— **13**, N 5.— P. 489—504.
55. *Atkinson C., Javaherian H.* Evaluation of stress intensity factors assotiated with bimaterial crack // J. Inst. Math. and Appl.— 1980.— **26**, N 3.— P. 235—258.
56. *Саркисян В. С., Григорян Э. Х., Шагинян С. С.* О двух смешанных задачах теории упругости для полуплоскости, ослабленной внутренним прямолинейным разрезом // Учен. зап. Ереван. ун-т. Естест. науки.— 1980.— № 2.— С. 49—58.
57. *Аветисян Е. П., Хачатрян О. Х., Шагинян С. С.* Об одной смешанной задаче теории упругости для полуплоскости с внутренним прямолинейным разрезом // Учен. Зап. Ереван. ун-т. Естеств. науки.— 1983.— № 1.— С. 28—33.
58. *Stallybrass M. P.* A semi-infinite crack perpendicular to the surface of an elastic half-plane // Int. J. Eng. Sci.— 1971.— **9**, N 1.— P. 133—150.
59. *Wilson W. K.* Stress intensity factors for deep cracks in bending and compact tension specimens // Eng. Fract. Mech.— 1970.— **2**, N 2.— P. 169—171.
60. *Nisitani H., Suematsu M., Saito K.* Растяжение полубесконечной пластины с одним рядом эллиптических отверстий (включая трещины) и бесконечной пластины с двумя рядами эллиптических отверстий // Ни-

хон кикай гаккай ромбунсю.— 1973.— **39**, № 324.— С. 2323—2330.— Яп.
61. *Бурышкин М. Л., Радиолло М. В.* Обобщенная периодическая задача теории упругости для трещиноватой полуплоскости // Прикл. математика и механика.— 1985.— **49**, № 2.— С. 265—274.
62. *Isida M.* On the determination of stress intencity factors for some common structural problems // Eng. Fract. Mech.— 1970.— **2**, N 1.— P. 61—79.
63. *Саркисян В. С., Григорян Э. Х., Шагинян С. С.* К периодической задаче о подкреплении пластинок с разрезами // Учен. зап. Ереван. ун-т. Естеств. науки.— 1980.— № 3.— С. 33—45.
64. *Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S.* The numerical solutions of singular integral equations // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 368—425.— (Mechanics of fracture; 1).
65. *Мартынюк П. А., Поляк Э. Б.* О равновесии изолированной трещины в упругой полосе // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1978.— № 4.— С. 175—183.
66. *Higashida Y., Kamada K.* Stress fields around a crack lying parallel to a free surface // Int. J. Fract.— 1982.— **19**, N 1.— P. 39—52.
67. *Ashbauch N.* Stress solution for a crack at an arbitrary angle to an interface // Int. J. Fract.— 1975.— **11**, N 2.— P. 205—219.
68. *Erdogan F., Arin K.* A half plane and a strip with an arbitrarily located crack // Int. J. Fract.— 1975.— **11**, N 2.— P. 191—204.
69. *Longmuir G. J., Tweed J.* The elastic problem for a half plane with a line crack in its interior // Lett. Appl. and Eng. Sci.— 1976.— **4**, N 5.— P. 333—342.
70. *Марченко Г. П., Дацышин А. П.* Предельное равновесие полуплоскости с криволинейной трещиной / Ред. журн. «Физ.-хим. механика материалов».— Львов, 1987.— 82 с.— Деп. в ВИНИТИ 11.12.87, № 8663.— В 87.
71. *Дацышин А. П., Саврук М. П.* Предельное равновесие полуплоскости с произвольно ориентированной трещиной // Термомеханические методы разрушения горных пород.— Киев : Наук. думка, 1972.— **2**.— С. 93—97.
72. *Srivastava K. N., Kumar M.* Axisymmetric problems in the theory of elasticity for a semi-infinite two-dimensional medium containing a Griffith crack // Proc. Nat. Inst. Sci. India.— 1969.— **A35**, N 3.— P. 471—484.
73. *Кипнис Л. А.* Равновесие полупространства с несимметричной трещиной // Прикл. механика.— 1980.— **16**, № 8.— С. 113—116.
74. *Дацышин А. П., Марченко Г. П.* Взаимодействие криволинейных трещин с границей упругой полуплоскости // Физ.-хим. механика материалов.— 1984.— **20**, № 5.— С. 64—71.
75. *Фильштинский Л. А.* Краевые задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости, ослабленной отверстием или разрезом // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1980.— № 6.— С. 72—79.
76. *Переславцев Е. Г.* Расчет коэффициентов интенсивности напряжений для прямолинейных трещин, расположенных вблизи края подкрепленной панели / Моск. ин-т инженеров гражд. авиации.— М., 1983.— 46 с.— Деп. в ЦНТИГА 14.09.83, № 181.
77. *Erdogan F.* Bonded dissimilar materials containing cracks parallel to the interface // Eng. Fract. Mech.— 1971.— **3**, N 3.— P. 231—240.
78. *Nisitani H., Saito K., Hara N.* Концентрация напряжений в зоне эллиптических отверстий и трещин (растяжение и продольный сдвиг) // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1973,— **39**, № 324.— С. 2312—2322,— Яп.

79. *Bowie O. L., Freese C. E.* Analysis of notches using conformal mapping // Stress analysis of notch problems.— Alphen aan den Rijn : Noordhoff Intern. Publ., 1978.— P. 69—134.— (Mechanics of fracture; 5).
80. *Bandyopadhyay S. N., Deysarker H. K.* Stress intensity factor for a crack emanating from the root of a semi-circular edge notch in a tension plate // Eng. Fract. Mech.— 1981.— **14,** N 2.— P. 373—384.
81. *Neuber H.* Die halbelliptische Kerbe mit Riβ als Beispiel zur Korrelation von Mikro- und Makrospannungskonzentrationen // Ing.-Arch.— 1977.— **46,** N 6.— S. 389—399.
82. *Jergeus H. A.* A simple formula for the stress intensity factors of cracks in side notches // Int. J. Fract.— 1978.— **14,** N 3.— P. R113—R116.
83. *Schijve J.* The stress intensity factor of small cracks at notches // Fatigue Eng. Mater. and Struct.— 1982.— **5,** N 1.— P. 77—90.
84. *Hasebe N., Iida J.* A crack originating from a triangular notch on a rim of a semi-infinite plate // Eng. Fract. Mech.— 1978.— **10,** N 4.— P. 773—782.
85. *Keer L. M., Mendelsohn D. A., Achenbach J. D.* Crack at the apex of a loaded notch // Int. J. Solids and Struct.— 1977.— **13,** N 7.— P. 615—623.
86. *Повстенко Ю. З.* Точное решение задачи о растяжении полуплоскости с трещиной, выходящей на границу // Прикл. механика.— 1975.— **11,** № 2.— С. 133—135.
87. *Яськевич Т. Р.* Предельное равновесие полуплоскости с боковым надрезом // Физ.-хим. механика материалов.— 1975.— **11,** № 3.— С. 112—114.
88. *Warren W. E., Mitchell T. P.* Singular loadings in a notched half-plane // Developments in Theoretical and Applied Mechanics.— Oxford, 1965.— **2.**— P. 131—145.
89. *Панасюк И. В.* Напряжения в полуплоскости с разрезами и отверстиями // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1985.— № 9.— С. 34—39.
90. *Саврук М. П., Панасюк И. В.* Растяжение полуплоскости, ослабленной отверстиями и трещинами // Прикл. механика.—1986.— **22,** № 1.— С. 73—81.
91. *Саврук М. П., Тимошук Н. В.* Плоская задача теории упругости для кусочно-однородной полубесконечной пластины с упругими включениями и трещинами // Физ.-хим. механика материалов.— 1987.— **23,** № 2.— С. 71—78.
92. *Саврук М. П., Панасюк И. В.* Периодическая система отверстий и трещин в упругой полуплоскости // Пробл. прочности.— 1987.— № 1.— С. 3—7.
93. *Hasebe N., Ueda M.* A crack originating from an angular corner of a semi-infinite plate with a step // Bull. JSME.— 1981.— **24,** N 189.— P. 483—488.
94. *Chantaramungkorn K., Keer L. M.* Stress analysis for a layer of finite length bonded to a half-space of identical material // Int. J. Solids and Struct.— 1975.— **11,** N 10.— P. 1079—1096.
95. *Hasebe N., Takemura M.* Cracks at joint of strip and semi-infinite plate // Eng. Fract. Mech.— 1981.— **15,** N 1—2.— P. 45—53.
96. *Cardew G. E., Howard I. C.* An edge-crack in an elastic strip and related problems in fracture mechanics and viscous flow // Int. J. Eng. Sci.— 1976.— **14,** N 4.— P. 403—414.
97. *Gross B., Srawley J. E., Brown W. F.* Stress intensity factors for a single edge notch tensile specimen by boundary collocation of a stress-function.— NASA TN D-2398, 1964.— 11 p.
98. *Bueckner H. F.* Weight functions for the notched bar // Z. angew. Math. und Mech.— 1971.— **51,** N 2.— P. 97—109.

99. *Пащенко В. И., Трапезников Л. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в прямоугольных пластинах и балках с одиночными краевыми надрезами // Изв. ВНИИ гидротехники.— 1973.— **101**.— С. 17—27.
100. *Ejike U. B. C. O.* Edge crack in a strip of an elastic solid // Int. J. Eng. Sci.— 1973.— **11**, N 1.— P. 109—121.
101. *Chatterjee S. N., Prasad S. N.* On Papkovich — Fadle solutions of crack problems relating to an elastic strip // Int. J. Eng. Sci.— 1973.— **11**, N 10.— P. 1079—1101.
102. *Keer L. M., Freedman J. M.* Tensile strip with edge cracks // Int. J. Eng. Sci.— 1973.— **11**, N 12.— P. 1265—1275.
103. *Зейлигер В. А., Трапезников Л. П.* Функция Грина для коэффициентов интенсивности напряжений в полосе с поперечной трещиной // Прикл. механика.— 1976.— **12**, № 11.— С. 74—84.
104. *Kaya A. C., Erdogan F.* Stress intensity factors and COD in an orthotropic strip // Int. J. Fract.— 1980.— **16**, N 2.— P. 171—190.
105. *Браун У., Сроули Дж.* Испытания высокопрочных металлических материалов на вязкость разрушения при плоской деформации.— М. : Мир, 1972.— 246 с.
106. *Gerberich W. W., Katz Y.* On a trigonometric expression for the single-edge-notch specimen // Eng. Fract. Mech.— 1969.— **1**, N 3.— P. 569—570.
107. *Gray T. G. F.* Convenient closed form stress intensity factors for common crack configurations // Int. J. Fract.— 1977.— **13**, N 1.— P. 65—75.
108. *Richard H. A.* Interpolationsformel für Spannungsintensitätsfactoren // VDI-Zeitschrift.— 1979.— **121**, N 22.— S. 1138—1143.
109. *Walsh P. F.* Linear fracture mechanics in orthotropic materials // Eng. Fract. Mech.— 1972.— **4**, N 3.— P. 533—541.
110. *Delale F., Bakirtas I., Erdogan F.* The problem of an inclined crack in an orthotropic strip // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1979.— **46**, N 1.— P. 90—96.
111. *Gross B., Srawley J. E.* Stress intensity factors for single edge notch specimens in bending or combined bending and tension.— NASA TN D-2603, 1965.
112. *Srawley J. E., Gross B.* Stress intensity factors for bent and compact specimens // Eng. Fract. Mech.— 1972.— **4**, N 3.— P. 587—589.
113. *Parmerter R. R., Mukherji B.* Stress intensity factors for an edge-cracked strip in bending // Int. J. Fract.— 1974.— **10**, N 3.— P. 441—444.
114. *Ejike U. B. C. O.* Single-edge cracked strip under three-point load // Int. J. Eng. Sci.— 1977.— **15**, N 7.— P. 413—420.
115. *Nied H. F., Erdogan F.* A cracked beam or plate transversely loaded by a stamp // Int. J. Solids and Struct.— 1979.— **15**, N 12.— P. 951—965.
116. *Chell G.* The stress intensity factors for centre and edge cracked sheets subject to an arbitrary loading // Eng. Fract. Mech.— 1975.— **7**, N 1.— P. 137—152.
117. *Chell G. C.* The stress intensity factors and crack profiles for centre and edge cracks in plates subject to aritrary stresses // Int. J. Fract.— 1976.— **12**, N 1.— P. 33—46.
118. *Коэффициенты* интенсивности напряжений для полосы с одиночной трещиной / В. Г. Орехов, М. Л. Каган, К. Н. Беличенко, Н. А. Анискин / Моск. инж.-строит. ин-т.—М., 1982.— 9 с.— Деп. во ВНИИИС Госстроя, № 3845.
119. *Cartwright D. J., Rooke D. P.* An efficient boundary element method for calculating Green's functions in fracture mechanics / Int. J. Fract.— 1985.— **27**, N 2.— P. R43—R50.

120. *Geçit M. R.* A cracked elastic strip bonded to a rigid support // Int. J. Fract.— 1978.— **14**, N 6.— P. 575—584.
121. *Hasebe N., Matsuura S., Kondo N.* Stress analysis of a strip with a step and a crack // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **20**, N 3.— P. 447—462.
122. *Erdogan F., Terada H.* Wedge loading of a semi-infinite strip with an edge crack // Int. J. Fract.— 1978.— **14**, N 4.— P. 399—415.
123. *Ejike U. B. C. O.* Symmetrically notched elastic bar // Int. J. Eng. Sci.— 1973.— **11**, N 11.— P. 1175—1183.
124. *Gupta G. D., Erdogan F.* The problem of edge cracks in an infinite strip // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1974.— **41**, N 4.— P. 1001—1006.
125. *Delale F., Erdogan F.* The problem of internal and edge cracks in an orthotropic strip // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1977.— **44**, N 2.— P. 237—242.
126. *Hasebe N., Horiuchi Y.* Stress analysis for a strip with semielliptical notches or cracks on both sides by means of rational mapping function // Ing.-Arch.— 1978.— **47**, N 3.— P. 169—179.
127. *Geçit M. R.* Two collinear cracks in a tensile strip // METU J. Pure and Appl. Sci.— 1979.— **12**, N 3.— P. 305—318.
128. *Ranganathan N.* A note on the finite width correction for a double edge-cracked plate in tension // Eng. Fract. Mech.— 1974.— **6**, N 3.— P. 619—620.
129. *Пащенко В. И., Трапезников Л. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в прямоугольных пластинах с двусторонними краевыми надрезами // Изв. ВНИИ гидротехники.— 1975.— **107**.— С. 3—9.
130. *Civelek M. B., Erdogan F.* Crack problems for a rectangular plate and an infinite strip // Int. J. Fract.— 1982.— **19**, N 2.— P. 139—159.
131. *Liu X. H., Erdogan F.* An elastic strip with multiple cracks and applications to tapered specimens // Int. J. Fract.—1985.—**29**, N 2.— P. 59—72.
132. *Isida M., Tsuru H.* Plane problems of finite regions containing multiple cracks // Technol. Repts Kyushu Univ.— 1982.— **55**, N 6.— P. 649—656.
133. *Isida M., Tsuru H.* Tension of finite plates containing multiple and periodic cracks // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.— 1983.— **A49**, N 441.— P. 641—645.
134. *Пащенко В. И., Трапезников Л. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в стеновых элементах и балках, ослабленных системой краевых трещин // Изв. ВНИИ гидротехники.— 1973.— **103**.— С. 145—151.
135. *Гольдштейн Р. В., Рысков И. Н., Салганик Р. Л.* Центральная поперечная трещина в упругой полосе // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1969.— № 4.— С. 97—104.
136. *Isida M.* Analysis of stress intensity factors for the tension of a centrally cracked strip with stiffened edges // Eng. Fract. Mech.— 1973.— 5, N 3.— P. 647—665.
137. *Tada H.* A note on the finite width corrections to the stress intensity factor // Eng. Fract. Mech.— 1971.— 3, N 3.— P. 345—347.
138. *Koiter W. T.* Note on the stress intensity factors for sheet strips with cracks under tensile loads.— Delft Techn. Univ., Dept. of Mech. Eng., 1965.— Rep. N 314.
139. *Krenk S.* On the elastic strip with an internal crack // Int. J. Solids and Struct.— 1975.— **11**, N 6.— P. 693—708.
140. *Rooke D. P.* Width correction in fracture mechanics // Eng. Fract. Mech.— 1970.— **1**, N 4.— P. 727—728.
141. *Sneddon I. N., Srivastav R. P.* The stress field in the vicinity of a Griffith crack in a strip of finite width // Int. J. Eng. Sci.— 1971.— **9**, N 5.— P. 479—488.

142. *Tada H.* A note on a central crack in a strip under uniaxial tension // Eng. Fract. Mech.— 1972.— **4**, N 3.— P. 585.
143. *Srivastav R. P., Khetan R. P.* A procedure for elastic analysis of cracked plates // SIAM J. Appl. Math.— 1974.— **26**, N 3.— P. 679—685.
144. *Зобнин А. И., Ломакин Е. В.* Центральная поперечная трещина в ортотропной упругой полосе // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1974.— № 1.— С. 44—52.
145. *Sih G. C., Chen E. P.* Cracks in composite materials: A compilation of stress solutions for composite systems with cracks.— London etc.: Martinus Nijhoff publishers, 1981.— 538 p.— (Mechanics of fracture; 6).
146. *Саврук М. П., Осив П. Н.* Сингулярные интегральные уравнения плоских задач теории упругости для произвольной многосвязной области с прямолинейным разрезом // Физ.-хим. механика материалов.— 1986.— **22**, № 2.— С. 20—27.
147. *Маркузон И. А.* Равновесные трещины в полосе конечной ширины // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1963.— № 5.— С. 69—76.
148. *Сметанин Б. И.* Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое // Инж. журн. Механика твердого тела.— 1968.— № 2.— С. 115—122.
149. *Calhoun R., Lowengrub M.* A two dimensional asymmetrical crack problem // J. Elast.— 1974.— **4**, N 1.— P. 37—50.
150. *Александров В. М., Сметанин Б. И.* О равновесных продольных трещинах в пластинах // Теория пластин и оболочек.— М. : Наука, 1966.— С. 21—25.
151. *Cinar A., Erdogan F.* The crack and welding problem for an orthotropic strip // Int. J. Fract.— 1983.— **23**, N 2.— P. 83—102.
152. *Fichter W. B.* Stresses at the tip of a longitudinal crack in a plate strip.— NASA TR R-265, 1967.— 55 p.
153. *Wu Ting-Shu, Pao Y. C., Chiu Y. P.* Analysis of a finite elastic layer containing a Griffith crack // Int. J. Eng. Sci.— 1970.— **8**, N 7.— P. 575—582.
154. *Isida M.* Effect of width and length on stress intensity factors of internally cracked plates under various boundary conditions // Int. J. Fract. Mech.— 1971.— **7**, N 3.— P. 301—316.
155. *Туебаев М. К., Отарбаев Ж. О.* Упругое равновесие полосы с продольной щелью под действием произвольных усилий // Механика тектонич. процессов.— Алма-Ата, 1983.— С. 176—185.
156. *Konishi Y., Atsumi A.* Crack problem of transversely isotropic strip // Int. J. Eng. Sci.— 1973.— **11**, N 1.— P. 9—20.
157. *Роговский Б.* Задача о трещине в ортотропной полосе // Прикл. механика.— 1982.— **18**, № 12.— С. 64—71.
158. *Райс.* Обсуждение статьи Кнауссa «Напряжения в бесконечной полосе, содержащей полубесконечную трещину» // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1967.— **34**, № 1.— С. 138—139.
159. *Сметанин Б. И.* Две щели в полосе конечной толщины // Прикл. математика и механика.— 1970.— **34**, № 2.— С. 366—369.
160. *Сметанин Б. И.* Задачи о расклинивании упругих тел // Статические и динамические смешанные задачи теории упругости.— Ростов-на-Дону : Изд-во Ростов. ун-та, 1983.— С. 54—66.
161. *Fichter W. B.* The shear-stress intensity factor for a centrally cracked stiff-flanger shear web // Int. J. Fract.— 1976.— **12**, N 2.— P. 265—271.
162. *Fichter W. B.* The stress intensity factor for the double cantilever beam // Int. J. Fract.— 1983.— **22**, N 2.— P. 133—143.
163. *Gross B., Srawley J. E.* Stress intensity factors by boundary collocation for single-edge-notch specimens subjected to splitting forces.— NASA TN D-3295, 1966.

164. *Kanninen M. F.* An augmented double cantilever beam model for studing crack propagation and arrest // Int. J. Fract.— 1973.— **9**, N 1. — P. 83—92.
165. *Kanninen M. F.* A dynamic analysis of unstable crack propagation and arrest in the DCB test specimen // Int. J. Fract.— 1974.— **10**, N 3.— P. 415—430.
166. *Srawley J. E., Gross B.* Stress intensity factors for crackline-loaded edge-crack specimens // Mater. Res. and Stand.— 1967.— **7**, N 4.— P. 155—162.
167. *Foote R. M. L., Buchwald V. T.* An exact solution for the stress intensity factor for a double cantilever beam // Int. J. Fract.— 1985.— **29**, N 3.— P. 125—134.
168. *Садыхов А. Э.* Клин с трещиной / Азерб. гос. пед. ин-т — Баку, 1979.— 32 с.— Деп. в ВИНИТИ 28.03.79, № 1091.
169. *Ouchterlony F.* Symmetric cracking of a wedge by transverse displacements // J. Elast.— 1980.— **10**, N 2.— P. 215—223.
170. *Sneddon I. N.* Integral transform methods // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ.— P. 315—367.— (Mechanics of fracture; 1).
171. *Kumar M.* Study on two coplanar Griffith cracks in an infinite elastic strip // Indian J. Technol.— 1975.— **13**, N 11.— P. 488—491.
172. *Lowengrub M., Srivastava K. N.* Two coplanar Griffith cracks in an infinitely long elastic strip // Int. J. Eng. Sci.— 1968.— **6**, N 8.— P. 425—434.
173. *Adams G. G.* Crack interaction in an infinite elastic strip // Int. J. Eng. Sci.— 1980.— **18**, N 3.— P. 455—462.
174. *Isida M.* Effects of specimen geometry and loading conditions on the crack tip plastic zone // Mech. Behav. Mater.: Proc. Int. Conf. Mech. Behav. Mater. (Kyoto, 1971).— Kyoto, 1972.— **1**,— P. 394—407.
175. *Isida M., Terada H.* Исследование коэффициентов интенсивности напряжений в пластинках, содержащих внутренние трещины // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1977.— **43**, № 374.— С. 3636—3641.— Яп.
176. *Isida M.* Method of Laurent series expansion for internal crack problems // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 56—130.— (Mechanics of fracture; 1).
177. *Саврук М. П.* Система произвольно ориентированных трещин в упругой полосе // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1978.— № 1.— С. 91—96.
178. *Krenk S.* The problem of an inclined crack in an elastic strip.— Rapp. Afd. baerende konstr. Danm. Tekn. højsk., 1974.— N 50.— 42 p.
179. *Уилсон.* Численный метод определения коэффициентов интенсивности напряжений для внутренней трещины в пластине конечных размеров // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теор. основы инж. расчетов.— 1971.— **93**, № 4.— С. 217—222.
180. *Tamate O., Iwasaka N.* An arbitrarily oriented crack in a long strip under tension // Technol. Repts Tohoku Univ.— 1975.— **40**, N 2.— P. 285—297.
181. *Krenk S., Bakioglu M.* Transverse cracks in a strip with reinforced surfaces // Int. J. Fract.— 1975.— **11**, N 3.— P. 441—447.
182. *Chatterjee S. N., Prasad S. N.* On the problem of two non-coplanar parallel cracks in a strip // Int. J. Eng. Sci.— 1973.— **11**, N 3.— P. 353—368.
183. *Watanabe K., Atsumi A.* Infinite row of parallel cracks in a strip // Int. J. Eng. Sci.— 1972.— **10**, N 2.— P. 173—184.
184. *Mishra M., Misra J. C.* An anisotropic strip weakened by an array of cracks // Int. J. Eng. Sci.— 1983.— **21**, N 3.— P. 187—198.

185. *Isida M., Ushijima N., Kishine N.* Прямоугольные пластины, полосы и широкие пластины, содержащие внутренние трещины при различных граничных условиях // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1981.— **A47**, № 413.— С. 27—35.— Яп.
186. *Behera B., Das A. K.* Infinite row of parallel cracks in an orthotropic strip // J. Math. and Phys. Sci.— 1983.— **17**, N 1.— P. 51—62.
187. *Петерсон, Прасад, Чаттерджи.* Решение задачи о периодических трещинах в упругой полосе через комплексные собственные функции // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1973.— **40**, № 4.— С. 303—305.
188. *Das S. C., Poddar S. N.* Stress-intensity factors for a cruciform crack with equal arms in an infinite elastic strip of finite thickness // Int. J. Eng. Sci.— 1976.— **14**, N 8.— P. 755—768.
189. *Behera B., Das A. K.* The distribution of stresses in an infinite orthotropic strip containing a cruciform crack with equal arms // Util. Math.— 1982.— **22**, Nov.— P. 185—202.
190. *Führing H.* Approximation functions for K-factors of cracks in notches // Int. J. Fract.— 1973.— **9**, N 3.— P. 328—331.
191. *Murakami Y.* A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method // Eng. Fract. Mech.— 1976.— **8**, N 4.— P. 643—655.
192. *Rooke D. P.* Stress intensity factors for cracked holes in the presence of other boundaries // Fract. Mech. Eng. Pract.: Pap. Ann. Conf. Stress Anal. Group. Inst. Phys. (Sheffield, 1976).— London, 1977.— P. 149—163.
193. *Karlsson A., Bäcklund J.* Summary of SIF design graphs for cracks emanating from circular holes // Int. J. Fract.— 1978.— **14**, N 6.— P. 585—596.
194. *Сметанин Б. И.* Об одной смешанной задаче теории упругости для клина // Прикл. математика и механика.— 1968.— **32**, № 4.— С. 708—714.
195. *Doran H. E.* The wedge with a symmetric crack at the vertex in plane elastostatics // J. Inst. Math. and Appl.— 1969.— **5**, N 4.— P. 363—372.
196. *Храпков А. А.* Бесконечный треугольный клин с надрезом на биссектрисе под действием сосредоточенных сил, приложенных к берегам надреза // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1972.— № 5.— С. 88—97.
197. *Ouchterlony F.* Some stress intensity factors for self-similar cracks, derived from path-independent integrals // J. Elast.— 1978.— **8**, N 3.— P. 259—271.
198. *Gregory R. D.* The edge-cracked circular disc under symmetric pin-loading // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1979.— **85**, N 3.— P. 523—538.
199. *Stone S. F., Westmann R. A.* Stress intensity factors for cracked wedges // Int. J. Solids and Struct.— 1981.— **17**, N 3.— P. 345—358.
200. *Ouchterlony F.* Symmetric cracking of a wedge by concentrated loads// Int. J. Eng. Sci.— 1977.— **15**, N 2.— P. 109—116.
201. *Кипнис Л. А.* Однородная задача для клина с симметричной трещиной в вершине // Прикл. математика и механика.— 1981.— **45**, № 2.— С. 396—400.
202. *Ведерников Ю. А., Суздальницкий И. Д.* Трещиностойкость звездообразного контура // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1984.— № 3.— С. 160—164.
203. *Erdogan F., Civelek M. B.* Stress intensity factors in a cracked infinite elastic wedge loaded by a rigid punch // Int. J. Eng. Sci.— 1979.— **17**, N 8.— P. 973—989.

204. *Muki R., Westmann R. A.* Crack emanating from an open notch // J. Elast.— 1974.— **4**, N 3.— P. 173—186.
205. *Tamate O., Kondo T.* Stress singularities around a crack in an elastic wedge / Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.— 1978.— **44**, N 379.— P. 756—761.
206. *Кипнис Л. А.* Упругое равновесие клина с трещиной // Прикл. математика и механика.— 1979.— **43**, № 1.— С. 153—159.
207. *Садыхов А. Э.* Об одной задаче теории упругости для клина с полубесконечной трещиной под действием сосредоточенного момента // Прикл. механика.— 1980.— **16**, № 5.— С. 91—96.
208. *Кипнис Л. А.* Трещина на продолжении грани объемлющего полупространство клина // Прикл. математика и механика.— 1979.— **43**, № 5.— С. 911—915.
209. *Erdogan F., Gupta G. D.* Contact and crack problems for an elastic wedge // Int. J. Eng. Sci.— 1976.— **14**, N 2.— P. 155—164.
210. *Keer L. M., Lee J. C.., Mura T.* Stress distributions for a quarter plane containing an arbitrarily oriented crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1983.— **50**, N 1.— P. 43—49.
211. *Каминский А. А.* Хрупкое разрушение вблизи отверстий.— Киев : Наук. думка, 1982.— 158 с.
212. *Панасюк В. В., Буйна Е. В.* Определение величин предельных усилий для пластин с острым концентратором напряжений // Физ.-хим. механика материалов.— 1966.— **2**, № 4.— С. 394—401.
213. *Панасюк В. В., Буйна Е. В.* К вопросу о предельном равновесии пластин с острыми концентраторами напряжений // Концентрация напряжений.— Киев : Наук. думка, 1968.— **2**.— С. 115—125.
214. *Wu C. H.* Unconventional internal cracks. Part 1. Symmetric variations of a straight crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1982.— **49**, N 1.— P. 62—68.
215. *Clements D. L.* On some two-dimensional crack in linear isotropic elasticity // J. Austral. Math. Soc.— 1975.— **19**, N 1.— P. 21—34.
216. *Chen Yi-zhou.* Elastic analysis of an infinite plate containing hole with cusps and applied by concentrated forces // Eng. Fract. Mech.—1984.— **20**, N 4.— P. 573—582.
217. *Kuang Zhen-bang.* Discussion on the papers: «Unconventional internal cracks. Part 1. Symmetric variations of a straight crack. Part 2. Methods of generating simple cracks» by C. H. Wu // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1983.— **50**, N 1.— P. 233—234.
218. *Theocaris P. S., Ioakimidis N. I.* A generalized crack problem in plane elasticity // Int. J. Eng. Sci.— 1980.— **18**, N 3.— P. 491—499.
219. *Панасюк В. В., Буйна Е. В.* Предельное равновесие пластины, ослабленной n-угольным отверстием // Физ.-хим. механика материалов.— 1966.— **2**, № 1.— С. 15—20.
220. *Савин Г. Н., Панасюк В. В.* Развитие исследований по теории предельного равновесия хрупких тел с трещинами (обзор) // Прикл. механика.— 1968.— **4**, № 1.— С. 3—24.
221. *Гресько А. П.* О предельном равновесии пластины, ослабленной внутренними остроконечными вырезами // Концентрация напряжений.— Киев : Наук. думка, 1965.— **1**.— С. 104—110.
222. *Панасюк В. В.* О разрушении хрупких тел при плоском напряженном состоянии // Прикл. механика.— 1965.— **1**, № 9.— С. 26—34.
223. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами.— Киев : Наук. думка, 1968.— 246 с.
224. *Ouchterlony F.* Stress intensity factors for the expansion loaded star crack // Eng. Fract. Mech.— 1976.— **8**, N 2.— P. 447—448.
225. *Wu C. H.* Unconventional internal cracks. Part 2. Method of generating simple cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1982.— **49**, N 2.— P. 383—388.

226. *Панасюк В. В., Буйна Е. В.* О диаграммах предельных напряжений для хрупких тел с дефектами типа остроконечных полостей-трещин // Физ.-хим. механика материалов.— 1967.— **3**, № 5.— С. 584—591.
227. *Бережницкий Л. Т., Садивский В. М.* К теории остроконечных концентраторов напряжений в анизотропных пластинах // Физ.-хим. механика материалов.— 1977.— **13**, № 3.— С. 82—90.
228. *Tweed J., Rooke D. P.* The elastic problem for an infinite solid containing a circular hole with a pair of radial edge cracks of different lengths // Int. J. Eng. Sci.— 1976.— **14**, N 10.— P. 925—933.
229. *Rooke D. P., Hutchins S. M.* Stress intensity factors for crack at loaded holes-effect of load distribution // J. Strain Anal. Eng. Des.— 1984.— **19**, N 2.— P. 81—96.
230. *Shivakumar V., Hsu Y. C.* Stress-intensity factors for cracks emanating from the loaded fastener hole // Proc. Int. Conf. Fract. Mech. and Technol. (Hong Kong, 1977).— Alphen aan den Rijn, 1977.— **2**.— P. 1187—1200.
231. *Rooke D. P., Tweed J.* Stress intensity factors for a crack at the edge of a pressurized hole // Int. J. Eng. Sci.— 1980.— **18**, N 1.— P. 109—121.
232. *Tweed J., Rooke D. P.* The stress intensity factor for a crack at the edge of a loaded hole // Int. J. Solids and Struct.— 1979.— **15**, N 11.— P. 899—906.
233. *Brussat T. R.* Mode I stress intensity for a radial crack at a hole with arbitrary pressure distribution // Eng. Fract. Mech.— 1980.— **14**, N 1.— P. 233—235.
234. *Shivakumar V., Forman R. G.* Green's function for a crack emanating from a circular hole in an infinite sheet // Int. J. Fract.— 1980.— **16**, N 4.— P. 305—316.
235. *Rooke D. P.* Stress intensity factors for cracks at holes in arbitrary stress fields // Int. J. Fract.— 1985.— **27**, N 2.— P. R61—R65.
236. *Grandt A. F.* Stress intensity factors for cracked holes and rings loaded with polynomial crack face pressure distributions // Int. J. Fract.— 1978.— **14**, N 4.— P. R221—R229.
237. *Hsu Y. C.* The infinite sheet with cracked cylindrical hole under inclined tension or in-plane shear // Int. J. Fract.— 1975.— **11**, N 4.— P. 571—581.
238. *Hsu Y. C., Forman R. G.* Fracture angle and strain-energy-density-factor of a crack at hole at an arbitrary angle // Eng. Fract. Mech.— 1975.— **7**, N 4.— P. 743—750.
239. *Саврук М. П.* Сингулярные интегральные уравнения двумерных задач теории упругости для тел с краевыми разрезами // Физ.-хим. механика материалов.— 1987.— **23**, № 1.— С. 61—67.
240. *Tweed J., Rooke D. P.* The distribution of stress near the tip of a radial crack at the edge of a circular hole // Int. J. Eng. Sci.— 1973.— **11**, N 11.— P. 1185—1195.
241. *Petroski H. J., Achenbach J. D.* Computation of the weight function from a stress intensity factor // Eng. Fract. Mech.— 1978.— **10**, N 2.— P. 257—266.
242. *Bowie O. L.* Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an internal circular hole // J. Math. and Phys.— 1956.— **35**, N 1.— P. 60—71.
243. *Бережницкий Л. Т.* О распространении трещин, выходящих на контур криволинейного отверстия в пластине // Физ.-хим. механика материалов.— 1966.— **2**, № 1.— С. 21—31.
244. *Grandt A. F.* Stress intensity factors for some through-cracked fastener holes // Int. J. Fract.— 1975.— **11**, N 2.— P. 283—294.

245. *Isida M., Chen D. H., Nisitani H.* Plane problems of an arbitrary array of cracks emanating from the edge of an elliptical hole // Eng. Fract. Mech.— 1985.— **21**, N 5.— P. 983—995.
246. *Либацкий Л. Л., Бида М. И.* О предельном равновесии пластинки, ослабленной круговым отверстием и трещинами // Динамика и прочность машин.— Харьков, 1968.— № 8.— С. 24—29.
247. *Hsu Y. C.* The infinite sheet with two radial cracks from cylindrical hole under inclined tension or in-plane shear // Int. J. Fract.— 1977.— **13**, N 6.— P. 839—845.
248. *Панасюк В. В.* О разрушающих нагрузках для пластины, ослабленной круговым отверстием и радиальными трещинами // Докл. АН УССР.— 1965.— № 7.— С. 868—871.
249. *Либацкий Л. Л., Баранович С. Т.* О разрыве перемещений вдоль прямолинейных отрезков в пластинке с круговым отверстием // Прикл. механика.— 1970.— **6**, № 3.— С. 80—86.
250. *Каминский А. А., Саилов Н. С.* О разрушении хрупкого тела вблизи отверстия вследствие развития системы поверхностных трещин // Пробл. прочности.— 1973.— № 10.— С. 71—76.
251. *Kutter H. K.* Stress analysis of a pressurized circular hole with radial cracks in an infinite elastic plate // Int. J. Fract. Mech.— 1970.— **6**, N 3.— P. 233—247.
252. *Tweed J., Rooke D. P.* The stress intensity factor for a crack in a symmetric array originating at a circular hole in an infinite elastic solid // Int. J. Eng. Sci.— 1975.— **13**, N 7/8.— P. 653—661.
253. *Шер Е. Н.* Об одном случае равновесия системы радиальных трещин // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1974.— № 5.— С. 156—159.
254. *Саврук М. П., Рудь Н. А., Дацышин А. П.* Система криволинейных трещин при циклической симметрии в пластине с круговой границей // Прикл. механика.— 1978.— **14**, № 4.— С. 125—128.
255. *Hellan K.* An asymptotic study of slow radial cracking // Int. J. Fract.— 1984.— **26**, N 1.— P. 17—30.
256. *Каминский А. А., Саилов Н. С.* О распространении трещин, выходящих на контур эллиптического отверстия при двухосном растяжении хрупкой пластины // Прикл. механика.— 1975.— **11**, № 2.— С. 68—76.
257. *Осив П. Н.* Определение напряжений около трещин в двумерных телах сложной конфигурации методом сингулярных интегральных уравнений / Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1985.— 18 с.
258. *Newman J. C.* An improved method of collocation for the stress analysis of cracked plate with various shaped boundaries.— NASA TN D-6376, 1971.— 45 p.
259. *Каминский А. А.* О критических нагрузках для областей, ослабленных отверстиями с трещинами // Концентрация напряжений.— Киев : Наук. думка, 1965.— **1**.— С. 130—136.
260. *Xiao S. T., Brown M. W., Miller K. J.* Stress intensity factors for cracks in notched finite plates subjected to biaxial loading // Fatigue and Fracture of Eng. Mater. and Struct.— 1985.— **8**, N 4.— P. 349—372.
261. *Neal D. M.* Stress intensity factors for cracks emanating from rectangular cutouts // Int. J. Fract. Mech.— 1970.— **6**, N 4.— P. 393—400.
262. *Hasebe N., Ueda M.* Crack originating from a corner of a square hole // Eng. Fract. Mech.— 1980.— **13**, N 4.— P. 913—923.
263. *Murakami Y.* Метод расчета коэффициентов интенсивности напряжений для трещины, исходящей из отверстия произвольного очертания, или для трещины в окрестности отверстия произвольного очертания // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1978.— **44**, № 378.— С. 423—432.— Яп.

264. *Isida M.* Анализ коэффициентов интенсивности напряжений для пластин, содержащих произвольный ряд прямолинейных или разветвленных трещин // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1978.— **44**, № 380.— С. 1122—1130.— Яп.
265. *Erdogan F., Gupta G. D., Ratwani M.* Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1974.— **41**, N 4.— P. 1007—1013.
266. *Борщук Е. М.* Предельное равновесие пластины, ослабленной эллиптическим отверстием и трещиной // Физ.-хим. механика материалов.— 1982.— **18**, № 3.— С. 127—128.
267. *Калоеров С. А., Горук Е. Н.* Распределение напряжений в пластинке с трещиной и круговыми отверстиями // Теорет. и прикл. механика.— Киев ; Донецк, 1983.— № 14.— С. 33—39.
268. *Калоеров С. А.* Распределение напряжений в пластинке с трещиной и произвольно расположенным круговым кольцом или ядром // Теорет. и прикл. механика.— Киев ; Донецк, 1986.— № 17.— С. 42—49.
269. *Калоеров С. А., Космодамианский А. С.* Напряженное состояние пластинки с двумя эллиптическими отверстиями и трещиной // Прикл. механика.— 1984.— **20**, № 4.— С. 49—54.
270. *Chen Y. Z.* Solutions of multiple crack problems of a circular plate or an infinite plate containing a circular hole by using Fredholm integral equation approach // Int. J. Fract.— 1984.— **25**, N 3.— P. 155—168.
271. *Srivastava K. N., Kumar M.* On distribution of stress in an infinite solid containing a cylindrical cavity and two strip cracks // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1972.— **3**, N 5.— P. 830—839.
272. *Kumar M., Srivastava R. K.* Some applications of triple integral equations involving inverse Mellin transforms // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1978.— **9**, N 1.— P. 87—100.
273. *Srivastava K. N., Kumar M., Jha A. C.* External star shaped crack in an infinite medium with a circular hole // J. Jap. Soc. Strength and Fract. Mater.— 1977.— **12**, N 2.— P. 83—90.
274. *Саврук М. П., Панасюк И. В., Осив П. Н.* Напряжения в пластине с трещиной и двумя круговыми отверстиями, нагруженными растягивающими усилиями // Физ.-хим. механика материалов.— 1981.— **17**, № 6.— С. 76—82.
275. *Ярема С. Я., Зборомирский А. И.* Влияние способа приложения сосредоточенной силы на напряженное состояние у вершины трещины в пластине // Физ.-хим. механика материалов.— 1973.— **9**, № 1.— С. 61—69.
276. *Осив П. Н., Панасюк И. В., Саврук М. П.* Напряженное состояние пластины, ослабленной двумя круговыми отверстиями и трещиной // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1983.— № 3.— С. 130—134.
277. *Kuo A. S., Saul S., Levy M.* Stress intensity factors for two-cracks emanating from two holes and approaching each other // Eng. Fract. Mech.— 1983.— **17**, N 3.— P. 281—288.
278. *Мирсалимов В. М.* Взаимодействие периодической системы упругих включений и прямолинейных грещин в изотропной среде // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1978.— № 1.— С. 164—174.
279. *Мирсалимов В. М.* Хрупкое разрушение пластины, ослабленной периодической системой круглых отверстий с выходящими на их контуры трещинами // Прикл. механика.— 1980.— **16**, № 11.— С. 73—79.
280. *Мирсалимов В. М.* Разрушение упругих и упругопластических тел.— Баку : Элм, 1984.— 122 с.
281. *Саврук М. П., Панасюк И. В.* Периодическая задача плоской теории упругости для бесконечной плоскости с трещинами и отверстиями // Пробл. прочности.— 1983.— № 6.— С. 49—54.

282. *Мирсалимов В. М.* Коэффициенты интенсивности напряжений для перфорированных пластин с трещинами // Пробл. прочности.— 1978.— № 3.— С. 70—73.

К гл. 4

1. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.— Киев : Наук. думка, 1976.— 444 с.
2. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.— Киев : Наук. думка, 1981.— 324 с.
3. *Shangchow C.* An equivalent procedure for the evaluation of the stress intensity factors of a radial crack in a disc // Int. J. Eng. Sci.— 1983.— **21**, N 10.— P. 1241—1252.
4. *Либацкий Л. Л.* Применение сингулярных интегральных уравнений для определения критических усилий в пластинах с трещинами // Физ.-хим. механика материалов.— 1965.— **1**, № 4.— С. 410—418.
5. *Либацкий Л. Л., Ковчик С. Е.* О разрушении дисков с трещинами // Физ.-хим. механика материалов.— 1967.— **3**, № 4.— С. 458—464.
6. *Bowie O. L., Neal D. M.* A modified mapping-collocation technique for accurate calculation of stress intensity factors // Int. J. Fract. Mech.— 1970.— **6**, N 2.— P. 199—206.
7. *Sih G. C.* Handbook of stress-intensity factors.— Bethlehem : Lehigh University Press, 1973.— Vol. 1.— 420 p.
8. *Rooke D. P., Cartwright D. J.* The compendium of stress intensity factors.— London : Her Majesty's Stationare Office, 1976.— 330 p.
9. *Fracture* mechanics design handbook.— Redstone Arsenal, 1976.— 231 p.— (Techn. rep. / US Army missle command; N77-5).
10. *Ярема С. Я.* Напряженное состояние дисков с трещинами, рекомендуемых в качестве образцов для исследования сопротивления материалов развитию трещин // Физ.-хим. механика материалов.— 1976.— **12**, № 4.— С. 25—39.
11. *Крестин Г. С., Либацкий Л. Л., Ярема С. Я.* Напряженное состояние диска с диаметральной трещиной // Физ.-хим. механика материалов.— 1972.— **8**, № 2.— С. 69—74.
12. *Обоснование* допускаемых отклонений от формы и схемы нагружения дискового образца для определения трещиностойкости сверхтвердых материалов / С. Я. Ярема, Г. С. Иваницкая, А. Л. Майстренко, Л. Н. Девин // Сверхтвердые материалы.— Киев, 1982.— № 1.— С. 27—32.
13. *Richard H. A.* Interpolationsformel für Spannungsintensitätsfactoren // VDI-Zeitschrift.— 1979.— **121**, N 22.— S. 1138—1143.
14. *Yarema S. Y.* Analysis of cracked disk specimens // Eng. Fract. Mech.— 1979.— **12**, N 3.— P. 365—375.
15. *Ярема С. Я.* Исследование дисковых образцов с трещиной // Методы и средства определения трещиностойкости конструкционных материалов.— Киев : Наук. думка, 1981.— С. 25—44.
16. *Методические* указания: Расчеты и испытания на прочность в машиностроении, методы механических испытаний материалов, определение характеристик вязкости разрушения (трещиностойкости) сверхтвердых материалов и твердых сплавов при статическом нагружении.— Киев, 1983.— 57 с.
17. *Ярема С. Я., Иванович М. В., Мельничок Л. С.* Простые формулы для расчета коэффициентов интенсивности напряжений в стандартных образцах // Физ.-хим. механика материалов.— 1985.— **21**, № 1.— С. 52—55.

18. *Авадзи, Сато.* Измерение трещиностойкости при комбинированном разрушении с помощью испытаний дисковых образцов // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теорет. основы инж. расчетов.— 1978.— **100**, № 2.— С. 67—75.
19. *Isida M.* Rotating disk containing an internal crack located at an arbitrary position // Eng. Fract. Mech.— 1981.— **14**, N 3.— P. 549—555.
20. *Rooke D. P., Tweed J.* The stress intensity factors of a radial crack in a finite rotating elastic disc // Int. J. Eng. Sci.— 1972.— **10**, N 8.— P. 709—714.
21. *Tada H., Paris P. C., Irwin G. R.* The stress analysis of cracks: Handbook.— Hellertown: Del Research Corp., 1973.— 385 p.
22. *Ярема С. Я., Крестин Г. С.* Предельное равновесие диска с диаметральной трещиной // Прикл. механика.— 1968.— **4**, № 7.— С. 90—96.
23. *Пластические* деформации около трещины в тонком диске, растягиваемом сосредоточенными силами / С. Я. Ярема, П. М. Витвицкий, А. И. Зборомирский, О. П. Осташ // Физ.-хим. механика материалов.— 1974.— **10**, № 5.— С. 34—39.
24. *Крестин Г. С.* Растяжение диска с центральной трещиной двумя силами, приложенными на разном от нее расстоянии // Физ.-хим. механика материалов.— 1974.— **10**, № 4.— С. 114—116.
25. *Крестін Г. С., Лібацький Л. Л.* Розтяг диска з тріщиною зосередженими силами, нахиленими до лінії її розташування // Вісник Львів. політехн. ін-ту. Математика і механіка.— Львів, 1974.— № 87.— С. 141—145.
26. *Иваницкая Г. С.* Об устойчивости траектории усталостной трещины в дисковом образце // Методы и средства определения трещиностойкости конструкционных материалов.— Киев : Наук. думка, 1981.— С. 44—52.
27. *Isida M.* Arbitrary loading problems of doubly symmetric regions containing a central crack // Eng. Fract. Mech.— 1975.— **7**, N 3.— P. 505—514.
28. *РД 50-345—82.* Методические указания. Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний металлов. Определение характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) при циклическом нагружении.— М. : Изд-во стандартов, 1983.— 96 с.
29. *Ярема С. Я., Саврук М. П., Зборомирский А. И.* Влияние конструкции нагружающего устройства на коэффициент интенсивности напряжений в дисковом образце // Физ.-хим. механика материалов.— 1982.— **18**, № 2.— С. 74—81.
30. *Banks-Sills L., Arcan M., Gabay H* A mode II fracture specimen-finite element analysis // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **19**, N 4.— P. 739—750.
31. *Banks-Sills L., Arcan M., Bortman Y.* A mixed mode fracture specimen for mode II dominant deformation // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **20**, N 1.— P. 145—157.
32. *Atkinson C., Smelser R. E., Sanchez J.* Combined mode fracture via the cracked Brazilian disk test // Int. J. Fract.— 1982.— **18**, N 4.— P. 279—291.
33. *Бойко А. В., Карпенко Л. Н.* Предельное состояние круглой пластины с трещиной сложной формы // Пробл. прочности.— 1983.— № 12.— С. 56—59.
34. *Chen Yi-Zhou, Chen Yi-Heng.* A mixed boundary problem for a finite internally cracked plate // Eng. Fract. Mech.— 1981.— **14**, N 4.— P. 741—751.
35. *Tweed J., Das S. C., Rooke D. P.* The stress intensity factors of a radial crack in a finite elastic disc // Int. J. Eng. Sci.— 1972.— **10**, N 3.— P. 323—335.

36. *Rudolphi T. J., Ashbaugh N. E.* An integral-equations solution for a bounded elastic body containing a crack: mode I deformation // Int. J. Fract.— 1978.— **14**, N 5.— P. 527—541.
37. *Rooke D. P., Tweed J.* The stress intensity factors of a radial crack in a point loaded disc // Int. J. Eng. Sci.— 1973.— **11**, N 2.— P. 285—290.
38. *Мазинг Р. И.* Цилиндрический штамп с симметричной трещиной // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1978.— № 1.— С. 70—77.
39. *Ярема С. Я., Крестин Г. С.* Напряженное состояние диска с произвольно расположенной трещиной // Прикл. механика.— 1975.— **11**, № 9.— С. 50—56.
40. *Smith R. N. L.* Stress intensity factors for an arc crack in a rotating disc // Eng. Fract. Mech.— 1985.— **21**, N 3.— P. 579—587.
41. *Srivastava K. N., Gupta O. P.* Pressurized cruciform crack in a thin circular plate // Z. angew. Math. und Mech.— 1973.— **53**, N 7.— P. 367—373.
42. *Калоеров С. А.* Взаимодействие трещин в изотропных пластинках // Теорет. и прикл. механика.— Киев ; Донецк, 1985.— № 16.— С. 147—154.
43. *Dhaliwal R. S., Singh A.* Two diametral cracks in a circular disc // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1978.— **9**, N 4.— P. 343—357.
44. *Srivastava K. N., Kumar M.* On three part mixed boundary value problems of elastostatics for an isotropic cylinder containing two strip cracks opened by internal pressure // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1970.— **1**, N 4.— P. 625—639.
45. *Kumar M., Srivastava R. K.* Some applications of triple integral equations involving inverse Mellin transforms // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1978.— **9**, N 1.— P. 87—100.
46. *Dhaliwal R. S.* Two diametral cracks in a point loaded circular disc // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1978.— **9**, N 7.— P. 661—667.
47. *Chen Y. Z.* Solutions of multiple crack problems of a circular plate or an infinite plate containing a circular hole by using Fredholm integral equation approach // Int. J. Fract.— 1984.— **25**, N 3.— P. 155—168.
48. *Gregory R. D.* A circular disc containing a radial edge crack opened by a constant internal pressure // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1977.— **81**, N 3.— P. 497—521.
49. *Лібацький Л. Л.* Гранична рівновага кругового диска з діаметральними тріщинами // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1969.— № 4.— С. 334—338.
50. *Либацкий Л. Л.* Всестороннее растяжение кругового диска с внешней радиальной трещиной // Физ.-хим. механика материалов.— 1969.— **5**, № 6.— С. 758—760.
51. *Либацкий Л. Л.* Предельное равновесие кругового диска с внешними радиальными трещинами // Концентрация напряжений.— Киев : Наук. думка, 1971.— **3**.— С. 76—81.
52. *Tweed J., Rooke D. P.* The stress intensity factor of an edge crack in a finite elastic disc // Int. J. Eng. Sci.— 1973.— **11**, N 1.— P. 65—73.
53. *Rooke D. P., Tweed J.* The stress intensity factor of an edge crack in a finite rotating elastic disc // Int. J. Eng. Sci.— 1973.— **11**, N 2.— P. 279—283.
54. *Rooke D. P., Tweed J.* The stress intensity factors for two collinear edge cracks in a rotating disc // J. Elast.— 1977.— **7**, N 2.— P. 185—194.
55. *Gregory R. D.* The edge-cracked circular disc under symmetric pin-loading // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1979.— **85**, N 3.— P. 523—538.
56. *Isida M., Imai R., Tsuru N.* Задачи о произвольном симметричном нагружении пластин с краевой трещиной // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1979.— **А45**, № 395.— С. 743—749.— Яп.

57. *Панасюк В. В., Дацышин А. П., Рудь Н. А.* Об определении характеристик трещиностойкости при внецентренном растяжении дисковых образцов с краевой трещиной // Физ.-хим. механика материалов.— 1984.— **20**, № 1.— С. 22—28.
58. *Либацкий Л. Л.* Разрыв сосредоточенными силами диска с внешней трещиной // Физ.-хим. механика материалов.— 1971.— **7**, № 6.— С. 89—92.
59. *Gross B.* Mode I analysis of a cracked circular disk subject to a couple and a force // Develop. Theor. and Appl. Mech.: Proc. 9th Southeastern Conf. Theor. and Appl. Mech.— Nashville, 1978.— **9**.— P. 195—203.
60. *Newman J. C.* Stress intensity factors and crack-opening displacements for round compact specimens // Int. J. Fract.— 1981.— **17**, N 6.— P. 567—578.
61. *Исследование* напряженного состояния диска с краевым надрезом как образца для изучения зарождения трещин / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. И. Зборомирский, О. П. Осташ // Докл. АН СССР.— 1983.— **272**, № 4.— С. 816—819.
62. *Underwood J. H., Newman J. C., Seeley R. R.* A proposed standart round compact specimen for plane strain fracture toughness testing // J. Test. and Eval.— 1980.— **8**, N 6.— P. 308—313.
63. *Образец* для исследования закономерностей зарождения трещин / В. В Панасюк, М. П. Саврук, А. И. Зборомирский и др. // Физ.-хим. механика материалов.— 1984.— **20**, № 4.— С. 66—77.
64. *Feddern G. V., Macherauch E.* Eine neue Probenform für bruchmechanische Experimente // Z. für Metallkunde.— 1973.— **64**, N 12.— S. 882—884.
65. *РД 50-260—81.* Методические указания. Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Методы механических испытаний металлов. Определение характеристик вязкости разрушения (трещиностойкости) при статическом нагружении.— М. : Изд-во стандартов, 1982.— 56 с.
66. *Andrasic C. P., Parker A. P.* Dimensionless stress intensity factors for cracked thick cylinders under polynomial crack face loadings // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **19**, N 1.— P. 187—193.
67. *Grandt A. F.* Stress intensity factors for cracked holes and rings loaded with polynomial crack face pressure distributions // Int. J. Fract.— 1978.— **14**, N 4.— P. R221—R229.
68. *Petroski H. J., Achenbach J. D.* Computation of the weight function from a stress intensity factor // Eng. Fract. Mech.— 1978.— **10**, N 2.— P. 257—266.
69. *Delale F., Erdogan F.* Stress intensity factors in a hollow cylinder containing a radial crack // Int. J. Fract.— 1982.— **20**, N 4.— P. 251—265.
70. *Tanaka M., Hamada M., Iwata Y.* Computation of a two-dimensional stress intensity factor by the boundary element method // Ing.-Arch.— 1982.— **52**, N 1—2.— P. 95—104.
71. *Саврук М. П., Прокопчук И. В.* Упругое равновесие кольцевых областей с трещинами // Физ.-хим. механика материалов.— 1984.— **20**, № 1.— С. 36—42.
72. *Jones A. T.* A radially cracked, cylindrical fracture toughness specimen // Eng. Fract. Mech.— 1974.— **6**, N 3.— P. 435—446.
73. *Ahmad J., Ashbaugh N. E.* Constant K_I crack-propagation test specimens // Int. J. Fract.— 1982.— **19**, N 2.— P. 115—129.
74. *Thompson R. M., Andrasic C. P., Parker A. P.* Comparison of two sets of results for radially cracked, point loaded ring specimens // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **19**, N 2.— P. 383—386.
75. *Bowie O. L., Freese C. E.* Elastic analysis for a radial crack in a circular ring // Eng. Fract. Mech.— 1972.— **4**, N 2.— P. 315—321.
76. *Прокопчук И. В.* Расчет коэффициентов интенсивности напряжений

для краевых трещин в круговом кольце при сжатии сосредоточенными силами / Материалы Конф. молодых ученых и специалистов: Пробл. повышения качества материалов, приборов и оборуд. Секц. физ.-хим. механики материалов (Львов, 1984).— Львов, 1984.— С. 128—131.— Деп. в ВИНИТИ 17.01.85, № 479.
77. *Саврук М. П., Прокопчук И. В.* Коэффициенты интенсивности напряжений в эллиптической пластине, ослабленной круговым отверстием и краевыми трещинами // Физ.-хим. механика материалов.— 1985.— **21**, № 3.— С. 88—92.
78. *Bueckner H. F., Giaever I.* The stress concentration of a notched rotor subjected to centrifugal forces // Z. angew. Math. und Mech.— 1966.— **46**, N 5.— P. 265—273.
79. *Tracy P.* Stress intensity factors for multiple edge cracks in rotating hollow discs // Int. J. Fract.— 1980.— **16**, N 1.— P. 85—93.
80. *Tan C. L.* Stress intensity factors for edge cracks in rotating discs // Int. J. Fract.— 1983.— **23**, N 4.— P. R177—R180.
81. *Bowie O. L.* Application of partitioning to problem solving in elasticity // Proc. Int. Conf. Fract. Mech. and Technol. (Hong Kong, 1977).— Alphen aan den Rijn, 1977.— **2**.— P. 1109—1126.
82. *Baratta F. I.* Stress intensity factors for internal multiple cracks in thick-walled cylinders stressed by internal pressure using load relief factors // Eng. Fract. Mech.— 1978.— **10**, N 4.— P. 691—697.
83. *Прокопчук И. В.* О влиянии малого центрального отверстия на напряжения в сжимаемом диске с диаметральной трещиной // Физ.-хим. механика материалов.— 1985.— **21**, № 6.— С. 94—96.
84. *Ланин А. А.* Расчетное определение коэффициента интенсивности напряжений в кольцевом образце с трещиной // Тр. Центр. науч.-исслед. и проектно-конструкт. котло-турбинного ин-та.— 1982.— № 194.— С. 57—60.
85. *Tracy P. G.* Elastic analysis of radial cracks emanating from the outer and inner surfaces of a circular ring // Eng. Fract. Mech.— 1979.— **11**, N 2.— P. 291—300.
86. *Pu S. L., Hussain M. A.* Stress intensity factors for a circular ring with uniform array of radial cracks using cubic isoparametric singular elements // Fracture Mechanics.— Philadelphia : ASTM, 1979.— P. 685—699.— (ASTM STP 677).
87. *Murakami Y., Nisitani H.* A method for calculating stress intensity factors of an arbitrarily shaped finite plate with a crack // Proc. Int. Conf. Fract. Mech. and Technol. (Hong Kong, 1977).— Alphen aan den Rijn, 1977.— **2**,— P. 1171—1185.
88. *Эмери, Сегедин.* Эффективный численный метод определения коэффициентов интенсивности напряжений для трещин при растяжении, кручении и изгибе // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теорет. основы инж. расчетов.— 1972.— **94**, № 2.— С. 143—151.
89. *Борщук Е. М., Панасюк В. В., Саврук М. П.* Напряженное состояние в плоском круговом кольце, ослабленном системой криволинейных разрезов // Прикл. математика и механика.— 1981.— **45**, № 2.— С. 356—360.
90. *Sekine H., Koizumi R., Tamate O.* Stress intensity factors for an embedded crack in a thick walled cylinder subjected to internal pressure // Int. J. Fract.— 1982.— **18**, N 2.— P. R3—R8.
91. *Белинский Б. П., Локшин А. З.* Напряженное состояние в плоском круговом кольце с трещиной // Прикл. математика и механика.— 1975.— **39**, № 6.— С. 1118—1128.
92. *Chen Wen-Hwa, Lin Ta-Chyan.* A mixed-mode crack analysis of rotating disk using finite element method // Eng. Fract. Mech.— 1983.— **18**, N 1.— P. 133—143.

93. *Борщук Е. М., Прокопчук И. В.* Коэффициенты интенсивности напряжений для криволинейного разреза в круговом кольце // Физ.-хим. механика материалов.— 1983.— **19**, № 1.— С. 99—102.
94. *Калоеров С. А.* Распределение напряжений в эллиптическом диске с трещиной / Донецк. ун-т.— Донецк, 1983.— 10 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 27.10.83. № 1222.
95. *Isida M., Kishine N.* Задачи о произвольном нагружении областей с симметрией относительно точки, содержащих центральную трещину // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1981.— **A47**, № 416.— С. 367—373.— Яп.
96. *Осив П. Н.* Определение напряжений около трещин в двумерных телах сложной конфигурации методом сингулярных интегральных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. н.— Львов, 1985,— 18 с.
97. *Srivastava K. N., Kumar M.* A note on the problem of edge crack in a semi-circular plate // Int. J. Fract.— 1976.— **12**, N 4.— P. 645—646.
98. *Srivastava K. N., Kumar M.* An edge crack in a thin semi-circular plate // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1977.— **8**, N 1.— P. 72—83.
99. *Andrasic C. P., Parker A. P.* Weight functions for cracked, curved beams / Numer. Meth. Fract. Mech.: Proc. 2nd Int. Conf. (Swansea, 1980).— Swansea, 1980.— P. 67—82.
100. *Tracy P. G.* Analysis of a radial crack in a circular ring segment // Eng. Fract. Mech.— 1975.— 7, N 2.— P. 253—260.
101. *Gross B., Srawley J. E.* Analysis of an internally radially cracked ring segment subject to three-point radial loading // J. Test. and Eval.— 1983.— **11**, N 6.— P. 357—359.
102. *Jones A. T.* Fracture toughness testing with sections of cylinders // Eng. Fract. Mech.— 1974.— **6**, N 4.— P. 653—662.
103. *Underwood J. H., Scalon R. D., Kendall D. P. K* calibration for *C*-shaped specimens of various geometries // Fracture Analysis.— Philadelphia : ASTM, 1974.— P. 81—91.— (ASTM STP 560).
104. *Underwood J. H., Kendall D. P.* Fracture toughness using the *C*-shaped specimen // Developments in Fracture Mechanics Test Methods Standardization.— Philadelphia : ASTM, 1977.— P. 25—38.— (ASTM STP 632).
105. *Kapp J. A., Newman J. C., Underwood J. H.* A wide range stress intensity factor expression for the *C*-shaped specimen // J. Test. and Eval.— 1980.— **8**, N 6.— P. 314—317.
106. *E 399—83. Standard* test method for plane-strain fracture toughness of metallic materials // Annular Book of ASTM Standards.— Philadelphia : ASTM, 1983.— **03.01.**— P. 547—582.
107. *Chen Y. Z.* Stress intensity factors in finite plate having contour with cusps and applied by concentrated forces // Eng. Fract. Mech.— 1985.— **22**, N 4.— P. 635—644.
108. *Курдин Н. С., Ольховский А. И.* Одна задача о хрупком разрушении // Прикл. теория упругости.— Саратов, 1979.— № 2.— С. 30—32.
109. *Isida M.* Effect of width and length on stress intensity factors of internally cracked plates under various boundary conditions // Int. J. Fract. Mech.— 1971.— **7**, N 3.— P. 301—316.
110. *Isida M.* Задачи о произвольно симметрично нагруженной прямоугольной пластине с центральной трещиной // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1976.— **42**, № 362.— С. 3019—3030.— Яп.
111. *Bowie O. L., Neal D. M.* A note on the central crack in a uniformly stressed strip // Eng. Fract. Mech.— 1970.— **2**, N 2.— P. 181—182.
112. *Isida M.* Method of Laurent series expansion for internal crack problems // Methods of analysis and solutions of crack problems. Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 56—130.— (Mechanics of fracture; 1).

113. *Murakami Y.* A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method // Eng. Fract. Mech.— 1976.— **8**, N 4.— P. 643—655.
114. *Vialaton G., Brunet M., Bahuand J.* Stress intensity factors for a bounded plate containing two collinear cracks // Eng. Fract. Mech.— 1980.— **13**, N 4.— P. 865—878.
115. *Civelek M. B., Erdogan F.* Crack problems for a rectangular plate and an infinite strip // Int. J. Fract.— 1982.— **19**, N 2.— P. 139—159.
116. *Gray T. G. F.* Convenient closed form stress intensity factors for common crack configurations // Int. J. Fract. — 1977.— **13**, N 1.— P. 65—75.
117. *Bowie O. L., Freese C. E.* Central crack in plane orthotropic rectangular sheet // Int. J. Fract. Mech.— 1972.— **8**, N 1.— P. 49—57.
118. *Sih G. C.* Handbook of stress-intensity factors.— Bethlehem : Lehigh University Press, 1974.— Vol. 2.— 406 p.
119. *Snyder M. D., Cruse T. A.* Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates // Int. J. Fract.— 1975.— **11**, N 2.— P. 315—328.
120. *Newman J. C.* An improved method of collocation for the stress analysis of cracked plate with various shaped boundaries.— NASA TN D-6376, 1971.— 45 p.
121. *Напряжения* в сжимаемом квадратном образце с продольной или диагональной трещиной / М. П. Саврук, С. Я. Ярема, П. Н. Осив, А. Л. Майстренко // Физ.-хим. механика материалов.— 1985.— **21**, № 5.— С. 63—68.
122. *Саврук М. П., Ярема С. Я., Осив П. Н.* Напряженное состояние квадратного образца для испытаний листовых материалов на трещиностойкость // Физ.-хим. механика материалов.— 1982.— **18**, № 3.— С. 57—63.
123. *Осив П. Н.* Определение коэффициентов интенсивности напряжений в растягиваемой квадратной пластине с диагональной трещиной // Физ.-хим. механика материалов.— 1984.— **20**, № 1.— С. 107—108.
124. *Саврук М. П., Тимошук Н. В., Осив П. Н.* Применение сингулярных интегральных уравнений в плоских задачах о концентрации напряжений около отверстий и трещин // Теорет. и прикл. механика.— Киев ; Донецк, 1985.— № 16.— С. 117—123.
125. *Bowie O. L.* Solutions of plane crack problems by mapping technique // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 1—55.— (Mechanics of fracture; 1).
126. *Chen Yi-Zhou.* An investigation of the stress intensity factor for a finite internally cracked plate by using variational method // Eng. Fract. Mech.— 1983.— **17**, N 5.— P. 387—394.
127. *Isida M., Terada H.* Исследование коэффициентов интенсивности напряжений в пластинах, содержащих внутренние трещины // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1977.— **43**, № 374.— С. 3636—3641.— Яп.
128. *Kitagawa H., Ishikawa H.* Analytical determination of stress intensity factors of eccentric cracks by variational method // Adv. Res. Strength and Fract. Mater. 4th Int. Conf. Fract. (Waterloo, 1977).— New York etc., 1978.— **3A**.— P. 111—119.
129. *Isida M., Ushijima N., Kishine N.* Прямоугольные пластины, полосы и широкие пластины, содержащие внутренние трещины при различных граничных условиях // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1981.— **A47**, № 413.— С. 27—35.— Яп.
130. *Kitagawa H., Yuuki R.* Анализ трещин нелинейной формы в пластине конечных размеров методом конформных отображений // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1977.— **43**, № 376.— С. 4354—4362.— Яп.

131. *Уилсон.* Численный метод определения коэффициентов интенсивности напряжений для внутренней трещины в пластине конечных размеров // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теорет. основы инж. расчетов.— 1971.— **93**, № 4.— С. 217—222.
132. *Isida M., Kishine N.* Растяжение прямоугольных пластин с центральной наклонной трещиной // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1979.— **A45**, № 394.— С. 576—583.— Яп.
133. *Бови, Нил.* Растянутая прямоугольная пластинка с трещиной на кромке // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1965.— **32**, № 3.— С. 268—270.
134. *Srawley J. E., Gross B.* Side-cracked plates subject to combined direct and bending forces // Cracks and Fracture: Proc. 9th Nat. Symp. Fract. Mech.— Baltimore : ASTM, 1976.— P. 559—579.— (ASTM STP 601).
135. *Зейлигер В. А., Трапезников Л. П.* Функция Грина для коэффициентов интенсивности напряжений в полосе с поперечной трещиной // Прикл. механика.— 1976.— **12**, № 11.— С. 74—84.
136. *Sha G. T.* Stiffness derivative finite element technique to determine nodal weight functions with singularity elements // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **19**, N 4.— P. 685—699.
137. *Gao Pei-qing.* Stress intensity factors for a rectangular plate with a point-loaded edge crack by a boundary collocation procedure, and an investigation into the convergence of the solutions // Eng. Fract. Mech.— 1985.— **22**, N 2.— P. 295—305.
138. *Браун У., Сроули Дж.* Испытания высокопрочных металлических материалов на вязкость разрушения при плоской деформации.— М. : Мир, 1972.— 246 с.
139. *Wilson W. K.* Stress intensity factors for deep cracks in bending and compact tension specimens // Eng. Fract. Mech.— 1970.— **2**, N 2.— P. 169—171.
140. *Морозов Е. М., Черныш Т. А., Воробьева Л. Ю.* МКЭ расчет коэффициента интенсивности напряжений для ДКБ-образцов // Прочность и долговечность материалов и конструкций атомной техники.— М. : Энергоатомиздат, 1982.— С. 72—75.
141. *Акао, Кобаяси.* Коэффициент интенсивности напряжений для короткого надрезанного образца, нагруженного в трех точках // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теорет. основы инж. расчетов.— 1967.— **89**, № 1.— С. 8—14.
142. *Srawley J. E., Gross B.* Stress intensity factors for bent and compact specimens // Eng. Fract. Mech.— 1972.— **4**, N 3.— P. 587—589.
143. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Ковчик С. Е.* Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов.— Киев : Наук. думка, 1977.— 277 с.
144. *Srawley J. E.* Wide range stress intensity factor expressions for ASTM E 399 standard fracture toughness specimens // Int. J. Fract.— 1976.— **12**, N 3.— P. 475—476.
145. *Панько И. Н., Яковчик В. А.* Определение коэффициента интенсивности напряжений для силовой схемы изгиба балочного образца с поверхностной трещиной // Физ.-хим. механика материалов.— 1979.— **15**, № 2.— С. 87—89.
146. *Dong Fu.* A simplification and supplement to formula K_Q of ASTM E 399-81 three point bending // Int. J. Fract.— 1983.— **22**, N 2.— P. R51—R52.
147. *Jen Wang Ke, Lin Hsu Chi, Hua Kao.* Calculation of stress intensity factors for combined mode bend specimens // Adv. Res. Strength and Fract. Mater. 4th Int. Conf. Fract. (Waterloo, 1977).— New York etc., 1978.— **4**.— P. 123—133.

148. *Wessel E. T.* State of the art of the WOL specimen for fracture toughness testing // Eng. Fract. Mech.— 1968.— **1**, N 1.— P. 77—103.
149. *Bäcklund J., Mackerle J.* Stress intensity and crack opening of compact tension specimens // Eng. Fract. Mech.— 1979.— **12**, N 1.— P. 99—101.
150. *Newman J. C.* Stress analysis of the compact specimen including the effect of pin loading // Fracture Analysis.— Philadelphia : ASTM, 1972.— P. 105—121.— (ASTM STP 560).
151. *Murakami Y.* Analysis of mixed-mode stress intensity factors by body force method // Numer. Meth. Fract. Mech.: Proc. 2nd Int. Conf. (Swansea, 1980).— Swansea, 1980.— P. 145—159.
152. *Бови, Фриз, Нил.* Решение плоских задач теории упругости с помощью принципов расчленения // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1973.— **40**, № 3.— С. 129—135.
153. *Bowie O. L., Baratta F. I.* On the load-displacement relation for a cracked rectangular specimen with constrained ends // Int. J. Fract.— 1980.— **16**, N 2.— P. R57—R62.
154. *Torvik P. J.* On the determination of stresses, displacements, and stress intensity factors in edge-cracked sheets with mixed boundary conditions // Trans ASME. J. Appl. Mech.— 1979.— **46**, N 3.— P. 611—617.
155. *Bowie O. L., Freese C. E.* Cracked-rectangular sheet with linearly varying end displacements // Eng. Fract. Mech.— 1981.— **14**, N 3.— P. 519—526.
156. *Блум.* Трещина у края прямоугольной пластинки при повороте ее концов // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1966.— **33**, № 3.— С. 243—246.
157. *Gross B.* Mode I analysis of a face cracked plate subjected to rotationally constrained end displacements // Int. J. Fract.— 1978.— **14**, N 6.— P. 623—631.
158. *О постоянстве* коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины при ее распространении в прямоугольной пластине / В. И. Похмурский, Н. М. Кундрат, Л. М. Билый и др. // Пробл. прочности.— 1984.— № 12.— С. 59—62.
159. *Ogen G., Schiff B.* Stress intensity factors for two-dimensional crack problems using constrained finite elements // Int. J. Fract.— 1985.— **28**, N 2.— P. 55—68.
160. *Isida M., Tsuru H.* Plane probl ems of finite regions containing multple cracks // Technol. Repts Kyushu Univ.— 1982.— **55**, N 6.— P. 649—656.
161. *Isida M., Tsuru H.* Tension of finite plates containing multiple and periodic cracks // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.— 1983.— **A49**, N 441.— P. 641—645.
162. *Бови.* Растяжение прямоугольной пластины с симметричными трещинами на кромках // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1964.— **31**, № 2.— С. 56—61.
163. *Бови.* Симметричные трещины на поперечных кромках растягиваемой пластины с жестко заделанными продольными кромками // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1964.— **31**, № 4.— С. 175—177.
164. *Jones D. L., Chisholm D. B.* An investigation of the edge-sliding mode in fracture mechanics // Eng. Fract. Mech.— 1975.— **7**, N 2.— P. 261—270.
165. *Hoyniak D., Conway J. C.* Finite element analysis of the compact shear specimen // Eng. Fract. Mech.— 1979.— **12**, N 2.— P. 301—306.
166. *Риддл, Стрейт, Финни.* Расчет компактного образца для испытаний на сдвиг с целью исследования смешанного типа разрушения //

Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теорет. основы инж. расчетов.— 1983.— **105**, № 4.— С. 38—43.
167. *Davies J., Morgan T. G., Yim A. W.* The finite element analysis of a punch-through shear specimen in mode II // Int. J. Fract.— 1985.— **28**, N 1.— P. R3—R10.
168. *Karlsson A., Bäcklund J.* Summary of SIF design graphs for cracks emanating from circular holes // Int. J. Fract.— 1978.— **14**, N 6.— P. 585—596.
169. *Oladimeji M. K.* Crack emanating from a circular hole under biaxial load // Eng. Fract. Mech.— 1981.— **15**, N 3/4.— P. 391—405.
170. *Cartwright D. J., Parker A. P.* Opening mode stress intensity factors for cracks in pin-loads points // Int. J. Fract.— 1982.— **18**, N 1.— P. 65—78.
171. *Xiao S. T., Brown M. W., Miller K. J.* Stress intensity factors for cracks in notched finite plates subjected to biaxial loading // Fatigue and Fracture of Eng. Mater. and Struct.— 1985.— **8**, N 4.— P. 349—372.
172. *Wang S. S., Yau J. F.* An analysis of cracks emanating from a circular hole in unidirectional fiber-reinforced composities // Eng. Fract. Mech.— 1980.— **13**, N 1.— P. 57—67.
173. *Прокопчук И. В.* Напряжения в квадратной пластине с круговым отверстием и краевыми трещинами // Материалы 2-й конф. молодых ученых и специалистов: Пробл. повышения качества материалов, приборов и оборуд. Секц. физ.-хим. механики материалов (Львов, 1986).— Львов, 1986.— С. 101—104.— Деп. в ВИНИТИ 12.01.87, № 1415.
174. *Yamamoto Y., Sumi Y., Ao K.* Stress intensity factors of cracks emanating from semi-elliptical side notches in plates // Int. J. Fract.— 1974.— **10**, N 4.— P. 593—595.
175. *Dowling N. E., Wilson W. K.* Results of elastic analysis of bluntly notched compact specimens // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **20**, N 3.— P. 569—572.
176. *Papaspyropoulos V., Ahmad J.* On modified compact tension test specimens // Eng. Fract. Mech.— 1981.— **14**, N 1.— P. 227—232.
177. *The behaviour* of small fatigue cracks at notches in corrosive environments / A. Saxena, W. K. Wilson, L. D. Roth, P. K. Liaw // Int. J. Fract.— 1985.— **28**, N 2.— P. 69—82.
178. *Liu X. H., Erdogan F.* An elastic strip with multiple cracks and applications to tapered specimens // Int. J. Fract.— 1985.— **29**, N 2.— P. 59—72.
179. *Srawley J. E., Gross B.* Stress intensity factors for crackline-loaded edge-crack specimens // Mater. Res. and Stand.— 1967.— **7**, N 4.— P. 155—162.
180. *Linsbauer H. N.* Back face rotation correction for trapezoidal specimens // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **19**, N 2.— P. 195—205.
181. *Isida M.* Effects of specimen geometry and loading conditions on the crack tip plastic zone // Mech. Behav. Mater.: Proc. Int. Conf. Mech. Behav. Mater. (Kyoto, 1971).— Kyoto, 1972.— **1**.— P. 394—407.

К гл. 5

1. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.— Киев : Наук. думка, 1981.— 324 с.
2. *Си.* Распределение напряжений вблизи концов трещины продольного сдвига // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1965.— **32**, № 1.— С. 57—65.

3. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение: В 7-ми т. / Ред. Г. Либовиц.— Т. 2. Математические основы теории разрушения.— М. : Мир, 1975.— С. 83—203.
4. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.— Киев : Наук. думка, 1976.— 444 с.
5. *Tada H., Paris P. C., Irwin G. R.* The stress analysis of cracks: Handbook.— Hellertown : Del Research Corp., 1973.— 385 p.
6. *Sih G. C.* Boundary problems for longitudinal shear cracks // Develomp. Theoret. and Appl. Mech.— Oxford etc., 1965.— **2**.— P. 117—130.
7. *Sih G. C.* Handbook of stress-intensity factors.— Bethlehem : Lehigh University Press, 1973.— Vol. 1.— 420 p.
8. *Филд.* Трещины, возникающие при воздействии продольных напряжений сдвига // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1965.— **32**, № 1.— С. 229—230.
9. *Sih G. C.* Handbook of stress-intensity factors.— Bethlehem : Lehigh University Press, 1974.— Vol. 2.— 406 p.
10. *Фильштинский Л. А.* Продольный сдвиг в анизотропной среде с разрезами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1978.— № 4.— С. 68—72.
11. *Sih G. C., Chen E. P.* Cracks in composite materials: A compilation of stress solutions for composite systems with cracks.— London etc.: Martinus Nijhoff publishers, 1981.— 538 p.— (Mechanics of fracture; 6).
12. *Smith E.* The extension of circular-arc cracks in antiplane strain deformation // Int. J. Eng. Sci.— 1969.— **7**, N 9.— P. 973—991.
13. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения.— М. : Наука, 1974.— 640 с.
14. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений для криволинейной трещины, мало отличающейся от дугообразной или прямолинейной // Физ.-хим. механика материалов.— 1980.— **16**, № 2.— С. 57—63.
15. *Дудукаленко В. В., Ромалис Н. Б.* О направлении распространения трещин продольного сдвига // Прикл. механика.— 1971.— **7**, № 8.— С. 101—105.
16. *Smith E.* Crack bifurcation in brittle solids // J. Mech. and Phys. Solids.— 1968.— **16**, N 5.— P. 329—336.
17. *Smith E.* The extension of two parallel non-coplanar cracks by an applied stress // Int. J. Eng. Sci.— 1971.— **9**, N 7.— P. 631—638.
18. *Tucker M. O.* Cracks in two-phase solids under longitudinal shear loading // Int. J. Fract.— 1974.— **10**, N 3.— P. 323—336.
19. *Несатый И. М.* Коэффициенты интенсивности напряжений для некоторых тел с трещинами в случае продольного сдвига // Пробл. прочности.— 1986.— № 5.— С. 20—24.
20. *Sih G. C.* External cracks under longitudinal shear // J. Franklin Inst.— 1965.— **280**, N 2.— P. 139—149.
21. *Несатый И. М.* Продольный сдвиг тел с трещинами под действием сосредоточенных сил // Физ.-хим. механика материалов.— 1987.— **23**, № 1.— С. 78—82.
22. *Smith E.* A note on crack-forking in anti-plane strain deformation // Int. J. Fract.— 1973.— **9**, N 2.— P. 181—183.
23. *Bilby B. A., Cardew G. E.* The crack with a kinked tip // Int. J. Fract.— 1975.— **11**, N 4.— P. 708—712.
24. *Ichikawa M., Tanaka S.* A critical analysis of the relationship between the energy release rate and the stress intensity factors for non-coplanar crack extension under combined mode loading // Int. J. Fract.— 1982.— **18**, N 1.— P. 19—28.

25. *Isida M., Tsuru H.* Прямолинейные и разветвленные трещины, а так же трещины, исходящие из острых вырезов, в бесконечных и полубесконечных телах под действием антиплоского сдвига // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1981.— **A47**, № 414.— С. 158—165.— Яп.
26. *Wu C. H.* Elasticity problems of a slender Z-crack // J. Elast.— 1978.— **8**, N 2.— P. 183—205.
27. *Yang Qi-cheng.* Complex variable function solutions for internal radiated cracks subjected to longitudinal shear // Acta mech. solida sin.— 1984.— N 3.— P. 437—443.
28. *Nakayama T.* Коэффициенты интенсивности напряжений в концах внутренней трещины в задачах продольного сдвига // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1973.— **39**, № 322.— С. 1779—1785.— Яп.
29. *Кулиев В. Д.* Влияние симметричных отростков в конце трещины на ее развитие // Прикл. механика.— 1979.— **15**, № 8.— С. 113—116.
30. *Bilby B. A.* Tewksbury lecture: Putting fracture to work // J. Mater. Sci.— 1980.— **15**, N 3.— P. 535—556.
31. *Aksogan O.* Star-formed arrays of cracks under longitudinal shear // Proc. Int. Conf. Fract. Mech. and Technol. (Hong Kong, 1977).— Alphen aan den Rijn, 1977.— **2**.— P. 1241—1248.
32. *Turska-Kłębek E., Sokołowski M.* On the influence of defects upon stress concentration at the crack // Arch. mech. stosow.— 1984.— **36**, N 1.— P. 121—126.
33. *Tamate O., Yamada T.* Задача о двух трещинах при продольном сдвиге // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1971.— **37**, № 303.— С. 2107—2113.— Яп.
34. *Chen Y. Z.* Multiple crack problems of antiplane elasticity in an infinite body by using Fredholm integral equation approach // Eng. Fract. Mech.— 1985.— **21**, N 3.— P. 473—478.
35. *Саврук М. П.* Система произвольно ориентированных трещин продольного сдвига в упругом теле // Прикл. математика и механика.— 1975.— **39**, № 4.— С. 717—723.
36. *Ohashi M., Ichikawa M., Yokobori T.* The interaction of two parallel elastic cracks not perpendicular each other // Repts Res. Inst. Strength and Fract. Mater., Tohoku Univ.— 1965.— **1**, N 2.— P. 41—46.
37. *Isida M.* Method of Laurent series expansion for internal crack problems // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden : Noord hoff Intern. Publ., 1973.— P. 56—130.— (Mechanics of fracture; 1).
38. *Саврук М. П.* Система криволинейных разрезов в упругом теле при антиплоской деформации // Физ.-хим. механика материалов.— 1979.— **15**, № 4.— С. 92—98.
39. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О хрупких трещинах продольного сдвига // Прикл. математика и механика.— 1961.— **25**, № 6.— С. 1110—1119.
40. *Ichikawa M., Ohashi M., Yokobori T.* Interaction between parallel cracks in an elastic solid and its effect on fracture // Repts Res. Inst. Strength and Fract. Mater., Tohoku Univ.— 1965.— **1**, N 1.— P. 1—14.
41. *Новиков В. Г., Тулинов Б. М.* Напряженное состояние плоскости с периодической системой параллельных пар трещин продольного сдвига // Прикл. математика и механика.— 1984.— **48**, № 5.— С. 877—880.
42. *Matczyński M.* Motion of a crack in antiplane state of strain of an elastic strip // Arch. mech. stosow.— 1973.— **25**, N 5.— P. 823—832.
43. *Саврук М. П.* Двоякопериодическая система трещин продольного сдвига в упругом теле // Прикл. механика.— 1975.— **11**, № 12.— С. 113—117.
44. *Chang S. S.* The general solutions of the doubly periodic cracks // Eng. Fract. Mech.— 1983.— **18**, N 4.— P. 887—893.
45. *Новиков В. Г., Тулинов Б. М.* Двоякопериодическая система прямоли-

нейных трещин продольного сдвига в упругом теле // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1985.— № 1.— С. 148—151.
46. *Varatharajulu V. K.* Stress intensity factor of an inclined surface crack // Z. angew. Math. und Mech.— 1975.— **55**, N 5.— P. 274—276.
47. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.— М. : Наука, 1982.— 342 с.
48. *Кит Г. С., Хай М. В.* Продольный сдвиг слоя с системой прямолинейных трещин // Физ.-мех. поля в деформируемых средах.— Киев, 1978.— С. 77—81.
49. *Лысый И. П.* Антиплоская деформация слоя и клина с трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля.— Киев, 1979.— № 10.— С. 54—58.
50. *Geçit M. R.* Antiplane shear problem for a crack crossing a surface layer-half space boundary // METU J. Pure and Appl. Sci.— 1980.— **13**, N 3.— P. 395—412.
51. *Matczyński M., Sokołowski M.* A note on the propagation of cracks in antiplane state of strain // Arch. mech. stosow.— 1971.— **23**, N 6.— P. 969—976.
52. *Sih G. C., Chen E. P.* Moving cracks in a finite strip under tearing actions // J. Franklin Inst.— 1970.— **290**, N 1.— P. 25—35.
53. *Райс.* Обсуждение статьи Кнаусса «Напряжения в бесконечной полосе, содержащей полубесконечную трещину» // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1967.— **34**, № 1.— С. 138—139.
54. *Matczyński M.* Stress concentrations in non-homogeneous elastic layer weakened by cracks // Rozpr. inż.—1979 (1980).— **27**, N 4.— P. 559—574.
55. *Amazigo J. C.* Crack in a semi-infinite layer under shear loading // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1975.— **42**, N 4.— P. 903—904.
56. *Yatomi C.* Note on the energy-release rate for a crack starting from the apex of a wedge // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1981.— **48**, N 1.— P. 194—195.
57. *Kuhn G.* Inhomogen geschichteten Keil mit Riss unter nichtebenem Schubspannungszustand // Z. angew. Math. und Mech.— 1976.— **56**, N 3.— S. 125—127.
58. *Wu C. H.* Unconventional internal cracks. Part 1. Symmetric variations of a straight crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1982.— **49**, N 1.— P. 62—68.
59. *Interaction* between an elliptic notch and a near-by crack / T. Yokobori, M. Ichikawa, S. Konosu, R. Takahashi // Repts Res. Inst. Strength and Fract. Mater., Tohoku Univ.— 1972.— **8**, N 1.— P. 1—17.
60. *Rooke D. P., Cartwright D. J.* The compendium of stress intensity factors.— London : Her Majesty's Stationare Office, 1976.— 330 p.
61. *Робертс, Рич.* Коэффициенты интенсивности напряжений при изгибе пластин // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1967.— **34**, № 3.— С. 348—350.
62. *Tweed J.* Some dual equations with an application in the theory of elasticity // J. Elast.— 1972.— **2**, N 4.— P. 351—355.
63. *Yokobori T., Kamei A., Konosu S.* The stress intensity factors for an elliptic notch with two collinear cracks at its tips // Repts Res. Inst. Strength and Fract. Mater., Tohoku Univ.— 1971.— **7**, N 2.— P. 57—62.
64. *Kamei A., Yokobori T.* Some results on stress intensity factors of the cracks and / or slip bands system // Repts Res. Inst. Strength and Fract. Mater., Tohoku Univ.— 1975.— **10**, N 2.— P. 29—93.
65. *Sih G. C.* Stress-intensity factors for longitudinal shear cracks // AIAA Journal.— 1963.— **1**, N 10.— P. 2387—2388.
66. *Tweed J.* The solution of some dual equations with an application in the theory of elasticity // J. Eng. Math.— 1973.— **7**, N 3.— P. 273—277.

67. *Longmuir G. J., Tweed J.* The longitudinal shear problem for an array of cracks at the edge of a circular hole in an infinite elastic solid // J. Eng. Math.— 1976.— **10,** N 4.— P. 305—312.
68. *Калоеров С. А.* Антиплоская деформация многосвязных тел с трещинами // Изв. АН АрмССР. Механика.— 1985.— **38,** № 6.— С. 11—20.
69. *Tweed J., Longmuir G. J.* Some triple equations with an application to crack problems in the theory of elasticity // Int. J. Eng. Sci.— 1974.— **12,** N 10.— P. 807—816.
70. *Nisitani H., Saito K., Hara N.* Концентрация напряжений в зоне эллиптических отверстий и трещин (растяжение и продольный сдвиг) // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1973.— **39,** № 324.— С. 2312—2322.— Яп.
71. *Kasano H., Matsumoto H., Nakahara I.* Исследование влияния прямоугольного отверстия с закругленными краями на напряженное состояние в теле с трещиной в условиях продольного сдвига // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1977.— **43,** № 369.— С. 1585—1591.— Яп.
72. *Sendeckyj G. P.* Interaction of cracks with rigid inclusions in longitudinal shear deformation // Int. J. Fract.— 1974.— **10,** N 1.— P. 45—52.
73. *Smith E.* The effect of a circular cylindrical hole on the stress intensity at a crack tip // Arch. mech. stosow.— 1983.— **35,** N 5/6.— P. 741—746.
74. *Yamada T.* Влияние двух включений эллиптической формы на напряженное состояние вблизи края трещины в бесконечном теле, находящемся под действием продольного сдвига // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1975.— **41,** № 346.— С. 1671—1680.— Яп.
75. *Smith E.* Cracks and dislocation arrays in heterogeneous media // Int. J. Fract. Mech.— 1968.— **4,** N 4.— P. 397—409.
76. *Isida M., Tsuru H., Imai R.* Задачи об антиплоском сдвиге для произвольных симметричных областей с боковой трещиной // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1981.— **A47,** № 417.— С. 519—525.— Яп.
77. *Chen Yi-Zhou, Chen Yi-Heng.* An antiplane crack problem for some kinds of regions // Eng. Fract. Mech.— 1982.— **16,** N 5.— P. 733—740.
78. *Вестман, Янг.* Анализ напряжения в балках прямоугольного сечения с трещиной // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1967.— **34,** № 3.— С. 693—701.
79. *Chang S. S.* The solution of a rectangular orthotropic sheet with a central crack under anti-plane shear // Eng. Fract. Mech.— 1985.— **22,** N 2.— P. 253—261.
80. *Rettig G.* Anti-plane stress analysis of a cracked rectangular orthotropic beam // Eng. Fract. Mech.— 1986.— **23,** N 2.— P. 441—454.
81. *Зальберглейт А. С., Суслова И. Б.* Об одном методе решения задач кручения круглых стержней с радиальными трещинами.— М., 1983.— 44 с.— (Препринт / АН СССР, Физ.-техн. ин-т; № 805).
82. *Tweed J., Rooke D. P.* The torsion of a circular cylinder containing a symmetric array of edge cracks // Int. J. Eng. Sci.— 1972.— **10,** N 9.— P. 801—812.
83. *Си.* Интенсивность напряжений у вершины трещины при изгибе и кручении балок // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1963.— **30,** № 3.— С. 111—118.
84. *Ромалис Н. Б.* Разрушение при кручении круглого стержня с трещиной по дуге окружности // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1970.— № 5.— С. 121—125.
85. *Кузина Г. В., Ромалис Н. Б.* Распространение радиальных трещин в круглом стержне при кручении // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1974.— № 1.— С. 169—171.
86. *Tweed J., Longmuir G.* The torsion problem for a circular cylinder with radial edge cracks // J. Eng. Math.— 1975.— **9,** N 2.— P. 117—125.

87. *Tang Ren-ji.* Saint-Venant's torsion problem for a circular cylinder with cracks // Acta mech. sin.— 1982.— N 4.— P. 332—340.
88. *Tang Ren-ji.* Bending torsion of circular cylinder with radial crack system // Acta mech. solida sin.— 1983.— N 3.— P. 341—353.
89. *Зильберглейт А. С., Суслова И. Б.* Кручение упругого стержня круглого сечения, ослабленного произвольным числом радиальных трещин, выходящих на поверхность // Докл. АН СССР.— 1983.— **271**, № 2.— С. 319—323.
90. *Guo Zhong-heng.* Коэффициент интенсивности напряжений при кручении круглого цилиндра с внутренними радиальными трещинами // Лисюэ сюэбао.— 1979.— № 3.— С. 298—302.— Кит.
91. *Guo Zhong-heng.* On the torsion of circular cylinder with a single arbitrary radial crack // Acta mech. sin.— 1980.— N 2.— P. 208—212.
92. *Shangchow C.* Antiplane shear interactions between a circular boundary and a radial crack // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **19**, N 2.— P. 331—340.
93. *Эмери, Сегедин.* Эффективный численный метод определения коэффициентов интенсивности напряжений для трещин при растяжении, кручении и изгибе // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теорет. основы инж. расчетов.— 1972.— **94**, № 2.— С. 143—151.
94. *Chen Yi-Zhou, Chen Yi-Heng.* Third stress intensity factors of torsion crack bar with ring sections // Eng. Fract. Mech.— 1983.— **17**, N 1.— P. 87—94.
95. *Chen Yi-Zhou.* Solutions of torsion crack problems of a rectangular bar by harmonic function continuation technique // Eng. Fract. Mech.— 1980.— **13**, N 1.— P. 193—212.
96. *Chen Yi-Heng.* Solutions of torsion crack problems of bars with + [and I cross section // Acta mech. solida sin.— 1982.— N 4.— P. 630—638.
97. *Chen Yi-Zhou, Chen Yi-Heng.* Elastic analysis of torsion crack problems of a bar with ring segment section // Int. J. Fract.— 1983.— **22**, N 1.— P. 3—14.

К гл. 6

1. *Sneddon I. N.* A note on the problem of the penny-shaped crack // Proc. Cambridge Philos. Soc.— 1965.— **61**, N 2.— P. 609—611.
2. *Sneddon I. N.* Integral transform methods // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 315—367.— (Mechanics of fracture; 1).
3. *Kassir M. K., Sih G. C.* Three-dimensional crack problems.— Leyden : Nordhoff Intern. Publ., 1975.— 452 p.— (Mechanics of fracture; 2).
4. *Sneddon I. N.* The distribution of stress in the neighborhood of a crack in an elastic solid // Proc. Roy. Soc.— 1946.— **A187**.— P. 229—260.
5. *Collins W. D.* Some axially symmetric stress distributions in elastic solids containing penny-shaped cracks. I. Cracks in an infinite solid and thick plate // Proc. Roy. Soc.— 1962.— **A266**, N 1326.— P. 359—386.
6. *Sih G. C.* Handbook of stress-intensity factors.— Bethlehem : Lehigh University Press, 1973.— Vol. 1.— 420 p.
7. *Салганик Р. Л.* Об осесимметричных трещинах продольного сдвига // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1962.— № 3.— С. 77—80.
8. *Benthem J. P., Koiter W. T.* Asymptotic approximations to crack problems // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 131—178.— (Mechanics of fracture; 1).
9. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами.— Киев : Наук. думка, 1968.— 246 с.

10. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения.— М. : Наука, 1974.— 640 с.
11. *Guidera J. T., Lardner R. W.* Penny-shaped cracks // J. Elast.—1975.— 5, N 1.— P. 59—73.
12. *Sankar T. S., Fabrikant V. I.* Investigations of a two-dimensional integral equation in theory of elasticity and electrostatics // J. méc. théor. et appl.— 1983.— **2**, N 2.— P. 285—299.
13. *Labbens R. C., Heliot J., Pellissier-Tanon A.* Weight functions for three-dimensional symmetrical crack problems // Cracks and Fracture: Proc. 9th Nat. Symp. Fract. Mech.— Baltimore : ASTM, 1976.— P. 448—470.— (ASTM STP 601).
14. *Oore M., Burns D. I.* Estimation of stress intensity factors for embedded irregular cracks subjected to arbitrary normal stress fields // Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol.— 1980.— **102**, N 2.— P. 202—211.
15. *Смит, Кобаяси, Эмери.* Коэффициенты интенсивности напряжений для дискообразных трещин. Ч. 1. Бесконечная среда // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1967.— **34**, № 4.— С. 225—231.
16. *Tada H., Paris P. C., Irwin G. R.* The stress analysis of cracks: Handbook.— Hellertown : Del Research Corp.— 1973.— 385 p.
17. *Segedin C. M.* Note on a penny-shaped crack under shear // Proc. Cambridge Philos. Soc.— 1950.— **47**.— P. 396—400.
18. *Кассир, Си.* Трехмерное распределение напряжений вблизи эллиптической трещины при произвольных нагрузках // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1966.— **33**, № 3.— С. 141—152.
19. *Андрейкив А. Е.* Пространственные задачи теории трещин.— Киев : Наук. думка, 1982.— 354 с.
20. *Моссаковский В. И.* Первая основная задача теории упругости для пространства с плоской круглой щелью // Прикл. математика и механика.— 1955.— **19**, № 4.— С. 443—452.
21. *Bueckner H. F.* The weight functions of mode I of the penny-shaped and of the elliptic crack // Proc. Int. Conf. Fract. Mech. and Technol. (Hong Kong, 1977).— Alphen aan den Rijn, 1977.— **2**.— P. 1069—1089.
22. *Bell J. C.* Stresses from arbitrary loads on a circular crack // Int. J. Fract.— 1979.— **15**, N 1.— P. 85—104.
23. *Krenk S.* A circular crack under asymmetric loads and some related integral equations // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1979.— **46**, N 4.— P. 821—826.
24. *Хай М. В.* Обращение системы интегральных уравнений одной трехмерной задачи математической теории трещин // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1981.— № 1.— С. 50—53.
25. *Smith R. N. L.* Stresses from arbitrary loads on a penny-shaped crack // Int. J. Numer. Meth. Eng.— 1984.— **20**, N 11.— P. 2093—2105.
26. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е.* К вопросу о разрушении хрупкого тела с дискообразной круглой трещиной // Прикл. механика.— 1967.— **3**, № 12.— С. 28—33.
27. *Баренблатт Г. И.* О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины // Прикл. математика и механика.— 1959.— **23**, № 3.— С. 434—444.
28. *Sneddon I. N., Tweed J.* The stress intensity factor for a penny-shaped crack in an elastic body under the action of symmetric body forces // Int. J. Fract. Mech.— 1967.— **3**, N 4.— P. 291—299.
29. *Tweed J.* The distribution of stress in the vicinity of a penny-shaped crack in an elastic solid under the action of symmetric body forces // Int. J. Eng. Sci.— 1969.— **7**, N 7.— P. 723—735.

30. *Dahan M., Predeleanu M.* Penny-shaped crack in a transversely isotropic solid // Int. J. Eng. Sci.— 1980.— **18**, N 8 — P. 1067—1076.
31. *Selvadurai A. P. S.* On the integral equation governing an internally indented penny-shaped crack // Mech. Res. Commun.— 1985.— **12**, N 6.— P. 347—351.
32. *Tsai Y. M.* Indentation of a penny-shaped crack by an oblate spheroidal rigid inclusion in a transversely isotropic medium // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1984.— **51**, N 4.— P. 811—815.
33. *Dahan M.* Radial shear stress in a cracked transversely isotropic solid // Mech. Res. Commun.— 1981.— **8**, N 1.— P. 35—40.
34. *Sankar T. S., Fabrikant V. I.* Punch and crack problems in transversely isotropic bodies // Int. J. Eng. Sci.— 1983.— **21**, N 7.— P. 799—811.
35. *Green A. E., Sneddon I. N.* The distribution of stress in the neighborhood of a flat elliptical crack in an elastic solid // Proc. Cambridge Philos. Soc.— 1950.— **46**, N 2.— P. 159—164.
36. *Ирвин.* Сила, вызывающая распространение несквозной трещины в пластине // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1962.— **29**, № 4.— С. 53—57.
37. *Sneddon I. N.* The stress intensity factor for a flat elliptical crack in an elastic solid under uniform tension // Int. J. Eng. Sci.— 1979.— **17**, N 2.— P. 185—191.
38. *Подильчук Ю. Н.* Плоская эллиптическая трещина в произвольном однородном поле напряжений // Прикл. механика.— 1968.— **4**, № 8.— С. 94—100.
39. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е.* Предельно-равновесное состояние неограниченного хрупкого тела с произвольно ориентированной эллиптической трещиной // Физ. хим. механика материалов.— 1969.— **5**. № 1.— С. 116—118.
40. *Миранди, Поль.* Напряжения на поверхности тонкой трехмерной эллипсоидальной полости // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теорет. основы инж. расчетов.— 1976.— **98**, № 2.— С. 79—87.
41. *Hartranft R. J., Sih G. C.* Stress singularity for a crack with an arbitrary curved front // Eng. Fract. Mech.— 1977.— **9**, N 3.— P. 705—718.
42. *Shibuya T.* An infinite solid containing a flat elliptical crack under shear // Bull. JSME.— 1978.— **21**, N 153.— P. 375—380.
43. *Хай М. В.* О решении задач термоупругости для тел с плоскими трещинами, контур которых описывается кривой второго порядка // Мат. методы и физ.-мех. поля.— Киев, 1980.— № 11.— С. 39—44.
44. *Shah R. C., Kobayashi A. S.* Stress intensity factor for an elliptical crack under arbitrary normal loading // Eng. Fract. Mech.— 1971.— **3**, N 1.— P. 71—96.
45. *Shail R.* Lamé polynomial solutions to some elliptic crack and punch problems // Int J. Eng. Sci.— 1978.— **16**, N 8.— P. 551—563.
46. *Smith F W., Sorensen D R.* The elliptical crack subjected to nonuniform shear loading // Trans. ASME. J. Appl Mech.— 1974.— **41**, N 2.— P. 502—506.
47. *Бородачев А. Н.* Плоская эллиптическая трещина в произвольном поле нормальных напряжений // Прикл. механика.— 1980.— **16**, № 12.— С. 118—121.
48. *Vijayakumar K., Atluri S. N.* An embedded elliptical crack-face tractions // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1981.— **48**, N 1.— P. 88—96.
49. *Канаун С. К., Касаткин К. Г.* Эллиптическая трещина в линейном внешнем поле напряжений // Числ. методы в гидромеханике.— Л., 1981.— С. 104—111.
50. *Бородачев А. Н.* Определение коэффициентов интенсивности напряжений для плоской эллиптической трещины при произвольных гранич-

ных условиях // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1981.— № 2.— С. 63—69.
51. *Бородачев А. Н.* Коэффициент интенсивности напряжений для плоской эллиптической трещины в упругом теле при действии симметрично распределенных объемных сил // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1981.— № 2.— С. 45—47.
52. *Kassir M. K., Sih G. C.* Three-dimensional stress around elliptical cracks in transversely isotropic solid // Eng. Fract. Mech.— 1968.— **1**, N 2.— P. 327—345.
53. *Hoenig A.* The behaviour of a flat elliptical crack in an anisotropic elastic body // Int. J. Solids and Struct.— 1978.— **14**, N 11.— P. 925—934.
54. *Harris D. O.* Slicing procedure for approximate three-dimensional Green's functions for cracks in plates of finite thickness // Int. J. Fract.— 1973.— **9**, N 1.— P. 21—32.
55. *Мартыненко М. Д.* Некоторые пространственные задачи о равновесии упругого тела, ослабленного трещиной // Прикл. механика.— 1970.— **6**, № 10.— С. 84—88.
56. *Kassir M. K.* The distribution of stress around a flat parabolic crack in an elastic solid // Eng. Fract. Mech.— 1971.— **2**, N 4.— P. 373—385.
57. *Weaver J.* Three-dimensional crack analysis // Int. J. Solids and Struct.— 1977.— **13**, N 4.— P. 321—330.
58. *Parihar K. S., Keer L. M.* Stress singularity at the corner of a wedge-shaped crack or inclusion // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1978.— **45**, N 4.— P. 791—796.
59. *Стадник М. М., Горбачевский И. Я.* Предельное равновесие хрупкого тела с прямоугольной трещиной // Физ.-хим. механика материалов.— 1981.— **17**, № 2.— С. 66—70.
60. *Kassir M. K.* Stress intensity factor for a three-dimensional rectangular crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1981.— **48**, N 2.— P. 309—312.
61. *Канаун С. К., Касаткин К. Г.* Численное решение задачи о трещине в однородной упругой среде // Исслед. по механике строит. конструкций и материалов.— Л., 1982.— С. 5—13.
62. *Kassir M. K.* A three-dimensional rectangular crack subjected to shear loading // Int. J. Solids and Struct.— 1982.— **18**, N 12.— P. 1075—1082.
63. *Андрейкив А. Е., Стадник М. М.* Распространение плоской трещины с кусочно-гладким контуром // Прикл. механика.— 1974.— **10**, № 10.— С. 50—56.
64. *Bui H. D.* An integral equations method for solving the problem of a plane crack of arbitrary shape // J. Mech. Phys. Solids.— 1977.— **25**, N 1.— P. 29—39.
65. *Mastrojannis E. N., Keer L. M., Mura T.* Stress intensity factor for a plane crack under normal pressure // Int. J. Fract.— 1979.— **15**, N 3.— P. 247—258.
66. *Chang R.* Fracture mechanics of two dimensional noncircular flaws — the equivalent area approximation // Eng. Fract. Mech.— 1982.— **16**, N 5.— P. 675—681.
67. *Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И.* Оценки и приближенные формулы в задаче теории упругости о плоской трещине нормального разрыва // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1983.— № 1.— С. 120—127.
68. *Стадник М. М., Горбачевский И. Я.* Предельное равновесие тела с плоской треугольной трещиной // Прикл. механика.— 1981.— **17**, № 7.— С. 101—105.
69. *Сметанин Б. И.* Задача о растяжении упругого пространства, содержащего плоскую кольцевую щель // Прикл. математика и механика.— 1968.— **32**, № 3.— С. 458—462.

70. *Mastrojannis E. N., Kermanidis T. B.* An approximate solution of the annular crack problems // Int. J. Numer. Meth. Eng.— 1981.— **17**, N 11.— P. 1605—1611.
71. *Shibuya T., Nakahara I., Koizumi T.* The axisymmetric distribution of stresses in an infinite elastic solid containing a flat annular crack under internal pressure // Z. angew. Math. und Mech.— 1975.— **55**, N 7/8.— P. 395—402.
72. *Choi J., Shield R. T.* A note on a flat toroidal crack in an elastic isotropic body // Int. J. Solids and Struct.— 1982.— **18**, N 6.— P.479—486.
73. *Mastrojannis E. N.* A note on the problem of an annular crack subjected to an arbitrary normal pressure // Int. J. Eng. Sci.— 1983.— **21**, N 9.— P. 1129—1136.
74. *Kanwal R. P., Pasha M. L.* Axially symmetric stress distributions in elastic solids containing ring-shaped cracks under torsion // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1974.— **41**, N 2.— P. 516—517.
75. *Hara T.* The effect of shear on the infinite elastic solid with an annular crack // Bull. JSME.— 1980.— **23**, N 180.— P. 815—821.
76. *Стадник М. М.* О разрушении трехмерного хрупкого тела, ослабленного внутренней плоской трещиной // Прикл. механика.— 1973.— **9**, № 4.— С. 117—120.
77. *Кит Г. С., Хай М. В.* О решении задач теории упругости для тела с плоской трещиной, занимающей двусвязную область // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1980.— № 3.— С. 58—61.
78. *Kumar M., Atsumi A.* Pressurised annular crack in a transversely isotropic slab // Acta Mech.— 1977.— **26**, N 1/4.— P. 321—330.
79. *Meade K. P., Keer L. M.* On the problem of a pair of point forces applied to the faces of a semi-infinite plane crack // J. Elast.— 1984.— **14**, N 1.— P. 3—14.
80. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости.— Л. : Наука, 1968.— 402 с.
81. *Hartranft R. J., Sih G. C.* Three-dimensional growth characteristics of a plane crack subjected to concentrated forces // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1974.— **41**, N 3.— P. 808—809.
82. *Хай М. В.* Решение интегральных уравнений задачи термоупругости для бесконечного тела с трещиной, которая имеет вид полуплоскости // Мат. методы и физ.-мех. поля.— Киев, 1981.— № 14.— С. 49—52.
83. *Kassir M. K., Sih G. C.* Application of Papkovich — Neuber potentials to a crack problem // Int. J. Solids and Struct.— 1973.— **9**, N 5.— P. 643—654.
84. *Meade K. P., Keer L. M.* Stress intensity factors for a semi-infinite plane crack with a wave front // J. Elast.— 1984.— **14**, N 1.— P.79—92.
85. *Bueckner H. F.* Field singularities and related integral representations // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 239—314.— (Mechanics of fracture; 1).
86. *Stallybrass M. P.* On the concentrated loading of certain elastic halfspace problems and related external crack problems. A new approach // Int. J. Eng. Sci.— 1981.— **19**, N 8.— P. 1123—1144.
87. *Lowengrub M., Sneddon I. N.* The distribution of stress in the vicinity of an external crack in an infinite elastic solid // Int. J. Eng. Sci.— 1965.— **3**, N 4.— P. 451—460.
88. *Shail R.* Some oblate spheroidal harmonics with applications to contact and external crack problems in elasticity // Util. Math.— 1983.— **24**.— P. 23—44.
89. *Уфлянд Я. С.* Упругое равновесие неограниченного тела, ослабленного внешней круговой щелью // Прикл. математика и механика.— 1959.— **23**, № 1.— С. 101—108.

90. *Панасюк В. В.* Определение разрушающей нагрузки для тела, ослабленного внешней круговой трещиной // Вопросы механики реального твердого тела.— Киев, 1962.— № 1.— С. 63—66.
91. *Higuchi M., Imai Y.* The circumferential crack extension force in a normal-anisotropic elastic body // Bull. JSME.— 1972.— **15**, N 79.— P. 21—24.
92. *Selvadurai A. P. S., Singh B. M.* Body force loading of an annular adhesive contact region // Int. J. Fract.— 1985.— **29**, N 4.— P. 191—204.
93. *Нейбер Г.* Концентрация напряжений.— М. ; Л. : Гостехиздат, 1947.— 204 с.
94. *Kassir M. K., Sih G. C.* External elliptical crack in elastic solid // Int. J. Fract. Mech.— 1968.— **4**, N 4.— P. 347—356.
95. *Андрейкив А. Е.* Определение предельных нагрузок для неограниченного тела с внешней круговой трещиной // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1969.— № 3.— С. 141—144.
96. *Кассир.* Задача о внешней эллиптической трещине в бесконечном теле // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1968.— **35**, № 2.— С. 52—54.
97. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е.* О предельном равновесии неограниченного хрупкого тела, ослабленного внешней трещиной // Прикл. механика.— 1969.— **5**, № 1.— С. 87—91.
98. *Дмитрах Н. Д.* Определение предельной нагрузки для хрупкого тела с внешней овальной трещиной // Вестн. Львов. политехн. ин-та.— Львов, 1979.— № 134.— С. 16—17.
99. *Андрейків О. Є.* Про одну просторову задачу теорії тріщин // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1969.— № 4.— С. 313—316.
100. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е.* Об одной задаче предельного равновесия для неограниченного хрупкого тела с трещиной // Прикл. механика.— 1970.— **6**, № 6.— С. 25—29.
101. *Two* parallel elliptic cracks in an infinite solid subjected to tension / M. Isida, K. Hirota, H. Noguchi, T. Yoshida // Int. J. Fract.— 1985.—**27**, N 1.— P. 31—48.
102. *Андрейкив А. Е., Панасюк В. В.* Упругое равновесие тела, ослабленного системой круговых трещин, расположенных вдоль одной плоскости // Докл. АН СССР.— 1971.— **197**, № 2.— С. 312—314.
103. *Кит Г. С., Хай М. В., Лаушник И. П.* Первая основная задача теории упругости для тела с дискообразными трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля.— Киев, 1978.— № 7.— С. 26—32
104. *Sládek J., Sládek V.* Interactia dvoch priestorovych trhlin // Strojn. čas.— 1982.— **33**, N 4.— S. 427—438.
105. *Mastrojannis E. N., Mura T.* On the problem of two coplanar cracks inside an infinite isortopic solid // Int. J. Numer. Meth. Eng.— 1983.— **19**, N 1.— P. 27—35.
106. *Хай М. В., Лаушник И. П., Калыняк И. В.* Взаимодействие близко расположенных дискообразных компланарных трещин // Физ.-хим. механика материалов.— 1985.— **21**, № 6.— С. 87—88.
107. *Гольдштейн Р. В.* Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1979.— № 3.— С. 111—126.
108. *O'Donoghue P. E., Nishioka T., Atluri S. N.* Multiple coplanar embedded elliptical cracks in an infinite solid subject to arbitrary crack face tractions // Int. J. Numer. Meth. Eng.— 1985.— **21**, N 3.— P. 437—449.
109. *Pasha M. L.* Axially symmetric stress distributions in elastic solids containing penny-shaped cracks under torsion // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1975.— **42**, N 4.— P. 896—897.

110. *Андрейкив А. Е., Панасюк В. В., Стадник М. М.* Разрушение хрупких призматических брусьев, ослабленных внутренними круговыми трещинами // Пробл. прочности.— 1972.— № 10.— С. 37—41.
111. *Хай М. В., Лаушник И. П.* О взаимодействии периодической системы дискообразных трещин // Физ.-мех. поля в деформируемых средах.— Киев, 1978.— С. 65—73.
112. *Sekine H., Mura T.* Weakening of an elastic solid by a periodic array of penny-shaped cracks // Int. J. Solids and Struct.— 1979.— **15**, N 6.— P. 493—502.
113. *Стадник М. М., Силованюк В. П.* Растяжение призматических брусьев с круговыми трещинами // Физ.-хим. механика материалов.— 1978.— **14**, № 6.— С. 84—88.
114. *Srivastava K. N., Singh K.* The effect of penny-shaped crack on the distribution of stress in a semi-infinite solid // Int. J. Eng. Sci.— 1969.— **7**, N 5.— P. 469—490.
115. *Srivastava K. N., Singh K.* Addendum to the effect of penny-shaped crack on the distribution of semi-infinite solid // Int. J. Eng. Sci.— 1970.— **8**, N 6.— P. 513—514.
116. *Жуковский И. Н.* Коэффициенты интенсивности напряжений при загрузке одного берега щели, расположенной в упругом полупространстве // Пробл. прочности.— 1982.— № 3.— С. 104—107.
117. *Устинов Ю. А.* О влиянии свободной границы полупространства на распространение трещины // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение.— 1959.— № 4.— С. 181—183.
118. *Проценко В. С.* Кручение упругого полупространства, ослабленного плоской круглой щелью // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1969.— № 6.— С. 67—71.
119. *Лоу.* Кручение упругого полупространства с внедренными дискообразными дефектами // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1972.— **39**, № 3.— С. 151—155.
120. *Mohapatra R. B., Parhi H. K.* Distribution of stresses around a penny shaped crack in a transversely isotropic semi-infinite medium // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1981.— **12**, N 1.— P. 129—143.
121. *Кит Г. С., Лаушник И. П., Хай М. В.* Определение напряжений в полупространстве с произвольно расположенными плоскими трещинами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1986.— № 3.— С. 164—171.
122. *Keer L. M., Luk V. K.* Stress analysis of an elastic layer attached to an elastic half space of the same material // Int. J. Eng. Sci.— 1976.— **14**, N 8.— P. 735—747.
123. *Dhawan G. K.* The distribution of stress in the vicinity of an external crack in a semi-infinite solid // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1977.— **8**, N 11.— P. 1315—1339.
124. *Isida M., Noguchi H.* Tension of a plate containing an embedded elliptical crack // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **20**, N 3.— P. 387—408.
125. *Smith F. W., Alavi M. I.* Stress intensity factors for a penny-shaped crack in a half space // Eng. Fract. Mech.— 1971.— **3**, N 3.— P. 241—254.
126. *Shah R. C., Kobayashi A. S.* On the surface flaw problem // The surface crack: Physical problems and computational solutions.— New York : ASME, 1972.— P. 79—124.
127. *Shah R. C., Kobayashi A. S.* Stress intensity factors for an elliptical crack approaching the surface of a semi-infinite solid // Int. J. Fract.— 1973.— **9**, N 2.— P. 133—146.
128. *Nisitani H.* A method for calculating stress concentrations and its applications // Strength and Structure of Solid Materials.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1976.— P. 53—69.

129. *Sládek J.* Riešenie priestorovyh úloh s geometricky jednoduchou trhlinou // Stevebn. čas.— 1981.— **29**, N 4.— S. 241—256.
130. *Сметанин Б. И., Соболь Б. В.* Растяжение упругого полупространства с трещиной, расположенной перпендикулярно к его поверхности // Прикл. математика и механика.— 1981.— **45**, № 5.— С. 940—943.
131. *Sládek V., Sládek J.* Riešenie okrajových úloh v pružnom polpriestore metódou hraničnych integrálnych rovnic // Stavebn. čas.— 1984.— **32**, N 9.— S. 633—649.
132. *Shah R. C., Kobayashi A. S.* Stress intensity factor for an elliptical crack approaching the surface of a plate in bending // Stress Analysis and Growth of Cracks.— Philadelphia : ASTM, 1972.— **1**.— P. 3—21.— (ASTM STP 513).
133. *Abe H., Hayashi K., Enokida Y.* Коэффициенты интенсивности для прямоугольной трещины в полубесконечном теле // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1982.— **A48**, № 425.— С. 29—34.— Яп.
134. *Smith F. W., Alavi M. J.* Stress intensity factors for part-circular surface flaws // Proc. Ist Int. Pressure Vessel Conf. (Delft, 1969).— Delft : ASME. 1969.— P. 783—800.
135. *Rooke D. P., Cartwright D. J.* The compendium of stress intensity factors.— London : Her Majesty's Stationare Office, 1976.— 330 p.
136. *Hartranft R. J., Sih G. C.* Alternating method applied to edge and surface crack problems // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 179—238.— (Mechanics of fracture; 1).
137. *Cruse T. A.* Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis // Comput. and Struct.— 1973.— **3**, N 3.— P. 509—527.
138. *Смит, Эмери, Кобаяси.* Коэффициенты интенсивности напряжений для полукруглых трещин. Ч. 2. Полубесконечная среда // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1967.— **34**, № 4.— С. 232—239.
139. *Вайншток В. А.* Расчет коэффициентов интенсивности напряжений для поверхностных трещин в конструкциях // Пробл. прочности.— 1984.— № 3.— С. 29—39.
140. *Hayashi K., Abe H.* Stress intensity factors for a semi-elliptical crack in the surface of a semi-infinite solid // Int. J. Fract.— 1980.— **16**, N 3.— P. 275—285.
141. *Benthem J. P.* State of stress at the vertex of a quarter-infinite crack in a half-space // Int. J. Solids and Struct.— 1977.— **13**, N 5.— P. 479—492.
142. *Кобаяси А., Мосс У.* Коэффициенты увеличения интенсивности напряжений при растяжении пластины с поверхностным дефектом и круглого стержня с кольцевым надрезом // Новые методы оценки сопротивления материалов хрупкому разрушению.— М. : Мир, 1972.— С. 127—145.
143. *Nisitani H., Murakami Y.* Stress intensity factors for an elliptical crack or a semi-elliptical cracks subjected to tension // Int. J. Fract.— 1974.— **10**, N 3.— P. 353—368.
144. *Hayashi K., Abe H.* Stress intensity factors for a semi-elliptical crack in the surface of a semi-infinite body subjected to lineary varying pressure on the crack surface // Int. J. Fract.— 1979.— **15**, N 5.— P. R171—R174.
145. *Palusamy S. S., Heliot J.* Two stress intensity factor calculation methods and solutions for various three-dimensional crack problems // Adv. Fract. Res. Prepr. 5th Int. Conf. Fract. (Cannes, 1981).— Oxford etc., 1981.— **1**.— P. 131—139.

146. *Putot C.* An integral equations method for resolution, in opening mode, of the problem of plane cracks at free surface // Adv. Fract. Res. Prepr. 5th Int. Conf. Fract. (Cannes, 1981).— Oxford etc., 1981.— **1**.— P. 141—150.
147. *Bhandari S., Jalouneix J.* On the front surface correction factor for semi-elliptical surface cracks // Int. J. Fract.— 1982.— **18**, N 2.— P. R9—R16.
148. *Murakami Y., Nemat-Nasser S.* Growth and stability of interacting surface flaws of arbitrary shape // Eng. Fract. Mech.— 1983.— **17**, N 3.— P. 193—210.
149. *Murakami T., Sato T.* Three-dimensional *J*-integral calculations of part-through surface crack problems // Comput. and Struct.— 1983.— **17**, N 5/6.— P. 731—736.
150. *Isida M., Naguchi H., Yoshida T.* Tension and bending of finite thickness plates with semi-elliptical surface crack // Int. J. Fract.— 1984.— **26**, N 3.— P. 157—188.
151. *Murakami Y., Nemat-Nasser S.* Interacting dissimilar semi-elliptical surface flaws under tension and bending // Eng. Fract. Mech.— 1982.— **16**, N 3.— P. 373—386.
152. *Murakami Y.* Analysis of stress intensity factors of modes I, II and III for inclined surface cracks of arbitrary shape // Eng. Fract. Mech.— 1985.— **22**, N 1.— P. 101—114.
153. *Gyekenyesi J. P., Mendelson A.* Stress analysis and stress intensity factors for finite geometry solids containing rectangular surface cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1977.— **44**, N 3.— P. 442—448.
154. *Nickel J.* Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren für Eckrisse mit Hilfe von Verschiebungsansätzen // Techn. Mech.— 1984.— **5**, N 2.— S. 36—41.
155. *Corner* crack at the bore of a rotating disk / A. S. Kobayashi, N. Polvanich, A. F. Emery, M. J. Love // Trans. ASME.— 1976.— **A98**, N 4.— P. 465—472.
156. *Kobayashi A. S.* Stress intensity factors for some surface flaw problems // Strength and Structure of Solids Materials.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1976.— P. 43—51.
157. *Tan C. L., Fenner R. T.* Elastic fracture mechanics analysis by the boundary integral equation method // Proc. Roy. Soc. London.— 1979.— **A369**, N 1737.— P. 243—260.
158. *Heliot J., Labbens R., Pellissier-Tanon A.* Solution of three dimensional crack problems using the boundary integral equation method // Numer. Meth. Fract. Mech. Proc. 2nd Int. Conf. (Swansea, 1980).— Swansea, 1980.— P. 107—121.
159. *Akhurst K. N., Chell G. G.* Methods of calculating stress intensity factors for nozzle corner cracks // Int. J. Pressure Vessels and Pip.— 1983. — **14**, N 4.— P. 227—257.
160. *Embedded* elliptical crack at a corner / A. S. Kobayashi, A. F. Emery, W. J. Love, A. Antipas // Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol.— 1978.— **100**, N 1.— P. 28—33.
161. *Сметанин Б. И.* Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое // Инж. журн. Механика твердого тела.— 1968.— № 2.— С. 115—122.
162. *Александров В. М., Сметанин Б. И.* О равновесных продольных трещинах в пластинах // Теория пластин и оболочек.— М. : Наука, 1966.— С. 21—25.
163. *Александров В. М., Сметанин Б. И.* Равновесная трещина в слое малой толщины // Прикл. математика и механика.— 1965.— **29**, № 4.— С. 782—785.

164. *Маркузон И. А.* Равновесные трещины в полосе конечной ширины // Журн. прикл. механики и техн. физики.—1963.—№ 5.— С. 69—76.
165. *Tsai Y. M.* Stress distribution crack shape and energy for a penny-shaped crack in a plate of finite thickness // Eng. Fract. Mech.— 1972.— **4**, N 1.— P. 155—169.
166. *Dhawan G. K.* Asymmetric distribution of stress in a thick plate containing a penny-shaped crack // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1972.— **3**, N 5.— P. 729—734.
167. *Кузьмин Ю. Н.* Осесимметричная деформация упругого слоя, содержащего соосные щели // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела.— 1972.— № 6.— С. 121—130.
168. *Сметанин Б. И., Соболь Б. В.* Равновесие упругого слоя, ослабленного плоскими трещинами // Прикл. математика и механика.— 1984.— **48**, № 6.— С. 1030—1038.
169. *Rogowski B.* Pierscieniowa szczelina w ciele poprzecznie izotropowym // Zesz. nauk.— Płódz, 1981.— N 370.— S. 45—61.
170. *Dhawan G. K.* The distribution of stress in the vicinity of an external crack in an infinite elastic thick plate // Acta mech.— 1973.— **16**, N 3—4.— P. 255—270.
171. *Sih G. C., Chen E. P.* Cracks in composite materials: A compilation of stress solutions for composite systems with cracks.— London etc.: Martinus Nijhoff publishers, 1981.— 538 p.— (Mechanics of fracture; 6).
172. *Tsai Y. M.* Penny-shaped crack in a transversely isotropic plate of finite thickness // Int. J. Fract.— 1982.— **20**, N 2.— P. 81—89.
173. *Shah R. C., Kobayashi A. S.* Elliptical crack in a finite-thickness plate subjected to tensile and bending loading // Trans. ASME.— 1974.— **J96**, N 1.— P. 47—54.
174. *Nishioka T., Atluri S. N.* Analytical solution for embedded elliptical cracks, and finite element alternating method for elliptical surface cracks, subjected to arbitrary loadings // Eng. Fract. Mech.— 1983.— **17**, N 3.— P. 247—268.
175. *Newman J. C., Raju I. S.* Stress intensity factor equations for cracks in three-dimensional finite bodies // Fract. Mech.: Proc. 14th Nat. Symp. (Los Angeles, 1981).— Baltimore : ASTM, 1983.— P. I-238—I-265.— (ASTM STP 791).
176. *Yamamoto Y., Sumi Y.* Stress intensity factors for three-dimensional cracks // Int. J. Fract.— 1978.— **14**, N 1.— P. 17—38.
177. *Ворошко П. П.* Определение трехмерного напряженного состояния прямоугольного бруса с центральной сквозной трещиной // Пробл. прочности.— 1979.— № 4.— С. 9—14.
178. *Rao M. N. B.* Three-dimensional stress problem of a finite thick plate with a through-crack under tension // Adv. Fract. Res.: Proc. 6th Int. Conf. Fract. (New Delhi, 1984).— Oxford etc.: Pergamon Press, 1984.— **2**.— P. 963—970.
179. *Newman J. C., Raju I. S.* Analysis of surface cracks in finite plates under tension or bending load.— Washington, 1979.— (NASA TP-1578).
180. *Raju I. S., Newman J. C.* Stress intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite thickness plates // Eng. Fract. Mech.— 1979.— **11**, N 4.— P. 817—829.
181. *Райс, Леви.* Несквозная поверхностная трещина в упругой пластине // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1972.— **39**, № 3.— С. 224—232.
182. *Трешер, Смит.* Коэффициенты интенсивности напряжений для поверхностной трещины в ограниченном теле // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1972.— **39**, № 3.— С. 232—236.

183. *Smith F. W., Sorensen D. R.* The semi-elliptical surface crack. A solution by the alternating method // Int. J. Fract.— 1976.— **12**, N 1.— P. 47—57.
184. *Newman J. C., Raju I. S.* An empirical stress-intensity factor equation for the surface crack // Eng. Fract. Mech.— 1981.— **15**, N 1/2.— P. 185—192.
185. *Sládek J., Sládek V.* Boundary element method in fracture mechanics // Acta techn. ČSAV.— 1982.— **27**, N 6.— P. 718—732.
186. *Mattheck C., Morawietz P., Munz D.* Stress intensity factor at the surface and at the deepest point of a semi-elliptical surface crack in plates under stress gradients // Int. J. Fract.— 1983.— **23**, N 3.— P. 201—212.
187. *Mattheck C., Munz D., Stamm H.* Stress intensity factor for semi-elliptical surface cracks loaded by stress gradients // Eng. Fract. Mech.— 1983.— **18**, N 3.— P. 633—641.
188. *Летунов В. И., Вайншток В. А., Шульгинов Б. С.* Сравнительный анализ методов определения поверхностных полуэллиптических трещин в условиях изгиба // Пробл. прочности.— 1984.— № 4.— С. 17—21.
189. *Wu X. R.* Stress intensity factors for half-elliptical surface cracks subjected to complex crack face loadings // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **19**, N 3.— P. 387—405.
190. *Raju I. S., Newman J. C.* Methods for analysis of cracks in three-dimensional solids // J. Aeron. Soc. India.— 1984.— **36**, N 3.— P. 153—172.
191. *Shiratori M.* Analysis of stress intensity factors for surface cracks subjected to arbitrarily distributed stresses // Bull. Fac. Eng. Yokohama Nat. Univ.— 1986.— **35**, March.— P. 1—25.
192. *Erdogan F., Boduroglu H.* Surface cracks in a plate of finite width under extension or bending // Theor. and Appl. Fract. Mech.— 1984.— **2**, N 3.— P. 197—216.
193. *Isida M., Yoshida T., Noguchi H.* Tension of a plate with a pair of semi-elliptical surface cracks // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.— 1983.— **A49**, N 448.— P. 1572—1580.
194. *Kullgren T. E., Smith F. W.* Part-elliptical cracks emanating from open and loaded holes in plates // Trans. ASME. J. Eng. Mater. and Technol.— 1979.— **101**, N 1.— P. 12—17.
195. *Grandt A. F.* Crack face pressure loading of semi-elliptical cracks located along the bore of a hole // Eng. Fract. Mech.— 1981.— **14**, N 4.— P. 843—852.
196. *Grandt A. F., Kullgren T. E.* Tabulated stress intensity factor solutions for flawed fastener holes // Eng. Fract. Mech.— 1983.— **18**, N 2.— P. 435—451.
197. *Raju I. S., Newman J. C.* Stress-intensity factors for two symmetrical corner cracks // Fract. Mech.: Proc. 11th Nat. Symp. Fract. Mech.— Baltimore : ASTM, 1979.— P. 411—430.— (ASTM STP 677).
198. *Куллгрен, Смит, Гэйнонг.* Трещина в форме четверти эллипса, развивающаяся из отверстия в пластине // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теорет. основы инж. расчетов.— 1978.— **100**, № 2.— С. 35—40.
199. *Rudd J. L., Hsu T. M., Wood H. A.* Part-through crack problems in aircraft structures // Part-Through Crack Fatigue Life Prediction.— Philadelphia : ASTM, 1979.— P. 168—194.— (ASTM STP 687).
200. *Palusamy S. S., Raymund M.* Stress-intensity factor for a corner crack at the edge of a hole in a plate // Fract. Mech.: Proc. 13th Nat. Symp. (Philadelphia, 1980).— Philadelphia, 1981.— P. 438—455.— (ASTM STP 743).

201. *Грандт мл., Куллгрен.* Коэффициенты интенсивности напряжений для несквозных трещин, развивающихся из отверстий, при общих условиях нагружения // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теорет. основы инж. расчетов.— 1981.— **103**, № 2.— С. 99—105.
202. *Tan C. L.* Boundary integral equation stress analysis of a rotating disc with a corner crack // J. Strain Anal. Eng. Des.— 1983.— **18**, N 4.— P. 231—237.
203. *Heath B. J., Grandt A. F.* Stress intensity factors for coalescing and single corner flaws along a hole bore in a plate // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **19**, N 4.— P. 665—673.
204. *Murakami Y., Norikura T., Yasuda T.* Stress intensity factors for a penny-shaped crack emanating from an ellipsoidal cavity // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.— 1982.— **A48**, N 436.— P. 1558—1565.
205. *Green D. J.* Stress intensity factor estimates for annular cracks at spheroical voids // J. Amer. Ceram. Soc.— 1980.— **63**, N 5.— P. 342—344.
206. *Atsumi A., Shindo Y.* Peripheral edge crack around a spherical cavity under uniaxial tension field // Int. J. Eng. Sci.— 1983.— **21**, N 3.— P. 269—278.
207. *Nilson R. H., Proffer W. J.* Engineering formulas for fractures emanating from cylindrical and spherical holes // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1984.— **51**, N 4.— P. 929—933.
208. *Srivastava K. N., Mahajan R. L.* Distribution of stress in an infinite solid containing a spherical cavity and an external crack // Indian J. Technol.— 1970.— **8**, N 11.— P. 398—403.
209. *Shindo Y.* Singular stresses in an infinite solid with a flat annular crack around a spheroical cavity under tension // Eng. Fract. Mech.— 1983.— **18**, N 4.— P. 851—859.
210. *Hirai H., Satake M.* Stress analysis of a penny-shaped crack located between two spherical cavities in an infinite solid // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1980.— **47**, N 4.— P. 806—810.
211. *Hirai H., Satake M.* Stress analysis of a panny-shaped crack located between two oblate spheroidal cavities in an infinite solid // Int. J. Eng. Sci.— 1981.— **19**, N 9.— P. 1283—1291.
212. *Keer L. M., Luk V. K., Freedman J. M.* Circumferential edge crack in a cylindrical cavity // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1977.— **44**, N 2.— P. 250—254.
213. *Nied H. F., Erdogan F.* The elasticity problem for a thick-walled cylinder containing a circumferential crack // Int. J. Fract.— 1983.— **22**, N 4.— P. 277—301.
214. *Anzai K., Shindo Y., Atsumi A.* Осесимметричные задачи о бесконечном упругом теле, содержащем цилиндрическую полость и бесконечный ряд параллельных кольцевых поверхностных трещин // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1981.— **A47**, № 414.— С. 166—171.— Яп.
215. *Fu L. S.* The torsion of a cracked hollow elastic solid // Rev. roum. sci techn. Sér. méc. appl.— 1977.— **22**, N 4.— P. 639—644.
216. *Nishimura A., Aoki S., Sokata M.* Коэффициент интенсивности напряжений для полуэллиптической трещины в цилиндре под действием внутреннего давления // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1977.— **43**, № 363.— С. 3192—3199.— Яп.
217. *Nisitani H., Chen D. H.* Stress intensity factors for a semi-elliptic surface crack emanating from the inside of an infinitely thick cylinder subjected to internal pressure // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.— 1984.— **A50**, N 455.— P. 1376—1382.
218. *Златин А. Н.* Растяжение цилиндра, содержащего периодически расположенные дискообразные трещины // Докл. АН СССР.— 1978.— **241**, № 6.— С. 1300—1302.

219. *Tsuchida E., Uchiyama T.* Stresses in an elastic circular cylinder with an oblate spheroidal cavity or an internal penny-shaped crack under tension // Bull. JSME.— 1980.— **23**, N 175.— P. 1—8.
220. *Collins W. D.* Some axially symmetric stress distributions in elastic solids containing penny-shaped cracks. III. A crack in a circular beam // Proc. Edinburgh Math. Soc.— 1962.— **13**, N 1.— P. 69—78.
221. *Sneddon I. N., Welch J. T.* A note on the distribution of stress in a cylinder containing a penny-shaped crack // Int. J. Eng. Sci.— 1963.— **1**, N 3.— P. 411—419.
222. *Parhi H., Atsumi A.* The distribution of stress in a transversely isotropic cylinder containing a penny-shaped crack // Int. J. Eng. Sci.— 1975.— **13**, N 7/8.— P. 675—685.
223. *Watanabe K., Atsumi A.* Long circular cylinder having an infinite row of penny-shaped cracks // Int. J. Eng. Sci.—1972.—**10**, N 2.—P. 159—171.
224. *Misra J. C., Mishra M., Maiti S. N.* Theoretical stress analysis for a non-isotropic body of cylindrical configuration containing a row of cracks // Eng. Fract. Mech.— 1983.— **17**, N 5.— P. 471—489.
225. *Keer L. M., Freedman J. M., Watts H. A.* Infinite tensile cylinder with circumferential edge crack // Lett. Appl. and Eng. Sci.— 1977.— **5**, N 2.— P. 129—139.
226. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Ковчик С. Е.* Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов.— Киев : Наук. думка, 1977.— 277 с.
227. *Харрис.* Коэффициент интенсивности напряжений для полых цилиндрических образцов с наружным кольцевым надрезом // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теорет. основы инж. расчетов.— 1967.— **89**, № 1.— С. 61—68.
228. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е.* К теории определения критического раскрытия трещины // Механика деформируемых тел и конструкций.— М. : Машиностроение, 1975.— С. 373—378.
229. *Gray T. G. F.* Convenient closed form stress intensity factors for common crack configurations // Int. J. Fract.— 1977.— **13**, N 1.— P. 65—75.
230. *Zahn J. J.* Stress intensity factors for a sharply notched infinite cylinder under tension // Developments in Mechanics.— New York : John Willey and Sons, 1965.— **3**, N 1.— P. 91—103.
231. *Бюккнер Х. Ф.* Дискуссия по статье Г. Париса и Дж. Си «Анализ напряженного состояния около трещин» // Прикл. вопросы вязкости разрушения.— М. : Мир, 1968.— С. 139—140.
232. *Браун У., Сроули Дж.* Испытания высокопрочных металлических материалов на вязкость разрушения при плоской деформации.— М. : Мир, 1972.— 246 с.
233. *Кудрявцев Б. И., Партон В. З.* Кручение и растяжение цилиндра с внешним кольцевым разрезом // Прикл. математика и механика.— 1973.— **37**, № 2.— С. 316—325.
234. *Андрейкив А. Е., Панасюк В. В., Панько И. Н.* К теории предельного равновесия цилиндрических образцов с внешними кольцевыми трещинами // Физ.-хим. механика материалов.— 1974.— **10**, № 3.— С. 29—39.
235. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения.— М. : Наука, 1985.— 504 с.
236. *Loo Tsu-Tao.* On stress-intensity factors for circumferentially cracked circular cylinder // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1980.— **47**, N 2.— P. 441—443.
237. *Златин А. Н., Уфлянд Я. С.* К смешанным задачам о деформации упругого цилиндра // Прикл. механика.— 1985.— **21**, № 3.— С. 7—14.

238. *Atsumi A., Shindo Y.* Singular stresses in a transversely isotropic circular cylinder with circumferential edge crack // Int. J. Eng. Sci.— 1979.— **17**, N 12.— P. 1229—1236.
239. *Ярема С. Я.* Коэффициенты интенсивности напряжений для цилиндрических образцов с наружной трещиной переменной глубины // Физ.-хим. механика материалов.— 1970.— **6**, № 1.— С. 87—89.
240. *Методика* оценки трещиностойкости конструкционных материалов при растяжении и изгибе цилиндрического образца с внешней кольцевой трещиной, выходящей на поверхность кольцевого концентратора / А. Е. Андрейкив, С. Е. Ковчик, И. Н. Панько, В. А. Зазуляк // Методы и средства определения трещиностойкости конструкционных материалов.— Киев : Наук. думка, 1981.— С. 19—25.
241. *Андрейкив А. Е., Стадник М. М., Панько И. Н.* Методика определения кинетики роста внешней трещины в бесконечном цилиндре при циклическом нагружении // Методы и средства определения трещиностойкости конструкционных материалов.— Киев : Наук. думка, 1981.— С. 73—78.
242. *Растяжение* и изгиб цилиндрического образца с внешней кольцевой трещиной, выходящей на поверхность кольцевого концентратора / А. Е. Андрейкив, С. Е. Ковчик, И. Н. Панько, В. А. Зазуляк // Пробл. прочности.— 1978.— № 3.— С. 53—57.
243. *Lefort P.* Stress intensity factors for a circumferential crack emanating from a notch in a round tensile bar // Eng. Fract. Mech.— 1978.— **10**, N 4.— P. 897—904.
244. *Shibuya T., Koizumi T., Okuya T.* The axisymmetric stress field in an infinite solid cylinder with an external crack under torsion // Bull. JSME.— 1979.— **22**, N 170.— P. 1049—1052.
245. *Zlatin A. N., Uflyand Ya. S.* Torsion of an elastic cylinder slackened by an external circular notch. I. The case of an infinite cylinder // J. Elast.— 1983.— **13**, N 2.— P. 207—214.
246. *Yamamoto Y., Sumi Y.* Stress intensity factors of a twisted round bar with a circumferential crack // Int. J. Fract.— 1974.— **10**, N 2.— P. 269—271.
247. *Hasebe N., Kuse K.* Torsion of a cylindrical bar with ring-shaped edge crack by the mapping function and the finite difference method // Teor. and Appl. Mech.: Proc. 27th Jap. Nat. Congr. Appl. Mech. (Tokyo, 1977).— Tokyo, 1979.— P. 37—46.
248. *Shibuya T., Koizumi T., Okuya T.* Torsion of a two-part cylindrical rod with a circumferential crack // Theor. and Appl. Mech. : Proc. 28th Jap. Nat. Congr. Appl. Mech.— Tokyo, 1980.— P. 187—194.
249. *Панько И. Н., Гордынский И. П., Кулик З. С.* K_{III}-тарировка цилиндрического образца с кольцевой трещиной при заданном угле закручивания // Физ.-хим. механика материалов.— 1982.— **18**, № 1.— С. 109—110.
250. *Андрейкив А. Е., Панько И. Н., Иваницкий Я. Л.* Об условиях правомерности применения критерия Ирвина для трещин продольного сдвига // Физ.-хим. механика материалов.— 1983.— **19**, № 2.— С. 73—78.
251. *Gupte K. A., Banerjee S.* Fracture of round bars loaded in mode III and a procedure for K_{IIIC} determination // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **19**, N 5.— P. 919—946.
252. *Nisitani H., Chen D. H.* Stress intensity factor for a semi-elliptic surface crack in a shaft under tension // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.— 1984.— **A50**, N 453.— P. 1077—1082.
253. *Astiz M. A., Elices M.* On the application of the stiffness derivative method to two and three dimensional fracture problems // Numer. Meth,

Fract. Mech.: Proc. 2nd Int. Conf. (Swansea, 1980).— Swansea, 1980.— P. 93—106.
254. *Bush A. J.* Stress intensity factors for single-edge-crack solid and follow round bars loaded in tension // J. Test and Eval.— 1981.— **9**, N 4.— P. 216—223.
255. *Панько И. Н.* Растяжение цилиндра с двумя сегментными трещинами // Физ.-хим. механика материалов.— 1983.— **19**, № 6.— С. 112.
256. *Aoki M., Kiuchi A.* Brittle fracture strength of notched round bar under axial load // Adv. Fract. Res.: Proc. 6th Int. Conf. Fract. (New Delhi, 1984).— Oxford etc.: Pergamon Press, 1984.— **2**.— P. 1439—1446.
257. *Morawietz P.* Bruchmechanische Analyse von Sägerissen in Zylindern unter ortsvariabler Belasting // Z. angew. Math. und Mech.—1985.— **65**, N 4.— S. 157—160.
258. *Nisitani H., Noda N.* Tension of a cylindrical bar having an infinite row circumferential cracks // Eng. Fract. Mech.— 1984.— **20**, N 4.— P. 675—686.
259. *Wüthrich C.* Stress intensity factors for cylindrical cracks in long cylinders // Eng. Fract. Mech.— 1980.— **13**, N 4.— P. 987—990.
260. *Keer L. M., Watts H. A.* Mixed boundary value problems for a cylindrical shell // Int. J. Solids and Struct.— 1976.— **12**, N 11.— P. 723—729.
261. *Erdol R., Erdogan F.* A thick-walled cylinder with an axisymmetric internal or edge crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1978.— **45**, N 2.— P. 281—286.
262. *Cesari F., Hellen T. K.* Evaluation of stress intensity factors for internally pressurised cylinders with surface flaws // Int. J. Pressure Vessels and Pip.— 1979.— **7**, N 3.— P. 199—227.
263. *Harris D. O., Lim E. Y.* Stress-intensity factors for complete circumferential interior surface cracks in hollow cylinders // Fract. Mech.: Proc. 13th Nat. Symp. (Philadelphia, 1980).— Philadelphia, 1981.— P. 375—386.— (ASTM STP 743).
264. *Delale F., Erdogan F.* Application of the linespring model to a cylindrical shell containing a circumferential or axial part-through crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1982.— **49**, N 1.— P. 97—102.
265. *Когут Н. С., Панько И. Н.* Применение трубчатого образца для определения трещиностойкости материала сосудов давления и сварных соединений // Физ.-хим. механика материалов.— 1984.— **20**, № 1.— С. 63—67.
266. *Чжэн, Финни.* Расчет коэффициента интенсивности напряжений для осесимметричных трещин в тонкостенных цилиндрах с использованием решения задачи о плоской деформации // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теорет. основы инж. расчетов.— 1985.— **107**, № 3.— С. 84—97.
267. *Shibuya T., Koizumi T., Suzuki K.* The torsion of a hollow cylinder with an internal circular crack // Bull. JSME.— 1979.— **22**, N 173.— P. 1532—1536.
268. *Shibuya T., Koizumi T., Suzuki K.* The torsion of a hollow cylinder with many internal circumferential cracks // Bull. JSME.— 1981.— **24**, N 189.— P. 489—494.
269. *Lim E. Y., Dedhia D. D., Harris D. O.* Approximate influence functions for part-circumferetial interior surface cracks in pipes // Fract. Mech.: Proc. 14th Nat. Symp. (Los Angeles, 1981).— Baltimore : ASTM, 1983.— P. I-281—I-296.— (ASTM STP 791).
270. *Никишков Г. П., Морозов Е. М.* Коэффициенты интенсивности напряжений у кольцевых трещин в толстостенных трубах при растяжении // Пробл. прочности.— 1976.— № 6.— С. 44—48.

271. *Морозов Е. М., Никишков Г. П.* Метод конечных элементов в механике разрушения.— М. : Наука, 1980.— 254 с.
272. *Grebner H.* Finite element calculation of stress intensity factors for complete circumferential surface cracks at the outer wall of a pipe // Int. J. Fract.— 1985.— **27**, N 3/4.— P. R99—R102.
273. *Suzuki K., Shibuya T., Koizumi T.* The torsion of an infinite hollow cylinder with an external crack // Int. J. Eng. Sci.— 1978.— **16**, N10.— P. 707—715.
274. *Shibuya T., Koizumi T., Suzuki K.* The torsion of hollow cylinder with two or infinite parallel external circular cracks // Bull. JSME.— 1980.— **23**, N 179.— P. 637—643.
275. *Tan C. L., Fenner R. T.* Stress intensity factors for semi-elliptical surface cracks in pressurised cylinders using the boundary integral equation method // Int. J. Fract.— 1980.— **16**, N 3.— P. 233—245.
276. *Heliot J., Labbens R. C., Pellissier-Tanon A.* Semi-elliptical cracks in a cylinder subjected to stress gradients // Fract. Mech.: Proc. 11th Nat. Symp. Fract. Mech. (Blackburg, 1978).— Baltimore : ASTM, 1979.— P. 341—364.— (ASTM STP 677).
277. *McGowan J. J., Raymund M.* Stress intensity factors solution for internal longitudinal semi-elliptical surface flaws in a cylinder under arbitrary loading // Fract. Mech.: Proc. 11th Nat. Symp. Fract. Mech. (Blackburg, 1978).— Baltimore : ASTM, 1979.— P. 365—380.— (ASTM STP 677).
278. *Atluri S. N., Kathiresan K.* Influence of flaw shapes on stress intensity factors for pressure vessel surface flaws and nozzle corner cracks / Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol.— 1980.— **102**, N 3.— P. 278—286.
279. *Newman J. C., Raju I. S.* Stress intensity factors for internal surface crack in cylindrical pressure vessels // Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol.— 1980.— **102**, N 4.— P. 342—346.
280. *Nadiri F., Tan C. L., Fenner R. T.* Three-dimensional analysis of surface cracks in pressurised thickwalled cylinders // Int. J. Pressure Vessels and Pip.— 1982.— **10**, N 3.— P. 159—167.
281. *Nishioka T., Atluri S. N.* Analysis of surface flaw in pressure vessels by a new 3-dimensional alternating method // Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol.— 1982.— **104**, N 4.— P. 299—307.
282. *Lee Y. S., Raymund M.* Stress intensity factor solutions for internal longitudinal semi-circular surface flaws in a cylinder under arbitrary loading // Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol.— 1983.— **105**, N 4.— P. 309—315.
283. *Miyazaki N., Shibata K.* Stress intensity factor analysis of surface cracks in three-dimensional structure—comparison of the finite element solutions with the results obtained by the simplified estimation methods // Int. J. Pressure Vessels and Pip.— 1984.— **15**, N 1.— P. 37—59.
284. *Atluri S. N., Kathiresan K.* Three dimensional analysis of surface flaws in thick walled reactor pressure vessels using displacement-hybrid finite element methods // Nucl. Eng. and Des.— 1979.— **51**, N 2.— P. 163—176.
285. *Андрейкив А. Е., Стадник М. М.* Изгиб прямоугольного бруса, ослабленного внутренней круговой трещиной // Физ.-хим. механика материалов.— 1972.— **8**, № 4.— С. 77—79.
286. *Стадник М. М.* Построение K_I-тарировки для силовой схемы изгиба призматического бруса с круговой трещиной // Методы и средства определения трещиностойкости конструкционных материалов.— Киев : Наук. думка, 1981.— С. 78—81.

287. *Kisu H., Yuuki R., Kitagawa H.* Application of new methods to the boundary element method analysis of stress intensity factors // Adv. Fract. Res.: Proc. 6th Int. Conf. Fract. (New Delhi, 1984).— Oxford etc.: Pergamon Press, 1984.— **2**.— P. 927—936.
288. *Srivastava K. N., Dwivedi J. P.* The effect of a penny-shaped crack on the distribution of stress in an elastic sphere // Int. J. Eng. Sci.— 1971.— **9**, N 4.— P. 399—420.
289. *Kant R., Body D. B.* The elastostatic axisymmetric problem of a cracked sphere // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1980.— **47**, N 3.— P. 538—544.
290. *Kant R.* The elastostatic axisymmetric problem of a sphere containing a penny-shaped crack in a nonequatorial plane // Int. J. Eng. Sci.— 1983.— **21**, N 11.— P. 1321—1326.
291. *Shindo Y., Himemiya T.* Singular stresses in an elastic sphere having an annular crack // Z. angew. Math. und Mech.— 1982.— **62**, N 7.— P. 291—300.
292. *Atsumi A., Shindo Y.* Осесимметричная задача о напряженном состоянии упругой сферы с периферической краевой трещиной // Нихон кикай гаккай ромбунсю.—1981.— **A47**, № 422.— С. 1006—1011.— Яп.
293. *Fujita T., Tsuchida E., Nakahara I.* A hollow oblate spheroid subjected to internal or external pressure and an oblate spheroid with a penny-shaped crack // Int. J. Fract.— 1982.— **20**, N 3.— P. 195—207.
924. *Atsumi A., Shindo Y.* Axisymmetric singular stresses in a thick-walled spherical shell with an internal edge crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1983.— **50**, N 1.— P. 37—42.
295. *Златин А. Н., Лавров Н. А.* Кручение упругого полого шара, ослабленного кольцевыми надрезами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1984.— № 4.— С. 68—72.
296. *Fan Y. X., Fan T. Y., Fan D. J.* The approximate analytical solution for both surface and embedded cracks in cylinder with finite size // Eng. Fract. Mech.— 1982.— **16**, N 1.— P. 55—67.
297. *Chang S. S.* The general solution of a finite cylinder with a concentric penny-shaped crack under torsion // Eng. Fract. Mech.— 1985.— **22**, N 4.— P. 571—578.
298. *Zlatin A. N., Uflyand Ya. S.* Torsion of an elastic cylinder slackened by an external circular notch. II. The case of a finite cylinder // J. Elast.— 1983.— **13**, N 2.— P. 215—223.
299. *Beech J. F., Ingraffea A. R.* Three-dimensional finite element calibration of the short-rod specimen // Int. J. Fract.— 1982.— **18**, N 3.— P. 217—229.
300. *Завьялов Г. Г., Матченко Т. И.* Влияние кривизны границы трещины на коэффициенты интенсивности напряжений в компактном образце // Сопротивление материалов и теория сооружений.— Киев, 1984.— № 44.— С. 36—40.
301. *Tseng A.* A three-dimensional finite element analysis of the three-point bend specimen // Eng. Fract. Mech.— 1980.— **13**, N 4.— P. 939—943.
302. *Munz D., Bubsey R. T., Srawley J. E.* Compliance and stress intensity coefficients for short bar specimens with chevron notches // Int. J. Fract.— 1980.— **16**, N 4.— P. 359—374.

К гл. 7

1. *Райс, Си.* Плоские задачи о трещинах, расположенных на границе раздела двух различных сред // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1965.— **32**, № 2.— С. 186—192.

2. *Лобер, Си.* Функция Грина для трещин в неоднородных материалах // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1967.— **34**, № 1.— С. 131—133.
3. *Черепанов Г. П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение.— 1962.— № 1.— С. 131—137.
4. *Ингленд.* Трещина между двумя разными средами // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1965.— **32**, № 2.— С. 165—168.
5. *Эрдоган.* Распределение напряжений в связанных разнородных материалах с трещинами // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1965.— **32**, № 2.— С. 169—177.
6. *Грилицкий Д. В.* Об упругом равновесии неоднородной пластинки с разрезом // Прикл. механика.— 1966.— **2**, N 5.— С. 12—18.
7. *Прусов И. А.* Напряженное состояние в неоднородной плоскости с разрезами // Прикл. механика.— 1966.— **2**, № 6.— С. 11—18.
8. *Sih G. C., Chen E. P.* Cracks in composite materials: A compilation of stress solutions for composite systems with cracks.— London etc.: Martinus Nijhoff publishers, 1981.— 538 p.— (Mechanics of fracture; 6).
9. *Прусов И. А., Лунская Л. И.* Упругое состояние кусочно-однородной ортотропной плоскости с разрезами // Прикл. механика.— 1969.— **5**, № 8.— С. 77—83.
10. *Willis J. R.* Fracture mechanics of interfacial cracks // J. Mech. and Phys. Solids.— 1971.— **19**, N 6.— P. 353—368.
11. *Comninou M.* The interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1977.— **44**, N 4.— P. 631—636.
12. *Дундурс Я., Комниноу М.* Обзор и перспективы исследования межфазной трещины // Разрушение композитных материалов: Тр. 1-го Сов.-амер. симпоз.— Рига, 1979.— С. 78—87.
13. *Atkinson C.* The interface crack with a contact zone (an analitical treatment) // Int. J. Fract.— 1982.— **18**, N 3.— P. 161—177.
14. *Keer L. M., Meade K. P.* A note on a no-slip interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1982.— **49**, N 2.— P. 454—455.
15. *Эрдоган.* Распределение напряжений в неоднородной упругой плоскости, имеющей трещины // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1963.— **30**, № 2.— С. 83—87.
16. *Lowengrub M.* A pair of coplanar cracks at the interface of two bonded dissimilar elastic half planes // Int. J. Eng. Sci.— 1975.— **13**, N 7/8.— P. 731—741.
17. *Srivastava K. N., Palaiya R. M., Ghoudhary A.* System of Griffith cracks lying at the interface of two bonded dissimilar elastic half-planes // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1979.— **10**, N 5.— P. 633—645.
18. *Parihar K. S., Garg A. C.* An infinite row of collinear cracks at the interface of two bonded dissimilar elastic half planes // Eng. Fract. Mech.— 1975.— **7**, N 4.— P. 751—759.
19. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М., Рывкин М. Б.* Деформация составной упругой плоскости, ослабленной периодической системой произвольно нагруженных щелей // Прикл. математика и механика.— 1981.— **45**, № 6.— С. 1088—1094.
20. *Isida M., Noguchi H.* An arbitrary array of cracks in bonded semi-infinite bodies under in-plane loads // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.— 1983.— **A49**, N 437.— P. 36—45.
21. *Ашбаух.* Развитие конечной трещины, перпендикулярной поверхности раздела двух материалов // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1973.— **40**, № 2.— С. 312—314.

22. *Atkinson C.* On the stress intensity factors associated with cracks interacting with an interface between two elastic media // Int. J. Eng. Sci.— 1975.— **13**, N 5.— P. 489—504.
23. *Atkinson C., Javaherian H.* Evaluation of stress intensity factors associated with bimaterial crack // J. Inst. Math. and Appl.— 1980.— **26**, N 3.— P. 235—258.
24. *Isida M.* On the determination of stress intensity factors for some common structural problems // Eng. Fract. Mech.— 1970.— **2**, N 1.— P. 61—79.
25. *Erdogan F.* Fracture problems in composite materials // Eng. Fract. Mech.— 1972.— **4**, N 4.— P. 811—840.
26 *Cook T. S., Erdogan F* Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface // Int. J. Eng. Sci.— 1972.— **10**, N 8.— P. 677—697.
27. *Erdogan F., Birtcikoglu V.* Two bonded half planes with a crack going through the interface // Int. J. Eng. Sci.— 1973.— **11**, N 7.— P. 745—766.
28. *Isida M.* Method of Laurent series expansion for internal crack problems // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 56—130.— (Mechanics of fracture; 1).
29. *Erdogan F.* Fracture of composite materials // Prospects Fract. Mech.— Leyden, 1974.— P. 477—492.
30. *Lu Chien-Ke, Gew Ching H.* Bonded half-planes containing two arbitrarily oriented cracks: A study of contaiment of hydraulically induced fractures // Soc. Petrol Eng. J.— 1985.— **25**, N 1.— P. 55—66.
31. *Храпков А. А.* Первая основная задача для кусочно-однородной плоскости с разрезом, перпендикулярным прямой раздела // Прикл. математика и механика.— 1968.— **32**, № 4.— С. 647—659.
32. *Банцури Р. Д* Первая основная задача для ортотропной плоскости с разрезами, перпендикулярными прямой раздела // Сообщ. АН ГССР.— 1978.— **91**, № 3.— С. 569—572.
33. *Theocaris P. S., Ioakimidis N. I.* On the Gauss — Jacobi numerical integration method applied to the solution of singular integral equations // Bull. Calcutta Math. Soc.— 1978.— **71**.— P. 29—43.
34. *Ioakimidis N. I., Theocaris P. S.* Numerical solution of Cauchy type singular integral equations by use of the Lobatto — Jacobi numerical integration rule // Apl. mat.— 1978.— **23**, N 6.— P. 439—452.
35. *Goree J. G., Venezia W. A.* Bonded elastic half-planes with an interface crack and a perpendicular intersecting crack that extends into the adjacent materials // Int. J. Eng. Sci.— 1977.— **15**, N 1.— P. 1—27.
36. *Erdogan F.* Bonded dissimilar materials containing cracks parallel to the interface // Eng. Fract. Mech.— 1971.— **3**, N 3.— P. 231—240.
37. *Erdogan F., Aksogan O.* Bonded half planes containing an arbitrarily oriented crack // Int. J. Solids and Struct.— 1974.— **10**, N 6.— P. 569—585.
38. *Ashbauch N.* Stress solution for a crack at an arbitrary angle to an interface // Int. J. Fract.— 1975.— **11**, N 2.— P. 205—219.
39. *Ioakimidis N. I., Theocaris P. S.* A system of curvilinear cracks in an isotropic elastic halfplane // Int. J. Fract.— 1979.— **15**, N 4.— P. 299—309.
40. *Tsamasphyros G., Theocaris P. S.* Integral-equation solution for half planes bonded together or in contact and containing internal cracks or holes // Ing.-Arch.— 1983.— **53**, N 4.— P. 225—241.
41. *Hayashi K., Nemat-Nasser S.* On branched, interface cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1981.— **48**, N 3.— P. 529—533.

42. *Isida M., Noguchi H.* An interface crack and an arbitrary array of cracks in bonded semi-infinite bodies under in-plane loads // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.— 1983.— **A49**, N 438.— P. 137—146.
43. *Erdogan F., Gupta G. D.* The inclusion problem with a crack crossing the boundary // Int. J. Fract.— 1975.— **11**, N 1.— P. 13—27.
44. *Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Труш И. И.* К вопросу о влиянии включений на разрушение тела с трещиной // Физ.-хим. механика материалов.— 1970.— **6**, № 5.— С. 36—43.
45. *Труш И. И., Панасюк В. В., Бережницкий Л. Т.* О влиянии формы включений на начальную стадию разрушения двухкомпонентных композитных материалов // Физ.-хим. механика материалов.— 1972.— **8**, № 6.— С. 48—53.
46. *Atkinson C.* On cracks against interfaces // Scr. met.— 1972.— **6**, N 12.— P. 1117—1123.
47. *Isida M., Noguchi H.* A circular inclusion and an arbitrary array of cracks in infinite body under in-planes loads // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.— 1983.— **A49**, N 438.— P. 147—155.
48. *Erdogan F., Gupta G. D., Ratwami M.* Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1974.— **41**, N 4.— P. 1007—1013.
49. *Tamate O.* The effect of a circular inclusion on the stresses around a line crack in a sheet under tension // Int. J. Fract. Mech.— 1968.— **4**, N 3.— P. 257—266.
50. *Atkinson C.* The interaction between a crack and an inclusion // Int. J. Eng. Sci.— 1972.— **10**, N 2.— P. 127—136.
51. *Bhargava R. D., Bhargava R. R.* An infinite elastic plate under tension with a crack and a circular inclusion // Acta techn. Acad. sci. hung.— 1974.— **76**, N 1—2.— P. 207—215.
52. *Erdogan F.* The interaction between inclusions and cracks // Fract. Mech. Ceram.— New York; London : Plenum Press, 1974.— **1**.— P. 245—267.
53. *Авербух А. З.* Сжатие плоскости с трещиной и включением // Прикл. математика и механика.— 1977.— **41**, № 4.— С. 762—768.
54. *Комогорцев В. Ф., Попов Г. Я., Радиолло М. В.* Внутренний контакт упругой шайбы с бесконечной пластинкой, имеющей круговой вырез и радиальную трещину // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1978.— № 6.— С. 71—82.
55. *Bhargava R. D., Bhargava R. R.* Elastic circular inclusion in an infinite plane containing two cracks // Int. J. Eng. Sci.— 1973.— **11**, N 4.— P. 437—449.
56. *Hsu Y. C., Shivakumar V.* Interaction between an elastic circular inclusion and two symmetrically placed collinear cracks // Int. J. Fract.— 1976.— **12**, N 4.— P. 619—630.
57. *Bhargava R. R., Narayan R.* Circular arc crack and concentric inhomogeneity in an infinite isotropic elastic plate under tension // Rozpr. inż.— 1975.— **23**, N 2.— P. 215—228.
58. *Bhargava R. D., Narayan R.* Circular inhomogeneity and two concentric symmetric circular arc crack problem in an infinite isotropic elastic plate under tension // Int. J. Fract.— 1975.— **11**, N 3.— P. 509—520.
59. *Саврук М. П., Тимощук Н. В.* Сингулярные интегральные уравнения плоской задачи теории упругости для бесконечного кусочно-однородного тела с трещинами // Физ.-хим. механика материалов.— 1984.— **20**, № 6.— С. 73—79.
60. *Papaioannou S. G., Hilton P. D., Lukas R. A.* A finite element method for calculating stress intensity factors and its application to composites // Eng. Fract. Mech.— 1974.— **6**, N 4.— P. 807—823.

61. *Тимошук Н. В.* Напряженное состояние бесконечной плоскости с двумя эллиптическими включениями и прямолинейной трещиной // Физ.-хим. механика материалов.— 1985.— **21**, № 6.— С. 90—92.
62. *Саврук М. П., Тимошук Н. В.* Периодическая задача плоской теории упругости для кусочно-однородной плоскости с трещинами // Прикл. механика.— 1986.— **22**, № 6.— С. 125—128.
63. *Perlman A. B., Sih G. C.* Elastostatic problems of curvilinear cracks in bonded dissimilar materials // Int. J. Eng. Sci.— 1967.— **5**, N 11.— P. 845—867.
64. *Грилицкий Д. В., Луцышин Р. М.* Напряженное состояние анизотропной пластинки с впаянным изотропным ядром при наличии разрезов на спае // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1969.— № 2.— С. 159—165.
65. *Ингленд.* Дугообразная трещина на границе круглого упругого включения // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1966.— **33**, № 3.— С. 184—188.
66. *Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Черепанов Г. П.* О прочности составных тел, ослабленных трещинами // Концентрация напряжений.— Киев : Наук. думка, 1970.— № 3.— С. 10—15.
67. *Viola E., Piva A.* Fracture behaviour by two cracks around an elliptic rigid inclusion // Eng. Fract. Mech.— 1981.— **15**, N 3/4.— P. 303—325.
68. *Sendeckyj G. P.* A class of interface crack problems // Fracture Analysis.— Philadelphia: ASTM, 1974.— P. 92—104.— (ASTM STP 560).
69. *Бережницкий Л. Т., Стащук Н. Г.* Коэффициенты интенсивности напряжений возле трещины на продолжении линейного жесткого включения // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1981.— № 11.— С. 49—53.
70. *Бережницкий Л. Т., Стащук Н. Г.* О развитии трещины в окрестности вершины жесткого включения // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1981.— № 12.— С. 29—33.
71. *Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г.* Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле.— Киев : Наук. думка, 1983.— 288 с.
72. *Hasebe N., Keer L. M., Nemat-Nasser S.* Stress analysis of a kinked crack initiating from a rigid line inclusion. Part I. Formulation // Mech. Mater.— 1984.— **3**, N 2.— P. 131—145.
73. *Hasebe N., Nemat-Nasser S., Keer L. M.* Stress analysis of a kinked crack initiating from a rigid line inclusion. Part II. Direction of propagation // Mech. Mater.— 1984.— **3**, N 2.— P. 147—156.
74. *Бережницкий Л. Т., Саврук М. П., Стащук Н. Г.* О взаимодействии линейных жестких включений и трещин // Физ.-хим. механика материалов.— 1981.— **17**, № 2.— С. 70—76.
75. *Жоржолиани Г. Т.* Влияние стрингера на распределение напряжений около концов разреза // Сообщ. АН ГССР.— 1974.— **74**, № 3.— С. 565—568.
76. *Суздальницкий И. Д.* Периодическая задача о креплении стрингерами пластины, ослабленной системой разрезов // Прикл. математика и механика.— 1979.— **43**, № 4.— С. 730—736.
77. *Максименко В. Н.* Задача об анизотропной пластине, ослабленной криволинейными трещинами и усиленной ребрами жесткости // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1982.— № 2.— С. 163—169.
78. *Theocaris P. S., Bardzokas D.* Reinforcement of a cracked plate by a loaded strip-inclusion // Ing.-Arch.— 1985.— **55**, N 1.— P. 45—56.
79. *Грилицкий Д. В., Евтушенко А. А.* Взаимодействие тонкого упругого включения с трещиной в кусочно-однородной плоскости // Изв. АН АрмССР. Механика.— 1985.— **38**, № 3.— С. 12—24.
80. *Erdogan F., Gupta G. D.* Layered composites with an interface flaw // Int. J. Solids and Struct.— 1971.— **7**, N 8.— P. 1089—1107.

81. *Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S.* The numerical solutions of singular integral equations // Methods of analysis and solutions of crack problems.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1973.— P. 368—425.— (Mechanics of fracture; 1).
82. *Sih G. C.* Handbook of stress-intensity factors.— Bethlehem : Lehigh University Press, 1974.— Vol. 2.— 406 p.
83. *Пальцун Н. В., Приварников А. К.* Распространение трещины в слоистой среде // Инж. журн. Механика твердого тела.— 1968.— № 3.— С. 181—184.
84. *Erdogan F., Gupta G.* The stress analysis of multi-layered composites with a flaw // Int. J. Solids and Struct.— 1971.— **7**, N 1.— P. 39—61.
85. *Dhaliwal R. S.* Two coplanar cracks in an infinitely long elastic strip bonded to semiinfinite elastic planes // Int. J. Eng. Sci.— 1973.— **11**, N 5.— P. 489—500.
86. *Ratwani M., Gupta G. D.* Interaction between parallel cracks in layered composites // Int. J. Solids and Struct.— 1974.— **10**, N 7.— P. 701—708.
87. *Сулим Г. Т., Грилицкий Д. В., Белокур И. П.* Влияние подкрепляющих полуплоскостей на коэффициенты интенсивности напряжений у концов трещины в полосе // Физ.-хим. механика материалов.— 1976.— **12**, № 5.— С. 70—75.
88. *Сулим Г. Т., Грилицкий Д. В., Белокур И. П.* Периодическая задача для составной плоскости с трещинами // Физ.-хим. механика материалов.— 1977.— **13**, № 1.— С. 82—86.
89. *Юременко В. П.* Плоская деформация композита с продольными трещинами // Мех. полимеров.— 1977.— № 3.— С. 538—540.
90. *Hilton P. D., Sih G. C.* A laminate composite with a crack normal to the interfaces // Int. J. Solids and Struct.— 1971.— **7**, N 8.— P. 913—930.
91. *Копасенко В. В., Туебаев М. К.* Напряжения в симметрично-слоистой пластине, ослабленной центральной трещиной // Прикл. математика и механика.— 1973.— **37**, № 2.— С. 333—338.
92. *Bogy D. B.* The plane elastostatic solution for a symmetrically loaded crack in a strip composite // Int. J. Eng. Sci.— 1973.— **11**, N 9.— P. 985—996.
93. *Shindo Y., Atsumi A.* A laminate composite with an infinite row of parallel cracks normal to the interfaces // Int. J. Eng. Sci.— 1974.— **12**, N 9.— P. 743—757.
94. *Gupta G. D.* A layered composite with a broken laminate // Int. J. Solids and Struct.— 1973.— **9**, N 10.— P. 1141—1154.
95. *Ашбаух.* Напряжения в слоистых композитах, содержащих разорванный слой // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1973.— **95**, № 2.— С. 221—228.
96. *Erdogan F., Bakioglu M.* Fracture of plates which consist of periodic dissimilar strips // Int. J. Fract.— 1976.— **12**, N 1.— P. 71—84.
97. *Erdogan F., Bakioglu M.* Stress-free end problem in layered materials // Int. J. Fract.— 1977.— **13**, N 6.— P. 739—749.
98. *Bakioglu M.* Fracture of composite plates with periodical edge cracks // Int. J. Fract.— 1980.— **16**, N 5.— P. 441—458.
99. *Киннис Л. А.* Краевая трещина на границе различных сред // Прикл. математика и механика.— 1978.— **42**, № 2.— С. 350—354.
100. *Mak A. F., Keer L. M.* A no-slip edge crack on a bimaterial interface // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1980.— **47**, N 4.— P. 816—820.
101. *Черепанов Г. П., Кулиев В. Д.* Теория устойчивости скальных откосов с тектоническими трещинами // Теор. и прил. механика.— София, 1977.— **1**.— С. 610—615.
102. *Geçit M. R.* Fracture of surface layer bonded to a half space // Int. J. Eng. Sci.— 1979.— **17**, N 3.— P. 287—295.

103. *Tang R., Erdogan F.* Stress intensity factors in a reinforced thick-walled cylinder // Int. J. Eng. Sci.— 1984.— **22**, N 7.— P. 867—879.
104. *Tamate O., Tsuchiya M.* О влиянии поверхностного слоя на напряженное состояние вблизи концов прямолинейной трещины в полубесконечном теле при растяжении // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1974.— **40**, № 335.— С. 1864—1870.— Яп.
105. *Саркисян В. С., Григорян Э. Х., Шагинян С. С.* О двух смешанных задачах теории упругости для полуплоскости, ослабленной внутренним прямолинейным разрезом // Учен. зап. Ереван. ун-т. Естеств. науки.— 1980.— № 2.— С. 49—58.
106. *Delale F., Erdogan F.* The crack problem for a half plane stiffened by elastic cover plates // Int. J. Solids and Struct.— 1982.— **18**, N 5.— P. 381—395.
107. *Tamate O., Iwasaka N.* An arbitrarily oriented crack in a semi-infinite medium with a surface layer under tension // Int. J. Solids and Struct.— 1975.— **11**, N 11.— P. 1257—1268.
108. *Саврук М. П., Тимошук Н. В.* Плоская задача теории упругости для кусочно-однородной полубесконечной пластины с упругими включениями и трещинами // Физ.-хим. механика материалов.— 1987.— **23**, № 2.— С. 71—78.
109. *Тимошук Н. В.* Краевая трещина в кусочно-однородной полуплоскости с упругим круговым включением // Материалы 12-й конф. мол. ученых Физ.-мех. ин-та АН УССР (Львов, 1985).— Львов, 1985.— **2**.— С. 127—131.— Деп. в ВИНИТИ 18.04.86, № 2833-В.
110. *Lu Ming-Che, Erdogan F.* Stress intensity factors in two bonded elastic layers containing cracks perpendicular to and on the interface // Eng. Fract. Mech.— 1983.— **18**, N 3.— P. 491—506.
111. *Parihar K. S., Garg A. C.* Two bonded strip containing an infinite row of interface cracks // Int. J. Eng. Sci.— 1976.— **14**, N 9.— P. 831—844.
112. *Leverenz R. K.* A finite element stress analysis of a crack in a bi-material plate // Int. J. Fract. Mech.— 1972.— **8**, N 3.— P. 311—324.
113. *Исследование* торможения роста трещин в слоистых металлических композициях / Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон, А. М. Соковиков, А. И. Тананов // Физ.-хим. механика материалов.— 1977.— **13**, N 3.— С. 3—11.
114. *Krenk S., Bakioglu M.* Transverse cracks in a strip with reinforced surfaces // Int. J. Fract.— 1975.— **11**, N 3.— P. 441—447.
115. *Sawyer S. G., Anderson R. B.* Collocated interfacial stress intensity factors for finite bi-material plates // Eng. Fract. Mech.— 1972.— **4**, N 4.— P. 605—616.
116. *Hong Chen-Chin, Stern M.* The computation of stress intensity factors in dissimilar materials // J. Elast.— 1978.— **8**, N 1.— P. 21—34.
117. *Бови, Фриз, Нил.* Решение плоских задач теории упругости с помощью принципов расчленения // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1973.— **40**, № 3.— С. 129—135.
118. *Swanson S. R.* Finite-element solution for a cracked two-layered elastic cylinder // Eng. Fract. Mech.— 1971.— **3**, N 3.— P. 283—289.
119. *Парис П., Си Дж.* Анализ напряженного состояния около трещин // Прикл. вопросы вязкости разрушения.— М. : Мир, 1968.— С. 64—142.
120. *К оценке* предельного состояния дефектных волок. Сообщение 3. Аналитическое решение задачи о предельном состоянии дефектной волоки с подкрепляющим кольцом / М. П. Саврук, И. В. Прокопчук, А. Л. Майстренко, Н. М. Каменев // Пробл. прочности.— 1983.— № 12.— С. 73—77.
121. *Kumar M.* Two strip cracks in an isotropic cylinder bounded to a hollow cylinder // J. Jap. Soc. Strength and Fract. Mech.— 1977.— **12**, N 1.— P. 1—10.

122. *Кулиев В. Д.* Трещина на границе раздела двух сред с ответвлением в одну из них в случае антиплоской деформации // Пробл. прочности.— 1979.— № 7.— С. 67—70.
123. *Кулиев В. Д.* Некоторые задачи о ветвлении трещины сдвига в кусочно-однородной упругой среде // Докл. АН АзССР.— 1979.— **35**, № 9.— С. 17—21.
124. *Bassani J. L., Erdogan F.* Stress intensity factors in bonded half planes containing inclined cracks and subjected to antiplane shear loading // Int. J. Fract.— 1979.— **15**, N 2.— P. 145—158.
125. *Tamate O.* Interaction of a surface layer with a line crack in a semi-infinite body under longitudinal shear // Technol. Repts Tohoku Univ.— 1975.— **40**, N 1.— P. 89—100.
126. *Erdogan F., Cook T. S.* Antiplane shear crack terminating at and going through a bimaterial interface // Int. J. Fract.— 1974.— **10**, N 2.— P. 227—240.
127. *Smith E.* A pile-up of dislocations in a bi-metallic solid // Scr. met.— 1969.— **3**, N 6.— P. 415—418.
128. *Chou T. W.* Dislocation pileups and elastic cracks at a bimaterial interface // Met. Trans.— 1970.— **1**, N 5.— P. 1245—1248.
129. *Theocaris P. S., Ioakimidis N. I.* Stress intensity factors at the tips of an antiplane shear crack terminating at a bimaterial interface // Int. J. Fract.— 1977.— **13**, N 4.— P. 549—552.
130. *Atkinson C.* A note on cracks crossing a bimaterial interface // Int. J. Fract. Mech.— 1972.— **8**, N 4.— P. 453—455.
131. *Atkinson C.* On cracks and screw dislocation pile ups crossing a bimaterial interface // J. Elast.— 1973.— **3**, N 1.— P. 15—22.
132. *Jagannadham K., Raghavan K. S.* The behaviour of shear cracks inside a circular inclusion // Int. J. Fract. Mech.— 1972.— **8**, N 4.— P. 459—461.
133. *Jagannadham K., Raghavan K. S.* Pile-up of screw dislocations inside an inclusion of circular cross section // Int. J. Fract.— 1974.— **10**, N 1.— P. 53—59.
134. *Smith E.* Cracks and dislocation arrays in heterogeneous media // Int. J. Fract. Mech.— 1968.— **4**, N 4.— P. 397—409.
135. *Зашкильняк И. М.* Влияние цилиндрического включения на коэффициенты интенсивности напряжений для тела с трещинами при антиплоской деформации // Мат. методы и физ.-мех. поля.— Киев, 1981.— № 13.— С. 82—85.
136. *Твердовский В. В.* О равновесии хрупкой трещины продольного сдвига на границе матрица — круглое волокно // Механика композит. материалов.— 1985.— № 4.— С. 608—613.
137. *Smith E.* The extension of circular-arc cracks in antiplane strain deformation // Int. J. Eng. Sci.— 1969.— **7**, N 9.— P. 973—991.
138. *Karihaloo B. L., Viswanathan K.* Elastic field of an elliptic inhomogeneity with debonding over an arc (antiplane strain) // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1985.— **52**, N 1.— P. 91—97.
139. *Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Сахненко А. М.* Антиплоская деформация тела с жестким криволинейным включением и трещиной на границе раздела // Физ.-хим. механика материалов.— 1981.— **17**, № 5.— С. 67—72.
140. *Sendeckyj G. P.* Debonding of rigid curvilinear inclusions in longitudinal shear deformation // Eng. Fract. Mech.— 1974.— **6**, N 1.— P. 33—45.
141. *Nuismer R. J., Sendeckyj G. P.* On the changing order of singularity at a crack tip // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1977.— **44**, N 4.— P. 625—630.
142. *Бережницкий Л. Т., Сахненко А. М.* Продольный сдвиг тела с жест-

ким остроугольным включением и трещиной на границе раздела // Физ.-хим. механика материалов.— 1983.— **19**, № 4.— С. 76—81.
143. *Atkinson C.* On some integral equations arising in elastic bimaterial problems // Int. J. Eng. Sci.— 1979.— **17**, N 5.— P. 587—595.
144. *Isida M., Tsuru H.* Круглое включение и произвольный выбор трещин в бесконечном теле при антиплоском сдвиге // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1980.— **A47**, № 420.— С. 810—817.— Яп.
145. *Jagannadham K., Raghavan K. S.* On the behaviour of shear cracks outside a circular inclusion // Int. J. Fract. Mech.— 1972.— **8**, N 4.— P. 462—464.
146. *Jagannadham K., Raghavan K. S.* Pile-up of screw dislocations at a circular inclusion // Int. J. Fract.— 1974.— **10**, N 2.— P. 241—249.
147. *Григолюк Э. И., Грингауз М. Г., Фильштинский Л. А.* К решению двумерных задач теории упругости для областей с кусочно-гладкой границей // Докл. АН СССР.— 1984.— **275**, № 4.— С. 831—834.
148. *Turska-Kłębek E., Sokołowski M.* On the influence of defects upon stress concentration at the crack // Arch. mech. stosow.— 1984.— **36**, N 1.— P. 121—126.
149. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Продольный сдвиг кусочно-однородного тела с криволинейными разрезами // Физ.-хим. механика материалов.— 1984.— **20**, № 5.— С. 72—77.
150. *Калоеров С. А.* Антиплоская деформация тела с трещиной и эллиптическими упругими включениями // Изв. АН АрмССР. Механика.— 1986.— **39**, № 1.— С. 12—16.
151. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Периодическая задача продольного сдвига бесконечного кусочно-однородного тела с трещинами // Физ.-хим. механика материалов.— 1986.— **22**, № 4.— С. 115—118.
152. *Chen E. P., Sih G. C.* Interfacial delamination of a layered composite under anti-plane strain // J. Compos. Mater.— 1971.— **5**, Jan.— P.12—23.
153. *Geçit M. R.* Antiplane shear in adhesively bonded semi-infinite media with transverse cracks // Int. J. Fract.— 1984.— **24**, N 3.— P. 163—178.
154. *Юременко В. П.* Трещины в композите при антиплоской деформации // Изв. вузов. Машиностроение.— 1977.— № 1.— С. 14—18.
155. *Geçit M. R.* Antiplane shear problem for a crack crossing a surface layer-half space boundary // METU J. Pure and Appl. Sci.— 1980.— **13**, N 3.— P. 395—412.
156. *Erdogan F., Gupta G. D.* Bonded wedges with an interface crack under anti-plane shear loading // Int. J. Fract.— 1975.— **11**, N 4.— P. 583—593.
157. *Новрузов Г. М.* К проблеме разрушения биметаллов (антиплоская деформация) // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук.— 1984.— **5**, № 3.— С. 60—62.
158. *Kuhn G.* Inhomogen geschichteten Keil mit Riss unter nichtebenem Schubspannungszustand // Z. angew. Math. und Mech.— 1976.— **56**, N 3.— S. 125—127.
159. *Matczyński M.* Stress concentrations in non-homogeneous elastic layer weakened by cracks // Rozpr. inż.— 1979 (1980).— **27**, N 4.— P. 559—574.
160. *Zhang X. S.* A central crack at the interface between two different media in a rectangular sheet under anti-plane shear // Eng. Fract. Mech.— 1984.—**19**, N 4.— P. 709—715.
161. *Моссаковский В. И., Рыбка М. Т.* Обобщение критерия Гриффитса — Снеддона на случай неоднородного тела // Прикл. математика и механика.— 1964.— **28**, № 6.— С. 1061—1069.
162. *Кассир, Бреман.* Коэффициент интенсивности напряжений для дискообразной трещины на границе раздела двух различных материалов //

Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1979.— **39**, № 1.— С. 160—162.
163. *Lowengrub M., Sneddon I. N.* The effects of internal pressure on a penny-shaped crack at the interface of two bonded dissimilar elastic half-spaces // Int. J. Eng. Sci.— 1974.— **12**, N 5.— P. 387—396.
164. *Эрдоган.* Распределение напряжений в связанных разнородных материалах, содержащих круглые и кольцеобразные трещины // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1965.— **32**, № 4.— С. 127—135.
165. *Willis J. R.* The penny-shaped crack on an interface // Quart. J. Mech. and Appl. Math.— 1972.— **25**, N 3.— P. 367—385.
166. *Keer L. M., Chen S. H., Comninou M.* The interface penny-shaped crack reconsidered // Int. J. Eng. Sci.— 1978.— **16**, N 10.— P. 765—772.
167. *Martin-Moran C. J., Barber J. R., Comninou M.* The penny-shaped interface crack with heat flow. Part 1. Perfect contact // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1983.— **50**, N 1.— P. 29—36.
168. *Takakuda K.* Дисковидная трещина между различными материалами под действием сдвига // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1979.— **A45**, № 397.— С. 1007—1015.— Яп.
169. *Takakuda K., Shibuya T., Koizumi T.* Анализ осесимметричных напряжений в склеенном разнородном материале, содержащем трещину на поверхности раздела // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1980.— **A46**, № 409.— С. 957—967.— Яп.
170. *Вайншельбаум В. М., Гольдштейн Р. В.* Осесимметричная задача о трещине на границе раздела слоев в многослойной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1976.— № 2.— С. 130—143.
171. *Arin K., Erdogan F.* Penny-shaped crack in an elastic layer bonded to dissimilar half spaces // Int. J. Eng. Sci.— 1971.— **9**, N 2.— P. 213—232.
172. *Rogowski B.* An annular crack in layered composites with transversely isotropic constituents // Z. angew. Math. und Mech.— 1984.— **64**, N 7.— P. 312—314.
173. *Mahapatra R. B., Satapathy P. K., Parhi H.* Distribution of stresses around a penny-shaped crack in a transversely isotropic layer bonded to a semi-infinite transversely isotropic medium // Rev. roum sci. techn. Sér. méc. appl.— 1981.— **26**, N 1.— P. 145—153.
174. *Erdogan F., Arin K.* Penny-shaped interface crack between an elastic layer and a half space // Int. J. Eng. Sci.— 1972.— **10**, N 2.— P. 115—125.
175. *Грилицкий Д. В., Поддубняк А. П.* Кручение двухслойной упругой среды с плоской щелью или жестким включением // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1975.— № 1.— С. 85—94.
176. *Емец В. Ф., Поддубняк А. П.* К задаче осесимметричного кручения упругой двухслойной среды, ослабленной плоской круглой щелью // Мат. методы и физ.-мех. поля.— Киев, 1982.— № 16.— С. 98—101.
177. *Kaneko K., Shindo Y., Atsumi A.* Axisymmetric problem of a flat interface annular crack between an elastic layer and half-space // Bull. JSME.— 1983.— **26**, N 212.— P. 202—206.
178. *Піддубняк О. П.* Кручення пружного шару, послабленого круговою щілиною // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.— 1974.— № 9.— С. 69—74.
179. *Dhaliwal R. S., Singh B. M., Rokne J.* Penny-shaped crack in an infinite elastic cylinder bonded to an infinite elastic material surrounding it // Int. J. Eng. Sci.— 1979.— **17**, N 12.— P. 1245—1255.
180. *Freeman N. J., Keer L. M.* On the breaking of an embedded fiber in torsion // Int. J. Eng. Sci.— 1971.— **9**, N 10.— P. 1007—1017.

181. *Misra J. C., Samantarai M.* Stress concentration in the vicinity of cracks in a sandwiched medium // Int. J. Fract.— 1984.— **24**, N 4.— P. 239—254.
182. *Singh B. M., Dhaliwal R. S., Rokne J.* An axisymmetric external crack problem for an infinite medium with a cylindrical inclusion // J. Eng. Math.— 1979.— **13**, N 3.— P. 235—247.
183. *Dhaliwal R., Singh B. M., Vrbik J.* External crack in torsion in an infinite medium with a cylindrical inclusion // Int. J. Solids and Struct.— 1980.— **16**, N 7.— P. 577—583.
184. *Эрдоган, Озбек.* Напряжения в составных волокнистых материалах, обладающих несовершенными связями // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.— 1969.— **36**, № 4.— С. 222—227.
185. *Erdogan F., Gupta G. D.* The torsion problem of a disk bonded to a dissimilar shaft // Int. J. Solids and Struct.— 1972.— **8**, N 1.— P. 93—109.
186. *Dhaliwal R. S., Rokne J. G., Singh B. M.* Penny-shaped crack in a sphere embedded in an infinite medium // Int. J. Eng. Sci.— 1979.— **17**, N 3.— P. 259—269.
187. *Kant R., Bogy D. B.* The elastostatic axisymmetric problem of a cracked sphere embedded in a dissimilar matrix // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1980.— **47**, N 3.— P. 545—550.
188. *Himemiya T., Shindo Y.* Flat annular crack in an elastic sphere bonded to an infinite material with different elastic constants // Trans. Jap. Soc. Meth. Eng.— 1982.— **A48**, N 430.— P. 758—766.
189. *Abe M., Atumi A.* Распределение упругих напряжений в составной сфере, содержащей дискообразную трещину // Нихон кикай гаккай ромбунсю.— 1975.— **41**, № 352.— С. 3399—3409.— Яп.
190. *Kassir M. K., Sih G. C.* Three-dimensional crack problems.— Leyden : Noordhoff Intern. Publ., 1975.— 452 p.— (Mechanics of fracture; 2).
191. *Delale F., Erdogan F.* The crack problem for a nonhomogeneous plane // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1983.— **50**, N 3.— P. 609—614.
192. *Gerasoulis A., Srivastav R. P.* A Griffith crack problem for a nonhomogeneous medium // Int. J. Eng. Sci.— 1980.— **18**, N 1.— P. 239—247.
193. *Мхитарян С. М.* О напряженном состоянии деформирующейся по степенному закону плоскости, ослабленной конечным или полубесконечным разрезом // Изв. АН АрмССР. Механика.— 1985.— **38**, № 4. — С. 16—20.
194. *Schovanec L.* A Griffith crack problem for an inhomogeneous elastic material // Acta mech.— 1986.— **58**, N 1/2.— P. 67—80.
195. *Delale F.* Mode-III fracture of bonded nonhomogeneous materials // Eng. Fract. Mech.— 1985.— **22**, N 2.— P. 213—226.
196. *Clements D. L., Atkinson C., Rogers C.* Antiplane crack problems for an inhomogeneous elastic materials // Acta mech.— 1978.— **29**, N 1/4.— P. 199—211.
197. *Singh B. M., Dhaliwal R. S.* Asymmetric problem of a Griffith crack in a nonhomogeneous medium under shear // J. Elast.— 1978.— **8**, N 3.— P. 313—318.
198. *Atkinson C., Xanthis L. S., Bernal M. J. M.* Boundary integral equation crack-tip analysis and applications to elastic media with spatially varying elastic properties // Comput. Math. Appl. Mech. and Eng.— 1981.— **29**, N 1.— P. 35—49.
199. *Kassir M. K.* A note on the twisting deformation of a non-homogeneous shaft containing a circular crack // Int. J. Fract. Mech.— 1972.— **8**, N 3.— P. 325—334.
200. *George O. D.* A note on the torsion of a non-homogeneous shaft containing a flaw // Int. J. Fract.—1974.—**10**, N 2.—P. 296—298.
201. *Fabricant V. I.* External crack in nonhomogeneous elasticity // Eng. Fract. Mech.—1985.— **22**, N 5.— P. 855—858.

Алгоритм Шварца 38
Антиплоская деформация 18, 380—425, 544
Балка квадратная 416, 417
— — с квадратным вырезом 418
— криволинейная 335
— прямоугольная 416—418
Брус квадратный 485
— прямоугольный 486
— — составной 537
— треугольный 485
Включение линейное жесткое 507, 532
— — упругое 508
— круговое жесткое 257, 411, 412, 431
— — упругое 502, 505, 519, 532
— сферическое 543
— тонкое упругое 508
— цилиндрическое круговое 529, 540, 542
— — криволинейное 530
— эллиптическое 503, 506
Включения круговые 257, 506
— — периодически размещенные 520
Вырез краевой квадратный 146
— — полуэллиптический 144, 145, 149, 373, 374
— — с точкой возврата на контуре 146—149
— — треугольный 145, 146
— — — с округлением в вершине 144, 145
— круговой 268—297
Изгиб стержней 422—425
Диск криволинейный с точкой возврата на контуре 337
Клин бесконечный 193—203, 406—408, 457
— — составной 536
Кольцо круговое 291—331
— — слоистое 525
Композит слоистый 511, 533—537
Коэффициент интенсивности напряжений 13
— концентрации напряжений 26
Кручение стержней 418—422
Метод альтернативный 38
— асимптотической аппроксимации 38
— Винера—Хопфа 37
— граничной интерполяции 39
— граничных коллокаций 32
— дуальных интегральных уравнений 35
— — — уравнений-рядов 35
— — уравнений-рядов 35
— задачи линейного сопряжения 30
— — Римана—Гильберта 30
— интегральных преобразований 34
— — уравнений 37
— комплексных потенциалов 29
— — — Колосова—Мусхелишвили 30
— конечных элементов 39

— конформных отображений 33
— — — и коллокаций 33
— массовых сил 37
— объемных сил 37
— последовательных приближений 38
— рядов Лорана 34
— сингулярных интегральных уравнений 35
— факторизации 37
Образец в виде двухконсольной балки 357, 358
— дисковый компактный с краевой трещиной 292, 293
— — с краевым вырезом и краевой трещиной 293—296
— — — центральной трещиной на осевое растяжение 273, 274
— — — — — — сжатие 269, 270, 312
— — — — — поперечного сдвига 274, 275
— квадратный на сжатие с боковыми трещинами поперечного сдвига 370
— — с диагональной трещиной на сжатие 355, 356
— — — продольной трещиной на осевое сжатие 343, 344
— — — центральной трещиной на осевое растяжение 344—346
— кольцевой разрезанный с краевой радиальной трещиной 314
— компактный на внецентренное растяжение 361—364, 491
— — прямоугольный для испытаний на сдвиг 369, 370
— — — с краевым надрезом и краевой трещиной 373
— призматический с боковой трещиной на изгиб трехточечный 360, 491
— — — — — — — четырехточечный 361
— — — несимметричной боковой трещиной на трехточечный изгиб 361
— прямоугольный с центральной трещиной на осевое растяжение 344—346
— С-образной формы с краевой трещиной 336, 337
— цилиндрический с кольцевой трещиной на трехточечный изгиб 491
Отверстие в форме астроиды 209
— гипоциклоидальное 208, 209, 408, 409
— квадратное 246
— криволинейное с точками возврата на контуре 203—210, 408, 409
— круговое 149, 150—152, 210—240, 246—253, 338, 339, 370—373, 412, 468—471
— остроугольное 203—210, 408
— прямоугольное 244, 245
— ромбовидное 245, 246
— треугольное 246
— эллиптическое 26, 192, 193, 240—244, 248—250, 253, 409—411
Отверстия круговые 253—267
— — периодически размещенные 152, 260—267
— — двоякопериодически размещенные 267
— эллиптические 257, 412
Пластина бесконечная 40—110
— — кусочно-однородная 492—507
— — периодически подкрепленная 515
— — составная 492—507
— восьмиугольная 379
— квадратная 344, 348, 349, 367, 371—373
— конечных размеров 268—379
— — — кусочно-однородная 524—526
— круговая 268—297

— неоднородная 22—25
— полубесконечная 111—153
— — подкрепленная мембраной 517
— — — полосой 516, 517
— — с выступом 152
— — скрепленная с полубесконечной полосой 152, 153
— — со ступенькой 152
— — составная 515—520
— полукруговая 334, 335
— прямоугольная 334, 339—374
— — со ступенькой 379
— — трехслойная 525
— трапецеидальная 374—379
— эллиптическая 331—334, 338, 339
Плоская деформация 14, 40—379
Плоское напряженное состояние обобщенное 14, 40—379, 573
Полоса бесконечная 153—193
— — с подкрепленными гранями 521—524
— — скрепленная с двумя полуплоскостями 511
— — — — полуплоскостью 516
— — слоистая 520—524
— — со ступенькой 159
— полубесконечная 159—162
— — скрепленная с полуплоскостью 152, 153
Полость сферическая 471
— цилиндрическая 476
— эллипсоидальная 27, 471
Полости сферические 476
— сфероидальные 476
Расклинивание бесконечного клина 198
— полосы клином конечной длины 178
— — полубесконечным клином 181
— полубесконечной полосы 160—162
— полуплоскости 115, 116
— пространственного тела 431
— тела двумя полубесконечными клиньями 52, 53
— — клином конечной длины 45
— — полубесконечным клином 49
Распределение напряжений и смещений у вершины трещины 16—20, 23, 24
— — у вершины узкого выреза 27
Слой бесконечный 403—406, 457—468
— — скрепленный с двумя полупространствами 533
— — составной 536
— полубесконечный 406, 461—468
Стержень круглый 418, 419, 422, 423
— прямоугольный 422, 424
— эллиптического сечения 420
Среда неоднородная 22—25, 543—547
— слоистая 537—540
Тело бесконечное 380—399, 408—413, 426—452, 471—477
— — составное 526—534
— кусочно-однородное 526—543
— ограниченное 487—491
— полубесконечное 399—402, 452—457
— — составное 535, 536
— пространственное 426—491
Трещина в форме полуплоскости 438—442
— вдоль дуги окружности 54—56, 127, 128, 282, 283
— — — параболы 59, 385
— — — — кубической 59, 60
— — — эллипса 57, 58, 385
— ветвления трехзвенная 66, 67, 387, 388
— — двоякосимметричная 68
— — с малыми отростками 67, 68, 387
— внешняя вне двоякопериодической системы круговых перешейков 447

— — — двух круговых перешейков 446
— — — периодической системы круговых перешейков 446
— — — четырех круговых перешейков 446
— выходящая на линию раздела сред 24, 496, 499, 513
— — — поверхность раздела сред 528
— дискообразная 426—432, 452—458, 476, 477, 487, 490, 540, 545
— дугообразная 54—56, 127, 128, 328, 329, 383
— — концентрическая 282, 328
— звездообразная 69—71, 389, 390
— — с неравными лучами 389, 390
— краевая ветвящаяся 126
— — зигзагообразная 126, 233
— — криволинейная 127, 128
— — ломаная 126, 127
— — прямолинейная 111—118, 122, 123, 148, 149, 240—246, 331, 334—339, 356—366, 374—379, 400, 401, 405, 406, 409, 413, 425, 519
— — — произвольной ориентации 123, 124, 148, 232, 233, 365, 401, 519
— — радиальная 210—232, 289—305, 315—328, 418
— — у вершины краевого выреза 144—146, 373, 374
— — — — угла 193—200, 406—408
— крестообразная 71, 72, 192, 282—285, 388
— — несимметричная 73, 388
— криволинейная 56—60, 136, 137, 383—385
— ломаная 60—66, 385—387
— — двухзвенная 60—63, 385
— — с малым отростком 63—66, 386
— — трехзвенная 66
— на линии раздела сред 22, 492, 493, 511, 524, 529, 530, 535, 536
— — — — — внешняя 494
— — — — — дугообразная 506
— — — — — краевая 515
— — — — — полубесконечная 494
— — — — — с ответвлениями 501
— — поверхности раздела сред 526, 537, 539, 542
— — — — — внешняя 538
— — — — — круговая 537
— — — — — туннельная 526
— — — — — цилиндрическая 542
— нормального отрыва 13
— обобщенная 208
— пересекающая линию раздела сред 497, 498, 501, 503, 531, 535
— — поверхность раздела сред 529
— плоская квадратная 435
— — краевая в форме кругового сектора 457
— — — — — части круга 456
— — — клиновидная 457, 491
— — — кольцевая 471, 476, 477, 480, 482, 488, 491
— — — — внешняя 483
— — — полуэллиптическая 456, 459—461, 468—470, 484, 486
— — — прямоугольная 457
— — — сегментовидная 479
— — кольцевая 438
— — круговая 426—432, 452—458, 476, 477, 487, 490, 540, 545
— — — внешняя 442—445, 471, 546
— — параболическая 434, 435
— — полубесконечная 438—442
— — — с синусоидальным краем 442
— — полукруговая 435
— — полукруговая-полуэллиптическая 436
— — прямоугольная 435

— — — сквозная 459
— — треугольная 435
— — угловая 461—468, 470, 471, 486
— — — в форме четверти эллипса 461
— — эллиптическая 432—434, 454—459
— — — внешняя 445
— поверхностная 21, 22, 456—461, 468—470
— поперечного сдвига 13
— продольного сдвига 13, 380—425
— прямолинейная внутренняя конечной длины 40—47, 128—131, 134—143, 149—152, 171—189, 198—203, 246—257, 268—282, 328, 331, 334, 339—356, 379—382, 399, 403, 408—414, 419—422, 495, 499, 502, 505, 506, 512, 516, 521, 525, 543
— — полубесконечная 47—50, 131—133, 136, 180—182, 201—203, 381, 382, 401, 404, 412
— — с искривлением в вершине 60
— слабоискривленная 56, 57, 383—385
— Т-образная 73, 522
— туннельная 434
— Х-образная 73, 389
— цилиндрическая полубесконечная 480
Трещины двоякопериодически размещенные прямолинейные 108—110, 399
— — — дискообразные 452
— дугообразные 86—89
— — различной длины 87—89
— коллинеарные 50—53, 74—81, 93—97, 182, 183, 189, 251—253, 285—289, 330, 331, 356, 390—392, 423—425, 520, 523
— компланарные 448
— — круговые 448
— — — внутренняя и внешняя 447
— краевая и внутренняя 137, 190
— — — полубесконечная 202, 203, 402, 406
— краевые 118—122, 240—246
— — выходящие из одной точки 124, 125
— — коллинеарные 162—165, 192, 193, 234—239, 257—262, 267, 296, 297, 305—314, 321—326, 338, 366—373, 405, 409, 410, 415
— — параллельные 125, 165—171
— — радиальные 234—240, 260—267, 296, 297, 321—428, 408
— на линии раздела сред 494, 495, 520
— — — — — коллинеарные 494, 495, 520
— параллельные 81—86, 97—103, 189—192, 288, 289, 393, 394
— — круговые 449
— — — внешние 451
— — эллиптические 449
— периодически размещенные дискообразные 451, 477
— — — дугообразные 107, 108, 395, 396
— — — коллинеарные 93—97, 133, 134, 262—267, 397
— — — краевые 120—122, 260—262, 267
— — — криволинейные 107—109, 395, 396
— — — на линии раздела сред 494
— — — параллельные конечной длины 97—101, 190—192, 397, 398
— — — — полубесконечные 102, 398, 399
— — — продольно-поперечные 105, 106
— — — прямолинейные произвольной ориентации 103—105, 152, 262, 520

— полубесконечная и конечной длины 81, 392, 393
— полубесконечные 50, 90, 91, 390—393
— произвольно ориентированные 81—86, 103—105, 251, 394
— симметрично наклоненные 84
— циклически размещенные дугообразные 92, 394, 395
— — — радиальные конечной длины 69, 90, 91
— — — краевые 239, 240, 297, 314, 315, 327, 328
— — — — полубесконечные 91, 92, 253
— — — прямолинейные произвольной ориентации 89, 90
Уравнение Винера — Хопфа 37
— характеристическое 16, 19, 23, 24
Функция Вестергарда 31
— Грина 160, 161, 211—228, 244
Цилиндр бесконечный 413—415, 477—484
— круговой 413—415, 477—482
— — конечной длины 490
— — полый 482—484
— параболический 413
Шар 487
— полый 488
— составной 543

СПРАВОЧНОЕ ИЗДАНИЕ

МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ И ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ

Справочное пособие

Том 2

САВРУК МИХАИЛ ПЕТРОВИЧ

Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами

Оформление художника *В. Г. Самсонова*
Художественный редактор *А. В Косяк*
Технический редактор *А М Капустина*
Корректоры *Л. Г. Бузиашвили, Л. Н. Регетл, Е. А. Михалец*

ИБ № 8862

Сдано набор 20.11.87 Подп в печ 05.07.88. БФ 02149.
Формат 84×108/32. Бум. тип № 2 Лит. гарн Выс печ.
Усл печ л. 32,55 Усл. кр.-отт. 32,55 Уч.-изд. л. 38,03.
Тираж 4000 экз Заказ 8—249 Цена 2 р. 70 к.

Издательство «Наукова думка».
252601 Киев 4, ул Репина, 3

Головное предприятие республиканского производственного объединения «Полиграфкнига», 252057, Киев, ул. Довженко, 3.